Resolución de Problemas del Bloque de Geometría

Ejercicios de exámenes ABAU
Junio 2019

IES O Couto

curso 2019-2020

Opción A

Junio 2019. Opción A

Se pide:

a) Calcular el ángulo del intervalo $[0^\circ, 90^\circ]$ que forman los vectores $\overrightarrow{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y $\overrightarrow{v} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

b) Obtener la ecuación implícita del plano que pasa por el punto $P = (1, -3, 0)$ y es perpendicular a la recta $\left\{\begin{array}{rcl} x - y + 2z & = & 1 \\ y - z & = & 0 \end{array}\right.$

c) Calcular la distancia del punto $Q = (1, 1, 1)$ al plano $\pi : -x + y + z + 4 = 0$, y el punto simétrico de Q respecto de π.

Opción A

Apartado a)

Si $\alpha = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, se tiene $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}| \cos \alpha$

Opción A

Apartado a)

Si $\alpha = \angle(\vec{u}, \vec{v})$, se tiene $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} + 0 = \frac{1}{2}$

Opción A

Apartado a)

Si $\alpha = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, se tiene $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}| \cos \alpha$

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} + 0 = \frac{1}{2}$
- $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = 1$

Opción A

Apartado a)

Si $\alpha = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, se tiene $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}| \cos \alpha$

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} + 0 = \frac{1}{2}$
- $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = 1$
- $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1+2-2\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

Opción A

Apartado a)

Si $\alpha = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, se tiene $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}| \cos \alpha$

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} + 0 = \frac{1}{2}$
- $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = 1$
- $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1+2-2\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

Por tanto:

$$\frac{1}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \alpha \implies \cos \alpha = \frac{1}{2} \implies \alpha = 60^\circ$$

Opción A

Apartado b)

- Sea Π el plano buscado. Para que r y Π sean perpendiculares, el vector director de la recta, $\overrightarrow{u_r}$, ha de ser el vector normal al plano.

Opción A

Apartado b)

- Sea Π el plano buscado. Para que r y Π sean perpendiculares, el vector director de la recta, $\overrightarrow{u_r}$, ha de ser el vector normal al plano.
- El vector director de r es:

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 1, 1)$$

Opción A

Apartado b)

- Sea Π el plano buscado. Para que r y Π sean perpendiculares, el vector director de la recta, $\overrightarrow{u_r}$, ha de ser el vector normal al plano.
- El vector director de r es:

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 1, 1)$$

- Para cualquier punto genérico $A = (x, y, z) \in \Pi$ se verificará $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{u_r}$. Es decir:

Opción A

Apartado b)

- Sea Π el plano buscado. Para que r y Π sean perpendiculares, el vector director de la recta, $\overrightarrow{u_r}$, ha de ser el vector normal al plano.
- El vector director de r es:

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 1, 1)$$

- Para cualquier punto genérico $A = (x, y, z) \in \Pi$ se verificará $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{u_r}$. Es decir:

$$\Pi : \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0 \Longleftrightarrow \Pi : (x-1, y+3, z) \cdot (-1, 1, 1) = 0$$

Opción A

Apartado b)

- Sea Π el plano buscado. Para que r y Π sean perpendiculares, el vector director de la recta, $\overrightarrow{u_r}$, ha de ser el vector normal al plano.
- El vector director de r es:

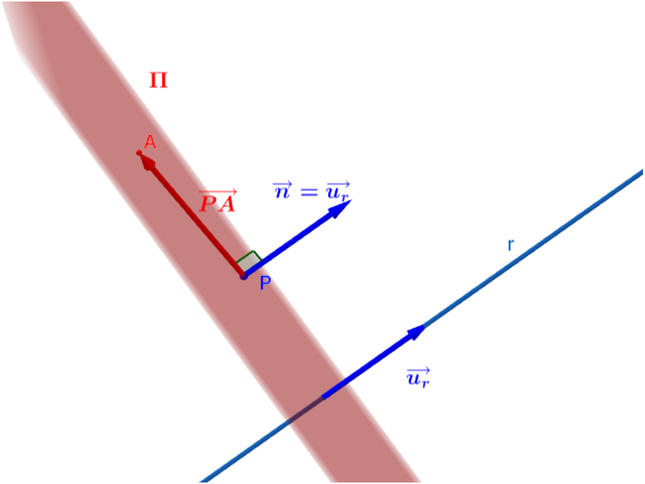
$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 1, 1)$$

- Para cualquier punto genérico $A = (x, y, z) \in \Pi$ se verificará $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{u_r}$. Es decir:

$$\Pi : \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0 \Longleftrightarrow \Pi : (x - 1, y + 3, z) \cdot (-1, 1, 1) = 0$$

$$\Pi : -x + y + z + 4 = 0$$

Opción A


Π
A
$\overrightarrow{PA}$
$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u_r}$
P
r
$\overrightarrow{u_r}$

Opción A

Apartado c)

- Se tiene que $d(Q,\Pi) = \dfrac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}$ (con $P \in \Pi$, y $\overrightarrow{n}$ vector normal a Π), que analíticamente coincide con

$$d(Q,\Pi) = \frac{|q_1 n_1 + q_2 n_2 + q_3 n_3 + d|}{|\overrightarrow{n}|}$$

siendo $Q = (q_1, q_2, q_3)$ y $\Pi : n_1 x + n_2 y + n_3 z + d = 0$

Opción A

Apartado c)

- Se tiene que $d(Q,\Pi)=\dfrac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}$ (con $P\in\Pi$, y $\overrightarrow{n}$ vector normal a Π), que analíticamente coincide con

$$d(Q,\Pi)=\frac{|q_1n_1+q_2n_2+q_3n_3+d|}{|\overrightarrow{n}|}$$

siendo $Q=(q_1,q_2,q_3)$ y $\Pi : n_1x+n_2y+n_3z+d=0$

- En este caso:

$$d(Q,\Pi)=\frac{|-1+1+1+4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}})=\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}\ u$$

Junio 2019. Opción B

Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1 : mx - y + 2 = 0$ y $\pi_2 : 2x + 3y = 0$ en función del parámetro m.

b) Obtén la ecuación implícita del plano que pasa por $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 1)$ y $C = (0, 1, 0)$

c) Calcula el punto simétrico del punto $P = (1, 2, 3)$ con respecto al plano $\pi : -x + z = 0$

Opción B

Apartado a)

- El vector normal a Π_1 es $\overrightarrow{n_1} = (m, -1, 2)$

Opción B

Apartado a)

- El vector normal a Π_1 es $\overrightarrow{n_1} = (m, -1, 2)$
- El vector normal a Π_2 es $\overrightarrow{n_2} = (2, 3, 0)$

Opción B

Apartado a)

- El vector normal a Π_1 es $\overrightarrow{n_1} = (m, -1, 2)$
- El vector normal a Π_2 es $\overrightarrow{n_2} = (2, 3, 0)$
- $\overrightarrow{n_1} = k\overrightarrow{n_2} \Longleftrightarrow \frac{m}{2} = \frac{-1}{3} = \frac{2}{0}$
  Como dicha condición no se satisface para ningún $k \in \mathbb{R}$, ambos vectores nunca son proporcionales, con lo cual, Π_1 y Π_2 son secantes y su intersección es una recta $\forall\, k \in \mathbb{R}$.

Opción B

Apartado b)

Para cualquier punto $P = (x, y, z)$ del plano se verificará que $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ estarán alineados. Es decir:

Opción B

Apartado b)

Para cualquier punto $P = (x, y, z)$ del plano se verificará que $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ estarán alineados. Es decir:

$$\Pi : [\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0 \Longleftrightarrow \Pi : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Opción B

Apartado b)

Para cualquier punto $P = (x, y, z)$ del plano se verificará que $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ estarán alineados. Es decir:

$$\Pi : [\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0 \Longleftrightarrow \Pi : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Pi : -x + z = 0$$

Opción B

Apartado c)

El punto simétrico de $P = (1, 2, 3)$ es el punto P' que pertenece a la recta s perpendicular a Π pasando por P. Si $Q = s \cap \Pi$ entonces $\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{PQ}$

Opción B

Apartado c)

El punto simétrico de $P = (1, 2, 3)$ es el punto P' que pertenece a la recta s perpendicular a Π pasando por P. Si $Q = s \cap \Pi$ entonces $\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{PQ}$

1. La recta s tiene por vector director $\overrightarrow{u_s}$ al vector normal a Π, es decir

   $$\overrightarrow{u_s} = (-1, 0, 1).$$

Opción B

Apartado c)

El punto simétrico de $P = (1, 2, 3)$ es el punto P' que pertenece a la recta s perpendicular a Π pasando por P. Si $Q = s \cap \Pi$ entonces $\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{PQ}$

1. La recta s tiene por vector director $\overrightarrow{u_s}$ al vector normal a Π, es decir $\overrightarrow{u_s} = (-1, 0, 1)$. Por tanto $s : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$

Opción B

Apartado c)

El punto simétrico de $P=(1,2,3)$ es el punto P' que pertenece a la recta s perpendicular a Π pasando por P. Si $Q=s\cap\Pi$ entonces $\overrightarrow{PP'}=2\overrightarrow{PQ}$

1. La recta s tiene por vector director $\overrightarrow{u_s}$ al vector normal a Π, es decir $\overrightarrow{u_s}=(-1,0,1)$. Por tanto $s:\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=2 \\ z=3+\lambda \end{cases}$
2. Sea $Q=s\cap\Pi$:

Opción B

Apartado c)

El punto simétrico de $P = (1, 2, 3)$ es el punto P' que pertenece a la recta s perpendicular a Π pasando por P. Si $Q = s \cap \Pi$ entonces $\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{PQ}$

1. La recta s tiene por vector director $\overrightarrow{u_s}$ al vector normal a Π, es decir $\overrightarrow{u_s} = (-1, 0, 1)$. Por tanto $s : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$
2. Sea $Q = s \cap \Pi$:

$$\left.\begin{array}{l} Q \in s \implies Q = (1-\lambda, 2, 3+\lambda) \\ Q \in \Pi \implies -(1-\lambda) + 3 + \lambda = 0 \end{array}\right\} \implies 2 + 2\lambda = 0 \implies \lambda = -1$$

Opción B

Apartado c)

El punto simétrico de $P=(1,2,3)$ es el punto P' que pertenece a la recta s perpendicular a Π pasando por P. Si $Q=s\cap\Pi$ entonces $\overrightarrow{PP'}=2\overrightarrow{PQ}$

1. La recta s tiene por vector director $\overrightarrow{u_s}$ al vector normal a Π, es decir $\overrightarrow{u_s}=(-1,0,1)$. Por tanto $s:\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=2 \\ z=3+\lambda \end{cases}$
2. Sea $Q=s\cap\Pi$:

$$\left.\begin{array}{l} Q\in s \implies Q=(1-\lambda,2,3+\lambda) \\ Q\in\Pi \implies -(1-\lambda)+3+\lambda=0 \end{array}\right\} \implies 2+2\lambda=0 \implies \lambda=-1$$

Por tanto, $Q=(2,2,2)$

Opción B

Apartado c)

El punto simétrico de $P=(1,2,3)$ es el punto P' que pertenece a la recta s perpendicular a Π pasando por P. Si $Q = s \cap \Pi$ entonces $\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{PQ}$

1. La recta s tiene por vector director $\overrightarrow{u_s}$ al vector normal a Π, es decir $\overrightarrow{u_s} = (-1,0,1)$. Por tanto $s : \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2 \\ z = 3+\lambda \end{cases}$
2. Sea $Q = s \cap \Pi$:
$$\left.\begin{array}{l} Q \in s \implies Q = (1-\lambda, 2, 3+\lambda) \\ Q \in \Pi \implies -(1-\lambda)+3+\lambda = 0 \end{array}\right\} \implies 2+2\lambda = 0 \implies \lambda = -1$$
Por tanto, $Q = (2,2,2)$
3. Si $P' = (x', y', z')$, de $\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{PQ}$:

Opción B

Apartado c)

El punto simétrico de $P=(1,2,3)$ es el punto P' que pertenece a la recta s perpendicular a Π pasando por P. Si $Q=s\cap\Pi$ entonces $\overrightarrow{PP'}=2\overrightarrow{PQ}$

1. La recta s tiene por vector director $\overrightarrow{u_s}$ al vector normal a Π, es decir $\overrightarrow{u_s}=(-1,0,1)$. Por tanto $s:\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=2 \\ z=3+\lambda \end{cases}$
2. Sea $Q=s\cap\Pi$:
$$\left.\begin{array}{l} Q\in s \implies Q=(1-\lambda,2,3+\lambda) \\ Q\in\Pi \implies -(1-\lambda)+3+\lambda=0 \end{array}\right\} \implies 2+2\lambda=0 \implies \lambda=-1$$
Por tanto, $Q=(2,2,2)$
3. Si $P'=(x',y',z')$, de $\overrightarrow{PP'}=2\overrightarrow{PQ}$:
$$\left.\begin{array}{l} x'-1=2(2-1) \\ y'-2=2(2-2) \\ z'-3=3(3-2) \end{array}\right\} \implies P'=(3,2,0)$$

Opción B