Ejercicios de Geometría Analítica en el Espacio (I)

Ejercicio 1 *a)* *Sea* $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u} = (1, a, 2), \overrightarrow{v} = (a, 3, 1), \overrightarrow{w} = (1, 1, 1)\}$ *un sistema de vectores. Determinar para qué valores de* a *el conjunto* $\mathcal{B}$ *es una base de* $\mathbb{R}^3$.

b) *Para* $a = 0$, *determinar las coordendas de* $(3, 2, -1)$ *en la base* $\mathcal{B}$.

Ejercicio 2 *Si el conjunto* $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ *es una base de* $\mathbb{R}^3$, *¿es también una base de* $\mathbb{R}^3$ *el conjunto* $\mathcal{B}' = \{2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}, 3\overrightarrow{w}\}$*?. Justifica la respuesta.*

Ejercicio 3 *Sea* $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u} = (1, 1, 2), \overrightarrow{v} = (2, -3, 1), \overrightarrow{w} = (-5, 15, 2)\}$. *¿Es posible expresar el vector* $(1, 1, 9)$ *como combinación lineal de los elementos de* $\mathcal{B}$*?. Justifica la respuesta.*

Ejercicio 4 *Sea* $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u_1} = (1, 1, 2), \overrightarrow{u_2} = (1, 1, -1), \overrightarrow{u_3} = (-5, 1, 2), \overrightarrow{u_4} = (0, 1, 2)\}$. *¿Es posible expresar el vector* $(1, 1, 9)$ *como combinación lineal de los elementos de* $\mathcal{B}$*?. ¿Es dicha combinación lineal única?. Justifica las respuestas.*

Ejercicio 5 *Si* $|\overrightarrow{u}| = 6$, $|\overrightarrow{v}| = 10$, *y* $|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}| = 14$:

a) *Calcula el ángulo formado por* $\overrightarrow{u}$ *y* $\overrightarrow{v}$.

b) *Calcula* $|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}|$.

c) *Calcula el ángulo formado por los vectores* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ *y* $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.

Ejercicio 6 *Si* $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = 20$, *y* $|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}| = 4$, *calcula* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$

Ejercicio 7 *Dados* $\overrightarrow{u} = (1, 0, 2)$ *y* $\overrightarrow{v} = (2, 1, -2)$, *calcular el ángulo formado por los vectores* $\overrightarrow{u}$ *y* $\overrightarrow{v}$, *y el vector proyección de* $\overrightarrow{u}$ *sobre* $\overrightarrow{v}$.

Ejercicio 8 *Dado el vector libre* $\overrightarrow{u} = (1, -2, 1)$:

a) *Determinar el valor del parámetro* k *para que* $\overrightarrow{v} = (k, 1, 1)$ *sea ortogonal a* $\overrightarrow{u}$.

b) *Calcular un vector* $\overrightarrow{w}$ *para que el sistema* $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ *sea una base ortogonal de* $\mathbb{R}^3$ *orientada positivamente.*

c) *Obtener a partir de los vectores anteriores una base ortonormal de* $\mathbb{R}^3$ *orientada positivamente.*

Ejercicio 9 *Calcula el valor de* k *para que los puntos* $A = (1, 0, 1)$, $B = (1, 1, 1)$, *y* $C = (1, 6, k)$ *sean los vértices de un triángulo de área* $\frac{3}{2}\,u^2$

Ejercicio 10 *Dados* $A = (0, 2, 1)$, $B = (2, 1, 4)$ *y* $C = (1, 1, -1)$:

a) *Obtener las coordenadas del punto* D *para que* $ABCD$ *sea un paralelogramo con* $AB \parallel CD$, *y* $BC \parallel AD$.

b) *Calcular el área de dicho paralelogramo.*

c) *Determinar el ángulo formado por el lado* AB *y el lado* BC.

d) *Encontrar las coordenadas de los puntos que dividen a la diagonal AC en tres partes iguales.*

Ejercicio 11 *Si el producto mixto de los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, y $\overrightarrow{w}$ es $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = -4$, calcular:*

a) $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})$

b) $(2\overrightarrow{u}, 3\overrightarrow{v}, -4\overrightarrow{w})$

c) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} + \overrightarrow{u})$

d) $(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, 2\overrightarrow{w} + 3\overrightarrow{u})$

e) *Calcular el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $2\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$*

Ejercicio 12 *Dados los puntos $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (1, 1, 1)$, y $D = (1, 1, 2)$:*

a) *Calcula el volumen del tetraedro de vértices A, B, C, y D.*

b) *Dado el punto $E = (1, k, k+3)$, determina el valor del parámetro k para que los puntos A, B, D y E sean coplanarios.*

c) *Determinar la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y D.*

Ejercicio 13 *a)* *Halla el valor de m para que los puntos $A = (1, 3, -1)$, $B = (1, 5, 4)$, $C = (m, 2, 0)$ y $D = (2, 0, 2)$ sean coplanarios.*

b) *Halla la ecuación del plano que contiene a los puntos anteriores.*

c) *Halla los valores de m para que los anteriores puntos A, B, C y D del apartado formen un tetraedro de volumen $7\,u^3$.*

Ejercicio 14 *Determinar las ecuaciones de la recta en los siguientes casos:*

a) *Pasa por los puntos $(1, 2, 1)$ y $(-3, 4, 1)$.*

b) *Pasa por el punto $(1, 1, 1)$, y tiene por vector director al vector $(3, 0, 1)$.*

c) *Pasa por el punto $(9, 1, 2)$ y es perpendicular al plano $\pi : -x + 3y + z = 2$*

d) *Pasa por el punto $A = (0, 1, 0)$ y es perpendicular al plano que pasa por $B = (3, 1, 2)$, $C = (1, 3, 1)$ y $D = (0, 4, 1)$*

Ejercicio 15 *Determinar el vector director de la recta* $r : \left\{ \begin{array}{lcl} x + y - z & = & 0 \\ x + y & = & 1 \end{array} \right.$

Ejercicio 16 *Hallar el área total, y el volumen del tetraedro de vértices el origen de coordenadas, y los puntos de intersección del plano $\pi : 3x - 5y + z = 12$ con los ejes de coordenadas.*

Ejercicio 17 *Determinar la ecuación del plano en cada caso:*

a) *Pasa por los puntos $(2, 0, 0)$, $(1, 1, 3)$, $(0, 0, 4)$, y $(1, -1, 1)$*

b) *Pasa por $(2, 3, 1)$ y es paralelo al plano $x - 3y + z = 6$.*

c) *Pasa por* $(1,4,1)$ *y es perpendicular a la recta de ecuación* $r : \begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$

d) *Pasa por* $(0,4,3)$, *y contiene a la recta* $r : \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{3} = z$

e) *Pasa por* $(1,2,3)$ *y* $(0,3,0)$, *y es paralelo a la recta* $r : \begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 5\lambda \end{cases}$

f) *Tiene por ecuaciones paramétricas* $\pi : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda + \mu \\ y = -3 - \lambda + 2\mu \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$

g) *Pasa por* $P = (6,1,2)$ *y* $Q = (0,1,2)$ *y es perpendicular al plano* $\pi : x - 2y - 2z - 1 = 0$.

Ejercicio 18 *Sean* $A = (1,0,-1)$ *y* $B = (t,3,0)$ *dos puntos del espacio. Determinar* t *para que la recta que pasa por* A *y* B *sea paralela al plano* $\pi : 2x - y + 4z - 1 = 0$.

Ejercicio 19 *Un plano tiene por vectores directores a* $\overrightarrow{u} = (1,3,2)$ *y* $\overrightarrow{v} = (-1,0,2)$. *¿Pueden los vectores* $\overrightarrow{u^*} = (3,6,2)$ *y* $\overrightarrow{v^*} = (0,3,4)$ *vectores directores de dicho plano también?. Justifica la respuesta.*

Ejercicio 20 *Calcula el punto simétrico de* $P = (1,2,5)$ *respecto de:*

a) *El plano de ecuación* $\pi : 2x - y + z = 3$

b) *La recta de ecuación* $r : \begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ -3x + y + z = 0 \end{cases}$

Ejercicio 21 *Sean los puntos* $A = (2,3,0)$ *y* $B = (-2,1,4)$. *Determina:*

a) *La ecuación del plano* π *mediatriz del segmento* AB.

b) *El volumen del tetraedro formado por el plano* π *y los tres planos coordenados.*

c) *Las ecuaciones de la recta perpendicular al plano* π *que pasa por el origen de coordenadas.*

Ejercicio 22 *Sea el plano* $\pi : x + 2y + 3z = 6$:

a) *Halla el punto simétrico del* $(0,0,0)$ *respecto de* π.

b) *Halla el plano perpendicular a* π *que contiene al eje* OZ.

Ejercicio 23 *Para cada valor de* a *los puntos* $P = (1,2,3)$ *y* $A = (0,1,a)$ *son simétricos respecto a un plano.*

a) *Halla, de forma razonada, la ecuación de dicho plano en función del valor de* a.

b) *Encuentra la ecuación del plano para el caso* $a = 2$.