

Bloque de Geometría

Ejercicio 1 (Junio 2019. Opción A)

Se pide:

a) Calcular el ángulo del intervalo $[0^\circ, 90^\circ]$ que forman los vectores $\vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y $\vec{v} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

b) Obtener la ecuación implícita del plano que pasa por el punto $P = (1, -3, 0)$ y es perpendicular a la recta $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$

c) Calcular la distancia del punto $Q = (1, 1, 1)$ al plano $\pi : -x + y + z + 4 = 0$, y el punto simétrico de Q respecto de π .

Ejercicio 2 (Junio 2019. Opción B)

Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1 : mx - y + 2 = 0$ y $\pi_2 : 2x + 3y = 0$ en función del parámetro m .

b) Obtén la ecuación implícita del plano que pasa por $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 1)$ y $C = (0, 1, 0)$

c) Calcula el punto simétrico del punto $P = (1, 2, 3)$ con respecto al plano $\pi : -x + z = 0$

Ejercicio 3 (Julio 2019. Opción A)

Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1 : x + my + z + 2 = 0$ y $\pi_2 : mx + y + z + m = 0$ en función de m .

b) Calcular el valor que deben tomar k y m para que $A = (0, k, 1)$, $B = (-1, 2, 1)$ y $C = (8, 1, m)$ estén alineados.

c) Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por $P = (-1, 2, 1)$ y $Q = (8, 1, 1)$, y la ecuación implícita del plano perpendicular a r que pasa por el punto $R = (1, 1, 1)$

Ejercicio 4 (Julio 2019. Opción B)

Se pide:

a) Para el plano $\pi : 3x + 2y - z = 0$ y la recta $r : \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$, calcular el punto de corte de r con π , y obtener la ecuación implícita del plano π^* perpendicular a π y que contiene a r .

b) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1 : 2x - 5y - 4z - 9 = 0$ y $\pi_2 : x = 0$, y calcular el ángulo $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ]$ que forman.

Ejercicio 5 (Junio 2018. Opción A)

a) Determina el valor de λ para que $A = (3, 0, -1)$, $B = (2, 2, -1)$, $C = (1, -2, -5)$, y $D = (\lambda, 6, -1)$ sean coplanarios, y calcula la ecuación general o implícita del plano que los contiene.

b) Determina la posición relativa del plano $\pi : 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ y la recta r que pasa por los puntos $P = (-4, 4, 2)$ y $Q = (4, 8, -4)$. Si se cortan, calcula el punto de corte.

c) Calcula el punto simétrico del punto $P = (-4, 4, 2)$ respecto del plano de ecuación $\pi : 4x + 2y - 3z - 15 = 0$

Ejercicio 6 (Junio 2018. Opción B)

a) Dado el plano $\pi : 2x - y - 2z - 3 = 0$, calcula el valor de a para que la recta r que pasa por los puntos $P = (a, a, a)$ y $Q = (1, 3, 0)$ sea paralela al plano π .

b) Para $a = 1$, calcula la distancia de r a π .

c) Para $a = 1$, calcula la ecuación implícita o general del plano que es perpendicular a π y contiene a r .

Ejercicio 7 (Septiembre 2018. Opción A)

Dada la recta $r : \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$

a) Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por el punto $A = (1, 1, 1)$ y es perpendicular a r .

b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $P = (-1, 0, 6)$ y $Q = (3, -2, 4)$ y es paralelo a la recta r .

c) Calcula la distancia de la recta r al plano $x + y + z - 5 = 0$

Ejercicio 8 (Septiembre 2018. Opción B)

Sea r la recta que pasa por los puntos $P = (9, 4, 1)$ y $Q = (1, 1, 1)$. Dada la recta de ecuación $s : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-1}$

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s . Calcula, si se cortan, el punto de corte.

b) Calcula, si existe, la ecuación implícita o general del plano que contiene a las rectas r y s .

c) Calcula la distancia del punto $(0, 0, 0)$ a la recta s .

Ejercicio 9 (Junio 2017. Opción A)

Dados los planos $\pi_1 : x + y - z + 2 = 0$, $\pi_2 : \begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = \lambda + 3\mu \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de π_1 y π_2 . Si se cortan, calcula el ángulo que forman.

b) Sea r la recta que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y es perpendicular a π_1 . Calcula el punto de corte de r y π_1 .

c) *Calcula el punto simétrico de $P = (1, 1, 1)$ respecto al plano π_1 .*

Ejercicio 10 (Junio 2017. Opción B)

Sea r la recta que pasa por los puntos $P = (1, 0, 5)$ y $Q = (5, 2, 3)$.

a) *Calcula la distancia del punto $A = (5, -1, 6)$ a la recta r .*

b) *Calcula la ecuación implícita o general del plano que es perpendicular a r y que pasa por el punto $A = (5, -1, 6)$.*

c) *Calcula el área del triángulo de vértices los puntos $P = (1, 0, 5)$, $A = (5, -1, 6)$, y el punto de corte de r con el plano $\pi : 2x + y - z - 3 = 0$*

Ejercicio 11 (Septiembre 2017. Opción A)

Sea r la recta que pasa por los puntos $(0, 1, 3)$ y $(1, 1, 1)$, y la recta $s : \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

a) *Estudia su posición relativa.*

b) *¿Es s paralela al plano YZ ? ¿Está contenida en dicho plano?*

c) *Calcula la distancia de la recta r al plano $\pi : 2x + z = 0$*

Ejercicio 12 (Septiembre 2017. Opción B)

Dados los planos $\alpha : 2x - 2y + 4z - 7 = 0$, $\beta : \begin{cases} x = 1 - \lambda + 3\mu \\ y = 5 + \lambda + \mu \\ z = 4 + \lambda - \mu \end{cases}$, y r la recta de

ecuación $r : \begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases}$

a) *Estudia la posición relativa de los planos α y β , y calcula la distancia entre ellos.*

b) *Calcula la ecuación implícita o general del plano que es perpendicular a α y contiene a r .*

c) *Sean P y Q los puntos de corte de la recta r con los planos XY e YZ respectivamente. Calcula la distancia entre P y Q .*

Ejercicio 13 (Junio 2016. Opción A)

a) *Calcula el valor de m para que $A = (m, -1, m)$, $B = (1, -5, -1)$, $C = (3, 1, 0)$, y $D = (2, -1, 0)$ estén en el mismo plano. Calcula la ecuación general o implícita de dicho plano.*

b) *Calcula el ángulo que forman el plano $\pi : 2x - y + 2z - 5 = 0$ y la recta r que pasa por $P = (3, -4, -7)$ y $Q = (1, -3, -9)$.*

c) *Calcula los puntos de la recta r del apartado anterior que distan 9 unidades de π .*

Ejercicio 14 (Junio 2016. Opción B)

Dada la recta $r : \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$

a) *Calcula la ecuación implícita o general del plano π que pasa por $P = (2, 5, -2)$, y es perpendicular a la recta r .*

b) *Estudia la posición relativa de la recta r y la recta s que pasa por $P = (2, 5, -2)$ y $Q = (-1, 4, 2)$.*

c) *Calcula el punto de la recta r que equidista de $P = (2, 5, -2)$ y $Q = (-1, 4, 2)$*

Ejercicio 15 (Septiembre 2016. Opción A)

Dados los planos $\pi_1 : 3x + 3z - 8 = 0$, $\pi_2 : \begin{cases} x = \frac{5}{2} + \lambda - \mu \\ y = -\lambda + \mu \\ z = 3 + 2\lambda + \mu \end{cases}$

a) *Calcula el ángulo que forman π_1 y π_2 . Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(0, 0, 0)$ y es paralela a π_1 y π_2 .*

b) *Calcula el punto simétrico de $(0, 0, 0)$ respecto al plano π_1*

Ejercicio 16 (Septiembre 2016. Opción B)

Dadas las rectas $r : \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{3}$, $s : \begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0 \\ 2y + 4z + 3 = 0 \end{cases}$

a) *Estudia su posición relativa.*

b) *Calcula la ecuación implícita o general del plano que contiene a r y es paralelo a s .*

c) *Calcula la distancia entre r y s .*

Ejercicio 17 (Junio 2015. Opción A)

Dada la recta $r : \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$

a) *Determina la ecuación implícita del plano π que pasa por el punto $P = (2, 1, 2)$ y es perpendicular a r . Calcula el punto de intersección de r y π .*

b) *Calcula la distancia del punto $P = (2, 1, 2)$ a la recta r .*

c) *Calcula el punto simétrico de $P = (2, 1, 2)$ respecto a la recta r .*

Ejercicio 18 (Junio 2015. Opción B)

Dadas las rectas $r : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$, $s : \frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{4}$

a) *Estudia su posición relativa. Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas r y s .*

b) *Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que corta perpendicularmente a las rectas r y s .*

Ejercicio 19 (Septiembre 2015. Opción A)

Dada la recta $r : \begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \end{cases}$

- a) Calcula la ecuación implícita o general del plano que es paralelo a r y que pasa por los puntos $A = (0, 1, 2)$ y $B = (5, 3, 1)$.
- b) Calcula el punto de corte de r con el plano perpendicular a r y que pasa por $B = (5, 3, 1)$.
- c) Calcula la ecuación implícita o general del plano que es paralelo a $\pi : 2x - 3y + 4z - 5 = 0$ y está a $\sqrt{29}$ unidades de distancia de r .

Ejercicio 20 (Septiembre 2015. Opción B)

Dadas las rectas $r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$, $s : \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$

- a) Estudia la posición relativa de r y s . Calcula la distancia entre r y s .
- b) Si dos de los lados de un rectángulo están sobre las rectas r y s , y dos vértices consecutivos del rectángulo son el punto $A = (0, 1, 1)$ y el punto $B = (0, 4, 4)$, calcula las coordenadas de los otros dos vértices, y el área del rectángulo.

Ejercicio 21 (Junio 2014. Opción A)

- a) Calcula el punto simétrico del punto $P = (-2, 0, 2)$ respecto al plano π de ecuación $\pi : 3x + 2y + z - 3 = 0$.
- b) Sea r la recta perpendicular al plano $\pi : 3x + 2y + z - 3 = 0$, y que pasa por $P = (-2, 0, 2)$. Consideremos la recta $s : \begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ x - z - 10 = 0 \end{cases}$. Estudia la posición relativa de r y s . Calcula la ecuación del plano paralelo a s que contiene a r .

Ejercicio 22 (Junio 2014. Opción B)

- a) Define el producto vectorial de dos vectores.
Dados los vectores $\vec{u} = (2, 2, 0)$ y $\vec{v} = (1, 1, -1)$, calcula los vectores unitarios y perpendiculares a los dos vectores \vec{u} y \vec{v} .
- b) Calcula el valor de a para que la recta $r : \frac{x}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-2}{-4}$ no corte al plano π de ecuación $\pi : 5x + ay + 4z = 5$. Para ese valor de a , calcula la distancia de la recta al plano π .

Ejercicio 23 (Septiembre 2014. Opción A)

Dado el plano $\pi : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda - \mu \\ y = 1 - 2\lambda + \mu \\ z = 4 + 3\mu \end{cases}$ y la recta $r : \begin{cases} x + z - 4 = 0 \\ y = 3 \end{cases}$

- a) Estudia la posición relativa de π y r . Si se cortan, calcula el punto de corte.
- b) Calcula el ángulo que forman π y r . Calcula el plano que contiene a r y es perpendicular a π .

Ejercicio 24 (Septiembre 2014. Opción B)

Dadas las rectas $r : \begin{cases} x + y - 2z - 5 = 0 \\ y - 5z - 1 = 0 \end{cases}$ y $s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 5 \end{cases}$

- Estudia la posición relativa. Si se cortan, calcula el punto de corte.
- Calcula la ecuación general o implícita, y las ecuaciones paramétricas, del plano que contiene a las rectas r y s .
- Calcula la distancia del punto $Q = (1, 1, 4)$ a la recta s .

Ejercicio 25 (Junio 2013. Opción A)

Dado el plano $\pi : x + y - z - 1 = 0$ y la recta $r : \begin{cases} 3x + y + z - 6 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$

- Estudia la posición relativa de r y π . Calcula la distancia de r a π .
- Calcula la ecuación general o implícita del plano que contiene r y es perpendicular al plano π .

Ejercicio 26 (Junio 2013. Opción B)

- Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano π determinado por los puntos $A = (1, 0, 2)$, $B = (2, 1, 3)$ y $C = (3, 0, 0)$.
- Calcula los posibles valores de a para que el punto $P = (a, a, a)$ equidiste de la recta r y el plano π del apartado anterior.

Ejercicio 27 (Septiembre 2013. Opción A)

Dadas las rectas $r : \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ 2y - z - 2 = 0 \end{cases}$ y $s : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

- Estudia la posición relativa de r y s . Si se cortan, calcula el punto de corte. Si determinan un plano, calcula la ecuación general o implícita de ese plano.
- Estudia la posición relativa de r y el plano $\pi : 4x - 4y + 2z + 7 = 0$. Calcula la distancia de r a π .

Ejercicio 28 (Septiembre 2013. Opción B)

- Dado el plano $\alpha : \begin{cases} x = 3 + 3\lambda + \mu \\ y = -3\lambda + \mu \\ z = 3 + \lambda - \mu \end{cases}$, calcula las ecuaciones en forma continua de la recta r que pasa por el punto $P = (2, -3, -4)$ y es perpendicular al plano α . Calcula el punto de corte de r con α .

- Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $P = (2, -3, -3)$ y $Q = (3, -2, -4)$, y es perpendicular al plano α .

- c) *Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta intersección del plano β de ecuación $\beta : 5x - 4y + z - 19 = 0$ con el plano α .*

Ejercicio 29 (Junio 2012. Opción A)

Dados los puntos $A = (3, 0, 2)$, $B = (1, -2, 0)$, $C = (1, -1, 3)$ y $D = (\lambda, \lambda - 2, -\lambda)$.

- a) *Determina el valor de λ para que los puntos A , B , C , y D sean coplanarios. ¿Para algún valor de λ son A , B , C y D los vértices de un paralelogramo?*
- b) *Calcula las ecuaciones paramétricas del plano π que pasa por el punto C y es perpendicular a la recta r que pasa por los puntos A y B .*

Ejercicio 30 (Junio 2012. Opción B)

- a) *Si $|\vec{v}| = 6$, $|\vec{w}| = 10$, y $|\vec{v} + \vec{w}| = 14$, calcula el ángulo que forman los vectores \vec{v} y \vec{w} .*

- b) *Calcula las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano que pasa por los puntos $A = (-1, 5, 0)$ y $B = (0, 1, 1)$, y es paralelo a la recta $r : \begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ 2y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$*

Ejercicio 31 (Septiembre 2012. Opción A)

Dado el plano $\pi : x - 2y + 3z + 6 = 0$

- a) *Calcula el área del triángulo de vértices los puntos de corte de π con los ejes de coordenadas.*
- b) *Calcula la ecuación general del plano que es perpendicular al plano π , paralelo a la recta que pasa por los puntos $B = (0, 3, 0)$ y $C = (0, 0, 2)$, y que pasa por el origen de coordenadas.*
- c) *Calcula el punto simétrico del origen de coordenadas respecto al plano de ecuación $\pi : x - 2y + 3z + 6 = 0$*

Ejercicio 32 (Septiembre 2012. Opción B)

- a) *Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1 : x + y + z - 5 = 0$, $\pi_2 : \begin{cases} x = 3 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 - \lambda - \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}$.*

Si se cortan en una recta, escribe las ecuaciones paramétricas de la misma.

- b) *Calcula la ecuación del plano π_3 , que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a π_1 y π_2 . Calcula la intersección de π_1 , π_2 y π_3*

Ejercicio 33 (Junio 2011. Opción A)

- a) *¿Son coplanarios los puntos $A = (1, 0, 2)$, $B = (0, -1, 1)$, $C = (-1, -2, 0)$ y $D = (0, 2, 2)$? Si existe, calcula la ecuación del plano que los contiene.*

- b) *Calcula la ecuación general y las ecuaciones paramétricas del plano que es perpendicular al plano $\alpha : 2x + y - 3z + 4 = 0$, y contiene a la recta que pasa por $P = (-1, 1, 2)$ y $Q = (2, 3, 6)$*

Ejercicio 34 (Junio 2011. Opción B)

- a) Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto $P = (1, 2, -3)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $r : \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ 3x - z + 1 = 0 \end{cases}$
- b) Calcula la distancia d del punto $Q = (-1, 0, -2)$ al plano $\beta : x - 2y + 3z + 12 = 0$. Calcula, si existe, otro punto de la recta r que también diste d unidades del plano β .

Ejercicio 35 (Septiembre 2011. Opción A)

- a) Dado el plano $\pi : \begin{cases} x = 2 - \lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$, calcula la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P = (1, -2, 1)$ y es perpendicular a π . Calcula el punto de intersección de r y π .
- b) ¿Están alineados los puntos $A = (2, 0, 3)$, $B = (0, 0, 1)$ $C = (2, 1, 5)$? Si no están alineados, calcula la distancia entre el plano que determinan, y el plano π del apartado a).

Ejercicio 36 (Septiembre 2011. Opción B)

- a) Estudia la posición relativa de la recta $r : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$, y la recta s que pasa por los puntos $P = (0, 2, 1)$ y $Q = (1, 1, 1)$. Calcula la distancia de r a s .
- b) Calcula la ecuación general del plano π que es paralelo a la recta r y que contiene a la recta s .

Ejercicio 37 (Junio 2010. Opción A)

Sea r la recta que pasa por el punto $P = (1, -1, -2)$ y es perpendicular al plano de ecuación $\alpha : x + 2y + 3z + 6 = 0$. Sea s la recta que pasa por los puntos $A = (1, 0, 0)$ y $B = (-1, -3, -4)$.

- a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s . Si se cortan, calcula el punto de corte.
- b) Calcula la distancia de $A = (1, 0, 0)$ al plano β que pasa por el punto $P = (1, -1, -2)$ y es paralelo al α

Ejercicio 38 (Junio 2010. Opción B)

Dada la recta $r : \begin{cases} y = 1 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}$

- a) Calcula la ecuación del plano α que pasa por el punto $Q = (0, 2, 2)$ y contiene a la recta r . Calcula el área del triángulo que tiene por vértices los puntos de intersección de α con los ejes de coordenadas.
- b) Calcula la ecuación general del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano α .

Ejercicio 39 (Septiembre 2010. Opción A)

Dada la recta $r : \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 3x + 5y + 3z - 7 = 0 \end{cases}$

- a) Calcula la ecuación general del plano π perpendicular a r y que pasa por $P = (2, -1, -2)$
- b) Calcula el punto Q en el que r corta a π . Calcula el ángulo que forma el plano π con cada uno de los planos coordenados.

Ejercicio 40 (Septiembre 2010. Opción B)

Dadas las rectas $r : \begin{cases} x = 3 - 3\lambda \\ y = -4\lambda \\ z = -6 \end{cases}$ y $s : \begin{cases} 4x - 3y - 12 = 0 \\ 5y - 4z - 4 = 0 \end{cases}$

- a) Estudia su posición relativa. Si se cortan, calcula el punto de corte, y el ángulo que forman.
- b) Calcula, si existe, el plano que las contiene.

Ejercicio 41 (Junio 2009. Opción 1)

Sea r la recta que pasa por $P = (0, 8, 3)$ y $Q = (2, 8, 5)$, y s la recta $s : \begin{cases} x - y + 7 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

- a) Estudia la posición relativa de r y s . Si se cortan, calcula el punto de corte.
- b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano que contiene a r y a s .

Ejercicio 42 (Junio 2009. Opción 2)

Sean π el plano que pasa por los puntos $A = (1, -1, 1)$, $B = (2, 3, 2)$, $C = (3, 1, 0)$, y r la recta dada por $r : \frac{x-7}{2} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+3}{2}$:

- a) Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π . Calcula el punto de intersección de r y π .
- b) Calcula los puntos de la recta r que distan 6 unidades del plano π .

Ejercicio 43 (Septiembre 2009. Opción 1)

Dados los planos $\pi_1 : x + y + z - 1 = 0$, $\pi_2 : y - z + 2 = 0$, y la recta $r : \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$

- a) Calcula el ángulo que forman π_1 y π_2 . Calcula el ángulo que forman r y π_1 .
- b) Estudia la posición relativa de la recta r y la recta intersección de los planos π_1 y π_2 .

Ejercicio 44 (Septiembre 2009. Opción 2)

a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $P = (2, 3, 5)$ y es perpendicular

al plano $\pi : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda + \mu \\ z = 2 + 3\lambda + \mu \end{cases}$

- b) Calcula la distancia de $P = (2, 3, 5)$ al plano π . Calcula el punto de π que está más próximo al punto P .

Ejercicio 45 (Junio 2008. Opción 1)

a) Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores tales que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$, $|\vec{u} - \vec{v}| = 5$. Calcula el ángulo que forman los vectores \vec{u} y \vec{v} . Calcula el producto mixto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}]$

b) Dadas las rectas $r : \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$, $s : \begin{cases} x = 1 + 6\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = -4\lambda \end{cases}$, estudia su posición relativa, y calcula la ecuación del plano que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y contiene a la recta r .

Ejercicio 46 (Junio 2008. Opción 2)

a) ¿Son coplanarios los puntos $A = (1, 0, 0)$, $B = (3, 1, 0)$, $C = (1, 1, 1)$ y $D = (3, 0, -1)$? En caso afirmativo, calcula la distancia del origen de coordenadas al plano que los contiene.

b) Calcula el punto simétrico de $P = (0, 0, 1)$ respecto del plano $\pi : x - 2y + 2z - 1 = 0$

Ejercicio 47 (Septiembre 2008. Opción 1)

a) Calcula la distancia del origen de coordenadas al plano que pasa por el punto $P = (1, 1, 2)$ y es perpendicular a la recta $r : \begin{cases} 4x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

b) Calcula el área del triángulo que tiene por vértices los puntos de intersección del plano $\pi : x - 2y + 2z - 3 = 0$ con los ejes de coordenadas.

Ejercicio 48 (Septiembre 2008. Opción 2)

a) Dados los planos $\pi_1 : x - 2y + 2z - 1 = 0$ y $\pi_2 : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda - 2\mu \\ z = 1 + \lambda - 3\mu \end{cases}$, estudia su posición relativa, y calcula la distancia entre ellos.

b) Dado el punto $P = (2, 1, 7)$, calcula su simétrico respecto al plano π_2

Ejercicio 49 (Junio 2007. Opción 1)

a) Los puntos $A = (1, 1, 0)$, $B = (0, 1, 1)$, y $C = (-1, 0, 1)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo $ABCD$. Calcula las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo.

b) Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto $B = (0, 1, 1)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $A = (1, 1, 0)$ y $C = (-1, 0, 1)$

Ejercicio 50 (Junio 2007. Opción 2)

Dadas las rectas $r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$, y $s : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$

a) Estudia su posición relativa.

b) Calcula la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

Ejercicio 51 (Septiembre 2007. Opción 1)

- a) Calcula m para que los puntos $A = (2, 1, -2)$, $B = (1, 1, 1)$ y $C = (0, 1, m)$ estén alineados.
- b) Calcula el punto simétrico del punto $P = (-2, 0, 0)$ respecto de la recta que pasa por A y B .

Ejercicio 52 (Septiembre 2007. Opción 2)

Dadas las rectas $r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-3}$, y $s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

- a) Estudia su posición relativa.
- b) Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s .

Ejercicio 53 (Junio 2006. Opción 1)

- a) Definición e interpretación geométrica del producto vectorial de dos vectores en \mathbb{R}^3 .
- b) Calcula los vectores unitarios y perpendiculares a $\vec{u} = (1, -2, 2)$ y $\vec{v} = (1, 0, 1)$.
- c) Calcula la distancia del origen de coordenadas al plano determinado por el punto $P = (1, 1, 1)$ y los vectores $\vec{u} = (1, -2, 2)$ y $\vec{v} = (1, 0, 1)$

Ejercicio 54 (Junio 2006. Opción 2)

Dado el plano $\pi : 2x + \lambda y + 3z = 0$, y la recta $r : \begin{cases} x + 2y - 2z + 6 = 0 \\ 7x - y - 2z = 0 \end{cases}$

- a) Calcula el valor de λ para que la recta r y el plano π sean paralelos. Para ese valor de λ , calcula la distancia entre r y π .
- b) ¿Para algún valor de λ la recta r está contenida en el plano π ? Justifica la respuesta.
- c) ¿Para algún valor de λ la recta r es perpendicular al plano π ? Justifica la respuesta.

Ejercicio 55 (Septiembre 2006. Opción 1)

- a) Dados los vectores $\vec{u} = (1, 0, -1)$ y $\vec{v} = (1, 1, 0)$, calcula los vectores unitarios de \mathbb{R}^3 ortogonales a los dos vectores dados.
- b) Sea π el plano determinado por el punto $P = (2, 2, 2)$ y los vectores \vec{u} y \vec{v} , calcula el ángulo que forma el plano π con la recta que pasa por los puntos $O = (0, 0, 0)$ y $Q = (2, -2, 2)$.
- c) Calcula el punto simétrico de $O = (0, 0, 0)$ respecto del plano $x - y + z - 2 = 0$

Ejercicio 56 (Septiembre 2006. Opción 2)

Los lados de un triángulo están sobre las rectas $r_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$, $r_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = -1 \end{cases}$,

$r_3 : \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

- a) *Calcula los vértices del triángulo. ¿Es un triángulo rectángulo?. Razona la respuesta.*
- b) *Calcula la ecuación del plano π que contiene al triángulo. Calcula la intersección del plano π con los ejes de coordenadas.*

Ejercicio 57 (Junio 2005)

- a) *Calcula la distancia entre las rectas $r : x = \frac{y-1}{3} = \frac{z-4}{7}$ y $s : x - 2 = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$*
- b) *Demuestra que los puntos $P = (0, 0, 4)$, $Q = (3, 3, 3)$, $R = (2, 3, 4)$ y $S = (3, 0, 1)$ son coplanarios, y determina la ecuación del plano que los contiene.*

Ejercicio 58 (Septiembre 2005)

- a) *¿Qué condición deben cumplir los coeficientes de las ecuaciones generales de dos planos para que estos sean perpendiculares?. Calcula el ángulo que forman los planos $\pi : 2x - y + z - 7 = 0$ y $\sigma : x + y + 2z = 11$*
- b) *Define producto mixto de tres vectores. ¿Puede ocurrir que el producto mixto de tres vectores sea cero sin que ninguno de ellos sea el vector nulo? Justifica la respuesta.*
Para los vectores en el espacio \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} tales que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$, y $|\vec{w}| = 5$, calcula los valores mínimo y máximo del valor absoluto de su producto mixto.

Ejercicio 59 (Junio 2004)

- a) *Distancia entre dos rectas que se cruzan.*

Calcula la distancia entre las rectas $r : \begin{cases} x = \alpha \\ y = -1 \\ z = 1 - \alpha \end{cases}$ y $s : \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = 2 \\ z = 2\beta \end{cases}$

- b) *Ángulo que forman dos rectas. Condición de perpendicularidad.*

Determinar el ángulo que forman la recta que pasa por $A = (1, 0, -1)$ y $B = (0, 1, -2)$, y la recta de ecuación $x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$

Ejercicio 60 (Septiembre 2004)

- a) *Comprueba que los puntos $A = (1, 0, 3)$, $B = (-2, 5, 4)$, $C = (0, 2, 5)$, y $D = (-1, 4, 7)$ son coplanarios. De todos los triángulos que se pueden construir teniendo como vértices tres de esos cuatro puntos, ¿cuál es el de mayor área?. Obtén el valor de dicha área.*
- b) *Halla la ecuación general del plano π que contiene a la recta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{2}$, y es paralelo a la recta s que pasa por los puntos $P = (2, 0, 1)$ y $Q = (1, 1, 1)$. Calcula la distancia de s a π .*

Ejercicio 61 (Junio 2003)

- a) *Determinar los valores de a y b , con $a > 0$, para que los vectores $\vec{v}_1 = (a, b, b)$, $\vec{v}_2 = (b, a, b)$, $\vec{v}_3 = (b, b, a)$ sean unitarios y ortogonales dos a dos.*

- b) Determinar el ángulo que forman $\pi : x + 2y - 3z + 4 = 0$ y $r : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3y + 2z = 12 \end{cases}$

Ejercicio 62 (Septiembre 2003)

- a) Dados los vectores $\vec{u}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 3, 2)$, $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$, y $\vec{v}_2 = (3, 8, 5)$, demostrar que \vec{u}_1 y \vec{u}_2 dependen linealmente de \vec{v}_1 y \vec{v}_2 .

Determinar la ecuación general del plano que pasa por el origen de coordenadas, y contiene a los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , y determina la posición relativa de los vectores \vec{u}_1 y \vec{u}_2 respecto a ese plano.

- b) Definición de producto escalar de dos vectores, e interpretación geométrica.

Determinar la ecuación que satisfacen los vectores ortogonales a la recta $r : \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$.

Interpretar geoméricamente el resultado obtenido.

Ejercicio 63 (Junio 2002)

- a) Calcula la distancia del plano $\pi : 4x - 10y + 2z = -1$ al plano $\sigma : \begin{cases} x = 2\lambda + 3\mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$
- b) Determina los vectores unitarios $\vec{v} = (a, b, c)$ (con $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$), que forman un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ radianes con el vector $\vec{u} = (1, 1, 1)$, y un ángulo $\frac{\pi}{4}$ con $\vec{w} = (2, 0, 2)$

Ejercicio 64 (Septiembre 2002)

- a) Dados los puntos $P = (3, 4, 1)$ y $Q = (7, 2, 7)$, determina la ecuación general del plano perpendicular al segmento \overline{PQ} , y que pasa por su punto medio.

- b) Definición e interpretación geométrica del producto vectorial de dos vectores.

Dados los vectores $\vec{u} = (-2, 0, 4)$ y $\vec{v} = (-1, 0, \alpha)$, ¿para qué valores de α el módulo del vector $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$ vale 4?

Ejercicio 65 (Junio 2001)

- a) Determinar la posición relativa de los planos $\pi : x - 2y + 3z = 4$, $\sigma : 2x + y + z + 1 = 0$, y $\phi : -2x + 4y - 6z = 0$.

- b) Determinar el ángulo que forman la recta r , que pasa por el punto $(1, -1, 0)$, y tal que su vector director es $\vec{v} = (-2, 0, 1)$, y la recta $s : \frac{x-7}{4} = \frac{y+6}{4} = \frac{z}{2}$

Ejercicio 66 (Septiembre 2001)

- a) Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores. Comprobar que si $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$, entonces $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

Calcular los vectores unitarios perpendiculares a $\vec{u} = (-3, 4, 1)$ y $\vec{v} = (-2, 1, 0)$

- b) Calcular la distancia entre las rectas r y s , con $r : x = 3y = 5z$, y s la recta que pasa por los puntos $A = (1, 1, 1)$ y $B = (1, 2, -3)$