1)

a) M NO INVERTIBLE $\Longleftrightarrow |M| = 0$

$$|M| = \begin{vmatrix} m+2 & 0 & m+1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ -1 & 0 & m+1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot(m+1)\begin{vmatrix} m+2 & m+1 \\ -1 & m+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (m+1)\cdot\left[(m+2)\underline{(m+1)} + \underline{(m+1)}\right] = (m+1)^2\left[m+2+1\right]$$

$$|M| = (m+1)^2\cdot(m+3) = 0 \Longleftrightarrow \boxed{m=-1 \text{ o } m=-3}$$

M es no invertible para $m=-1$ o $m=-3$

b) M simétrica $\Longleftrightarrow M = M^t \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} m+2 & 0 & m+1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ -1 & 0 & m+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+2 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ m+1 & 0 & m+1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow m+1=-1 \Longleftrightarrow m=-2$$

c) Para $m=-2$ $M = M^t$, por tanto $M + M^t = 2M$

Por tanto: $M^2 X M^{-1} + I = M + M^t \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow M^2 X M^{-1} + I = 2M \Longleftrightarrow M^2 X M^{-1} = 2M - I$$

$$\Longleftrightarrow M^2 X M^{-1}\cdot M = (2M - I)M \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow M^2 X = 2M^2 - M \Longleftrightarrow (M^2)^{-1}\cdot M^2 X = (M^2)^{-1}(2M^2 - M)$$

$$\Longleftrightarrow X = 2\cdot(M^2)^{-1}\cdot M^2 - (M^2)^{-1}\cdot M \Longleftrightarrow$$

$$X = 2I - (M^2)^{-1} M \Longleftrightarrow \boxed{X = 2I - M^{-1}}$$

$$(M^2)^{-1} = (M^{-1})^2$$

$$m=-2 \Longrightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}\left(\mathrm{Adj}(M)\right)^t = \frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = 2I - (M^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

d) $m=1 \Longrightarrow |M| = (m+1)^2(m+3) \overset{m=1}{=} 2^2 \cdot 4 = 2^4$

Como $2 \cdot M^{14} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, por propiedades de determinantes:

$$|2 \cdot M^{14}| = 2^3 \cdot |M^{14}| = 2^3 \cdot |M|^{14} = 2^3 \cdot (2^4)^{14} = 2^{59}$$

$$\boxed{|2M^{14}| = 2^{59}}$$

2) Matricialmente, el sistema se escribe

$$\begin{pmatrix} m & m & m^2 \\ 1 & m^2 & m^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

con $A = \begin{pmatrix} m & m & m^2 \\ 1 & m^2 & m^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} m & m & m^2 & m \\ 1 & m^2 & m^2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado si y solo si $\text{rango}(A) = 3$:

$\text{rango}(A) = 3 \Longleftrightarrow |A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & m & m^2 \\ 1 & m^2 & m^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{m \text{ en } F_1}{=} m \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m^2 & m^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= m\left[m^2+m^2+m-m^3-m^2-1\right] = m\left[-m^3+m^2+m-1\right] = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m^3-m^2-m+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ (m-1)(m^2-1)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow m=0 \text{ ó } m=1 \text{ ó } m=-1$$

$$|A| = m\left(-m^3+m^2+m-1\right) = -m(m-1)^2(m+1)$$

* Si $m \neq 0$, y $m \neq 1$, y $m \neq -1$, el sistema es compatible determinado, con solución única, que puede expresarse en función de m utilizando la regla de Cramer:

$$X = \frac{\begin{vmatrix} m & m & m^2 \\ 3 & m^2 & m^2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\cancel{m}\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 3 & m^2 & m^2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-\cancel{m}(m-1)^2(m+1)} =$$

$$= -\frac{\cancel{m^2}+3m+3m^2-3m^3-3-\cancel{m^2}}{(m-1)^2(m+1)} = \frac{3m^3-3m^2+3m-3}{(m-1)^2(m+1)}$$

$$= \frac{3(m^3-m^2+m-1)}{(m-1)^2(m+1)} = \frac{3(m-1)(m^2+1)}{(m-1)^2(m+1)} = \frac{3(m^2+1)}{(m-1)(m+1)}$$

$$m^3-m^2+m-1 = (m-1)(m^2+1)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} m & m & m^2 \\ 1 & 3 & m^2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3m+3m^2+m^3-3m^2-m-3m^3}{-m(m-1)^2(m+1)}=$$

$$=\frac{-2m^3+2m}{-m(m-1)^2(m+1)}=\frac{-2\cancel{m}\cancel{(m^2-1)}}{-\cancel{m}(m-1)\cancel{(m-1)}\cancel{(m+1)}}=\frac{2}{m-1}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} m & m & m \\ 1 & m^2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3m^3+m+3m-m^3-3m-3m}{-m(m-1)^2(m+1)}=$$

$$=\frac{2m^3-2m}{-m(m-1)^2(m+1)}=-\frac{2\cancel{m}\cancel{(m^2-1)}}{\cancel{m}(m-1)\cancel{(m-1)}\cancel{(m+1)}}=-\frac{2}{m-1}$$

$$\text{Solución}=\left(\frac{3(m^2+1)}{m^2-1},\ \frac{2}{m-1},\ -\frac{2}{m-1}\right)$$

* CASO $m=0$:

$$\text{rango}\,A=\text{rango}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$$

$$\text{rango}\,A^*=\text{rango}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}=2$$

$$C_4=3C_1$$

Como rango A = rango A^* = $2<3$, por el Th. de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible indeterminado

$$\begin{cases} x = 3 \\ x+y+z = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y+z = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

Solución: $(3, \lambda, -\lambda)$ $\lambda \in \mathbb{R}$.

* CASO $m = 1$

$$\text{rango } A = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{rango } A^* = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Como rango $(A) <$ rango (A^*) por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es incompatible

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

* CASO $m = -1$:

$$\text{rango } (A) = \text{rango}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\text{rango } (A^*) = \text{rango}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} 2$$

$F_2 = F_3$

Por tanto, el sistema es compatible indeterminado:

$$\begin{cases} -x-y+z = -1 \\ x+y+z = 3 \end{cases} \xRightarrow{F_1+F_2 \to F_2} \begin{cases} -x-y+z = -1 \\ 2z = 2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ -x-y = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ y = -x+2 \end{cases}$$

Solución $(\lambda, -\lambda+2, 1)$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$\boxed{3}$

a) $\lim\limits_{x\to\pi}(1-\cos 2x)^{\operatorname{sen}x} = 0^0 = IND = L \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \ln L = \lim\limits_{x\to\pi} \ln\left((1-\cos 2x)^{\operatorname{sen}x}\right) = \lim\limits_{x\to\pi} \operatorname{sen}x \ln(1-\cos 2x) =$

$= 0\cdot(-\infty) = IND$:

L'Hôpital

$$\ln L = \lim_{x\to\pi} \frac{\ln(1-\cos 2x)}{\frac{1}{\operatorname{sen}x}} = \frac{-\infty}{\infty} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{\frac{2\operatorname{sen}(2x)}{1-\cos(2x)}}{\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{2\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}^2x}{-\cos x\,(1-\cos(2x))} = \lim_{x\to\pi} \frac{2\cdot 2\operatorname{sen}x\cdot\cos x\cdot\operatorname{sen}^2x}{-\cos x\cdot 2\operatorname{sen}^2x} =$$

$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}x\cos x$

$$\left.\begin{array}{l} 1=\cos^2x+\operatorname{sen}^2x \\ \cos(2x)=\cos^2x-\operatorname{sen}^2x \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{1-\cos(2x)=2\operatorname{sen}^2x}$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{-4\operatorname{sen}^3x\cdot\cos x}{2\cos x\cdot\operatorname{sen}^2x} = \lim_{x\to\pi} -2\cdot\operatorname{sen}x = 0$$

$$\Longrightarrow \ln L = 0 \Longrightarrow \boxed{L=e^0=1}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x)-e^x+kx}{x\operatorname{sen}(x)} = \dfrac{0}{0} = IND.$

L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)-e^x+kx}{x\operatorname{sen}(x)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-3\operatorname{sen}(3x)-e^x+k}{\operatorname{sen}x+x\cos x}$$

$= \dfrac{-1+k}{0}$ Para que dicho límite exista y sea un número real, necesariamente $k=1$

Para $k=1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)-e^{x}+x}{x\,\text{sen}x} \overset{L'Hôp}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-3\text{sen}(3x)-e^{x}+1}{\text{sen}x+x\cos x} \overset{L'Hôp}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-9\cos(9x)-e^{x}}{\cos x+\cos x-x\,\text{sen}x} = \frac{-10}{2} = \boxed{-5}$$

$\boxed{4}$ a) En $[-1,0]$, $f(x)=-\frac{1}{2}+e^{-x^2+x}$ es continua, con $f(-1)=-\frac{1}{2}+e^{-2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{e^2}<0$

$f(0)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}>0$, por tanto, por el Teorema de Bolzano, existe $c\in(-1,0)$ tal que $f(c)=0$

Veamos que c es único:

Supongamos que existe $d\in(-1,0)$, $d\neq c$ con $f(d)=0$, y sin pérdida de generalidad, supongamos que $c<d$. Se tiene que $f(x)=-\frac{1}{2}+e^{-x^2+x}$ es continua en $[c,d]$, derivable en (c,d), con $f(c)=f(d)$. Entonces, por el Teorema de Rolle, existe $\alpha\in(c,d)$ con $f'(\alpha)=0$

Pero $f'(x)=(-2x+1)e^{-x^2+x}=0 \Longleftrightarrow x=\frac{1}{2}$

y como $x=\frac{1}{2}\notin(c,d)$. Por tanto, la función tendría que contradecir al Teorema de Rolle, con lo cual, forzosamente d no puede existir

b) f es derivable al menos en $(-\infty,1)\cup(1,2)$

- Para que f sea continua en $x=1$:

$$f(1)=1^3+a\cdot 1^2+b=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)$$

Como $\lim_{x\to 1^+} f(x)=1+a+b$, y $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\frac{1}{2}$,

entonces $1+a+b=\frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{a+b=-\frac{1}{2}}$

- Suponiendo $a+b=-\frac{1}{2}$, (f continua en $x=1$),

f es derivable en $x=1$ si $\exists \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \underset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+}(3x^2+2ax)= 3+2a$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-}(-2x+1)e^{-x^2+x}=-1$$

Por tanto: $3+2a=-1 \Longrightarrow \boxed{a=-2}$

Como $a+b=-\frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{b=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}}$

d) f es continua en $[1,2]$ y derivable en $(1,2)$. Por el Teorema de Lagrange, existe $c\in(1,2)$ tal que

$f(2)-f(1)=f'(c)(2-1)$. Es decir, tal que $f'(c)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$, con lo cual, la recta tangente a $y=f(x)$ en $x=c$ es paralela a la secante que une $(1,f(1))$ con $(2,f(2))$

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{1} = 1 = f'(c)$$

$$f'(x) = 3x^2-4x = 1 \iff 3x^2-4x-1=0 \iff x = \frac{4 \pm \sqrt{16+12}}{6}$$

$$\iff x = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3} \implies c = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$$

$$f(c) = \left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)^3 - 2\cdot\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)^2 + \frac{3}{2} = \frac{50+19\sqrt{7}}{27} -$$

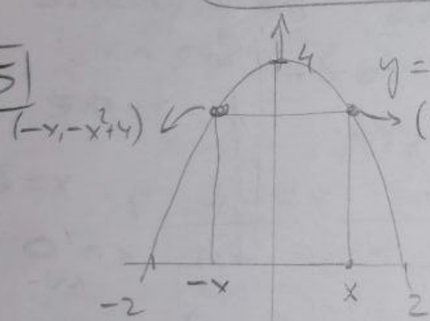
$$- \frac{2(11+4\sqrt{7})}{9} + \frac{3}{2} = \frac{100+38\sqrt{7}-12(11+4\sqrt{7})+81}{54}$$

$$\implies f(c) = \frac{49-10\sqrt{7}}{54}$$

Recta tangente: $\left(y - \frac{49-10\sqrt{7}}{54}\right) = 1\cdot\left(x - \frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)$

$$\implies \boxed{y = x + \frac{13-28\sqrt{7}}{54}}$$

$\boxed{5}$



$A(x) = 2x\cdot(-x^2+4)$

$\max A(x) = ?$

$x \in [0,2]$

$$A(x) = 2x(-x^2+4) = -2x^3+8x$$

$$A'(x) = -6x^2+8=0 \iff x^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \iff$$

$$\iff x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

SIGNO A': $-$, $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $+$, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $-$

$\boxed{x = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$ corresponde a la solución de área máxima.

$\Longrightarrow$ VÉRTICES: $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$, $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$

$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{8}{3}\right)$, $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{8}{3}\right)$

$\boxed{6}$ a) La recta tangente a la curva $y=f(x)$ en $x=-1$ tiene pendiente $f'(-1)=1$: $y-0=1\cdot(x-(-1)) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow y = x+1$

b) $f'>0$ en $(-2,0)\cup(2,3) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f$ crece en $(-2,0)\cup(2,3)$

$f'<0$ en $(-4,-2)\cup(0,2) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f$ decrece en $(-4,-2)\cup(0,2)$

f' presenta tres cambios de signo: en $x=-2$, $x=0$ y $x=2$. Según estos cambios de signo, f tiene mínimos relativos en $x=-2$ y $x=2$ y un máximo relativo en $x=0$

c) f' crece en $(-4,-1)\cup(1,3) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f$ convexa en $(-4,-1)\cup(1,3)$

(entendiendo $y=x^2$ como función convexa)

f' decrece en $(-1,1) \Longrightarrow f$ cóncava en $(-1,1)$

Como f cambia de convexa a cóncava en $x=-1$, y de cóncava a convexa en $x=1$, en $x=-1$ y $x=1$ hay puntos de inflexión

4e) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} + e^{-x^2+x} & \text{si } x < 1 \\ x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2} & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} (-2x+1)\,e^{-x^2+x} & \text{si } x < 1 \\ 3x^2 - 4x & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases}$

Búsqueda de puntos críticos:

1º) $(-2x+1)e^{-x^2+x} = 0 \Longleftrightarrow -2x+1 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2} < 1$

2º) $3x^2 - 4x = 0 \Longleftrightarrow x(3x-4) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$

Como $x=0 \notin [1,2)$, sólo tomamos $x = \frac{4}{3} \in [1,2)$

SIGNO f'

	$\frac{1}{2}$		1		$\frac{4}{3}$		2
$+$		$-$		$-$		$+$	

$f'(x) =$ $(-2x+1)\,e^{-x^2+x}$ (para $x < 1$) ; $3x^2-4x$ (para $1 \leq x < 2$)

Por tanto:

$f' > 0$ en $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{4}{3}, 2) \Longrightarrow f$ crece en $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{4}{3}, 2)$

$f' < 0$ en $(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}) \Longrightarrow f$ decrece en $(\frac{1}{2}, \frac{4}{3})$

Además: En $x = \frac{1}{2}$ f alcanza un máximo relativo, y en $x = \frac{4}{3}$ un mínimo relativo.

Estudio de la convexidad:

$$f''(x)=\begin{cases} -2e^{-x^2+x}+(-2x+1)^2e^{-x^2+x} & \text{si } x<1 \\ 6x-4 & \text{si } 1<x<2 \end{cases}$$

$$-2e^{-x^2+x}+(-2x+1)^2e^{-x^2+x}=\left[-2+(-2x+1)^2\right]e^{-x^2+x}=0$$

$$\iff -2+(-2x+1)^2=0 \iff -2+4x^2-4x+1=0$$

$$\iff 4x^2-4x-1=0 \iff x=\frac{4\pm\sqrt{16+16}}{8}$$

$$\iff x=\frac{4\pm4\sqrt{2}}{8}=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$$

$\frac{1+\sqrt{2}}{2}>1 \Longrightarrow$ sólo tenemos en cuenta $x=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

$6x-4=0 \iff x=\frac{2}{3}\notin(1,2)$

SIGNO f''

	$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$		1		2
$+$		$-$		$+$	

$(-2+(-2x+1)^2)e^{-x^2+x}$ $\qquad$ $6x-4$

$f''>0$ en $\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)\cup(1,2)\Longrightarrow f$ convexa en $\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)\cup(1,2)$

$f''<0$ en $\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2},1\right)\Longrightarrow f$ cóncava en $\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2},1\right)$

f tiene puntos de inflexión en $x=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ y en $x=1$