IES O COUTO. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Global 1ª Evaluación. Matemáticas II
13-12-2019. Tiempo estimado: 90 minutos

RESOLUCIÓN DEL EXAMEN

Solución del ejercicio 1

a) *Como* $B^t \cdot B^{40} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, *por las propiedades de los determinantes:*

$$|2 \cdot B^t \cdot B^{40}| = 2^3 \cdot |B^t \cdot B^{40}| = 8 \cdot |B^t| \cdot |B^{40}| = 8 \cdot |B| \cdot |B|^{40} = 8 \cdot |B|^{41} \overset{|B|=-1}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow |2 \cdot B^t \cdot B^{40}| = 8 \cdot (-1)^{41} = -8$$

b) $XA + 3X = B - A \implies X(A+3I) = B - A.$

Para saber si la matriz X *es única, debemos comprobar si la matriz* $A+3I$ *es inversible:*

$$A+3I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \implies |A+3I| = 2\cdot(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \implies \exists (A+3I)^{-1}$$

Por tanto:

$$X(A+3I) = B - A \implies X(A+3I)(A+3I)^{-1} = (B-A)(A+3I)^{-1} \implies$$

$$X = (B-A)(A+3I)^{-1}$$

I) $B - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

II) $Adj(A+3I) = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ -1 & 12 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \implies (Adj(A+3I))^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -6 & 12 & -2 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \implies$

$\overset{|A+3I|=-2}{\Longrightarrow} (A+3I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 3 & -6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

III) $X = (B-A)(A+3I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 3 & -6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \implies$

$$\implies X = \begin{pmatrix} -4 & 8 & -1 \\ 11 & -23 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución del ejercicio 2

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ -1 & a & -a \\ 1 & 1 & a^3-2a \end{pmatrix}$ *matriz del sistema, y* $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & 0 \\ -1 & a & -a & 2a+1 \\ 1 & 1 & a^3-2a & a-1 \end{pmatrix}$ *la matriz ampliada:*

a) *Por el Teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible determinado (tiene solución única), si y solo si rango*$(A) = 3$.

Se tiene que rango$(A) = 3 \iff |A| \neq 0$*:*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ -1 & a & -a \\ 1 & 1 & a^3-2a \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3+F_2\to F_3]{F_2+F_1\to F_1} |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1+a & -2a \\ -1 & a & -a \\ 0 & 1+a & a^3-3a \end{vmatrix} \Longrightarrow$$

$$|A| = (-1)\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1+a & -2a \\ 1+a & a^3-3a \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{2+1}(1+a)\begin{vmatrix} 1 & -2a \\ 1 & a^3-3a \end{vmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |A| = (1+a)(a^3-a) = (1+a)a(a^2-1) = a(a+1)^2(a-1)$$

Por tanto:

- $|A| \neq 0$, *o equivalentemente, rango*$(A) = 3$ *para cualquier* $a \in \mathbb{R}\setminus\{-1,\,0,\,1\}$, *y por el Teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible determinado (tiene solución única)* $\forall\, a \in \mathbb{R}\setminus\{-1,\,0,\,1\}$
- *Si* $a = 0$*:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \textit{rango}(A) = 2, \textit{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \textit{rango}(A^*) = 3, \textit{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Es decir, rango$(A^*) >$ *rango*(A)*, y por el Teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es incompatible (no tiene solución)*

- *Si* $a = -1$*:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \textit{rango}(A) = 2, \textit{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \textit{rango}(A^*) = 3, \textit{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Es decir, rango$(A^*) >$ *rango*(A)*, y por el Teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es incompatible (no tiene solución)*

- *Si* $a = 1$*:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \textit{rango}(A) = 2, \textit{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \textit{rango}(A^*) = 2, \textit{ ya que } F_1 = F_3$$

Es decir, rango$(A^*) =$ *rango*$(A) = 2 < 3$*, y por el Teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones)* *b)* *Dado que las ecuaciones primera y tercera son iguales, y dado que vimos que en A las dos primeras columnas son linealmente independientes, resolvemos* $\begin{cases} x+y=z \\ -x+y=z+3 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+y=z \\ -x+y=z+3 \end{cases} \xrightarrow[F_1+F_2\to F_2]{F_1-F_2\to F_1} \begin{cases} 2x=-3 \\ 2y=2z+3 \end{cases} \implies \begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=z+\frac{3}{2} \end{cases}$$

Las soluciones son $\left(-\frac{3}{2},\, \lambda+\frac{3}{2},\, \lambda\right)$*, con* $\lambda \in \mathbb{R}$

Solución del ejercicio 3

a) *Se tiene que* $Dom\, f = \mathbb{R}\setminus\{-1,\, 1\}$*, ya que* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x^2+x} & si \quad x<0 \\ -1 & si \quad x=0 \\ \dfrac{x^2+x}{x^2-x} & si \quad x>0 \end{cases}$

- *En* $x=0$*:*

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-1 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = -1 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-x}{x^2+x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(x-1)}{x(x+1)} = -1 \end{array}\right\} \implies f \ \textit{continua en } x=0$$

- *En* $x=-1$*:*

$$\left.\begin{array}{l} \nexists f(-1) \\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-x}{x^2+x} = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-x}{x^2+x} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} \implies \begin{array}{l} \textit{discontinuidad de salto infinito} \\ \textit{en } x=-1 \end{array}$$

- *En* $x=1$*:*

$$\left.\begin{array}{l} \nexists f(1) \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \frac{2}{0^+} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \frac{2}{0^-} = -\infty \end{array}\right\} \implies \begin{array}{l} \textit{discontinuidad de salto infinito} \\ \textit{en } x=1 \end{array}$$

Por tanto, f *es continua en* $\mathbb{R}\setminus\{-1,\, 1\}$

b) $$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2+x}{x^2-x}-(-1)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x+1\cdot(x^2-x)}{x(x^2-x)} \implies$$

$$\implies f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2}{x^2(x-1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x-1} = -2$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{x^2-x}{x^2+x}-(-1)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-x+1\cdot(x^2+x)}{x(x^2+x)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2}{x^2(x+1)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{x+1} = 2$$

Por tanto $f'(0^+) \neq f'(0^-)$, es decir f no es derivable en $x=0$.

Solución del ejercicio 4

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{\operatorname{sen}(x^2)} = \frac{0}{0} = IND \overset{L'Hôp.}{\Longrightarrow} L = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}+2\operatorname{sen} x}{2x\cos(x^2)} = \frac{0}{0} =$$

$$\overset{L'Hôp.}{\Longrightarrow} L = \lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}+2\cos x}{2\cos(x^2)-4x^2\operatorname{sen}(x^2)} = \frac{4}{2} = 2$$

Solución del ejercicio 5 *a) Sea una función $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, continua en $[a,b]$. Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos distintos ($f(a)\cdot f(b)<0$), entonces existe un $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.*

b) Demostrar que $e^{-x}=x$ equivale a demostrar que $e^{-x}-x=0$:

Sea la función $f:[0,1]\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida como $f(x)=e^{-x}-x$. Se tiene que f es continua en $[0,1]$, con $f(0)=e^0-0=1>0$, y $f(1)=e^{-1}-1=\frac{1}{e}-1<0$. Por tanto, por el Teorema de Bolzano, existe $c\in(0,1)$ tal que $f(c)=e^{-c}-c=0$.

Supongamos que existe $d\in(0,1)$ con $c<d$, tal que $f(d)=0$. Entonces, se tendría f continua en $[c,d]$, derivable en (c,d), con $f(c)=f(d)$, y en virtud del Teorema de Rolle, existiría un $\alpha\in(c,d)\subset(0,1)$ en el que $f'(\alpha)=0$.

Pero $f'(x)=-e^{-x}-1<0 \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$, y particularmente, en (c,d), por tanto, se llega a un absurdo al suponer la existencia de d, con lo que la solución de $f(c)=0$ es única.

Solución del ejercicio 6 *Dada la función $f(x)=ax^4+x^3+bx-1$:*

a) Derivando la función, $f'(x)=4ax^3+3x^2+b$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2)=0 \\ f'(1)=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot(-2)^3a+3\cdot(-2)^2+b=0 \\ 4\cdot 1^3a+3\cdot 1^2+b=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} -32a+12+b=0 \\ 4a+3+b=0 \end{array}\right\}$$

$$a=\frac{1}{4},\ b=-4$$

b) $f(x)=\frac{1}{4}x^4+x^3-4x-1 \Longrightarrow f'(x)=x^3+3x^2-4$, *y* $f''(x)=3x^2+6x$

I) Para el estudio de la monotonía y los extremos relativos, hay que localizar los puntos críticos de f (donde se anula f'), y estudiar los cambios de signo de f':

$$f'(x)=x^3+3x^2-4=(x-1)(x+2)^2=0 \Longleftrightarrow x=1,\ x=-2$$

- *$f'>0$ en $(1,+\infty) \Longrightarrow f$ creciente en $(1,+\infty)$*
- *$f'<0$ en $(-\infty,-2)\cup(-2,1)$, y además, aunque $f'(-2)=0$, no se produce un cambio de signo de f' en $x=-2$, por tanto, f decrece en $(-\infty,1)$*

- f' *cambia de signo en* $x = 1$, *y pasa de ser negativa a positiva, por tanto,* f *alcanza un mínimo relativo en* $x = 1$

II) *Para la curvatura, hay que estudiar la variación de signo de* f'':

$$f''(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2) = 0 \Longleftrightarrow x = 0,\ x = -2$$

- $f'' > 0$ *en* $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \implies f$ *convexa en* $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ *(entendiendo por función convexa* $y = x^2$*)*
- $f'' < 0$ *en* $(-2, 0) \implies f$ *cóncava en* $(-2, 0)$
- *Tanto en* $x = 0$ *como en* $x = -2$ *la función* f'' *cambia de signo, y* f *cambia de cóncava a convexa, y de convexa a cóncava respectivamente. Por tanto, en* $x = 0$ *y en* $x = -2$ *hay puntos de inflexión.*

c) *La función* $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + x^3 - 4x - 1$ *es continua en* $[-2, 0]$, *y derivable en* $(-2, 0)$, *por tanto, por el Teorema de Lagrange (o del Valor Medio del Cálculo Diferencial), existe* $c \in (-2, 0)$ *tal que* $f(0) - f(-2) = f'(c)(0 - (-2))$. *Es decir, existe* $c \in (-2, 0)$ *verificando* $f'(c) = \dfrac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)}$.

Esto significa, que existirá un $c \in (-2, 0)$ *en el cual la pendiente de la recta tangente a la función será paralela a la secante que une* $(-2, f(-2))$ *y* $(0, f(0))$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(c) = \dfrac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \dfrac{-1 - 3}{2} = -2 \\[2ex] f'(c) = c^3 + 3c^2 - 4 \end{array}\right\} \implies c^3 + 3c^2 - 4 = -2 \implies c^3 + 3c^2 - 2 = 0$$

Resolviendo la ecuación $c^3 + 3c^2 - 2 = 0$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & & -1 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & -2 & |0 \end{array}$$

$$c^3 + 3c^2 - 2 = (c+1)(c^2 + 2c - 2) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\[2ex] c = \dfrac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

De esos valores de c, *solamente* $c = -1$ *pertenece al intervalo* $(-2, 0)$, *por tanto, la recta tangente tiene ecuación:*

$$y - f(c) = f'(c)(x - c) \implies y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \implies y - \frac{9}{4} = -2(x + 1)$$

Solución del ejercicio 7 *Si* x *e* y *son las dimensiones del folio, atendiendo al dibujo, dado que el área del texto tiene que ser de* $18\,cm^2$, *se cumplirá que* $(x - 2)(y - 4) = 18$. *De esta condición deducimos la relación que tiene que haber entre* x *e* y. *Es decir:*

$$(x - 2)y - 4(x - 2) = 18 \implies y(x - 2) = 18 + 4(x - 2) \implies y = \frac{18}{x - 2} + 4$$

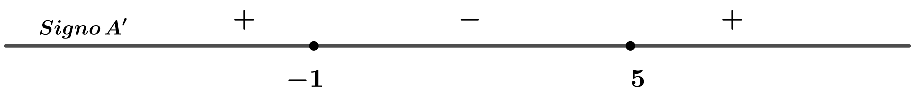
Como el área del folio es $A = xy$, entonces tenemos la función

$$A(x) = x\left(\frac{18}{x-2} + 4\right) = \frac{18x}{x-2} + 4x$$

Buscamos los puntos críticos:

$$A'(x) = \frac{18(x-2) - 1\cdot 18x}{(x-2)^2} + 4 = -\frac{36}{(x-2)^2} + 4 = \frac{4(x-2)^2 - 36}{(x-2)^2}$$

$$A' = 0 \iff 4(x-2)^2 - 36 = 0 \iff (x-2)^2 = 9 \iff x - 2 = \pm 3 \iff x = 5,\ x = -1$$



El valor $x = 5$ corresponde a un mínimo de $A(x)$. Como $y = \dfrac{18}{x-2} + 4$, entonces $y = \dfrac{18}{3} + 4 = 10$.

Es decir, las dimensiones del papel son 5 cm y 10 cm.