Cálculo Integral

Ejercicio 1 *Para cada una de las funciones siguientes, calcular el área encerrada por la función, el eje OX, y las rectas que se indican.*

a) $y = \dfrac{x^3}{1+x^2},\ x=-1,\ x=0$

b) $y = x\ln x,\ x=\dfrac{1}{2},\ x=2$

c) $y = \dfrac{1}{x(\ln x+1)^2},\ x=1,\ x=2$

d) $y = \dfrac{1}{1-e^{-x}},\ x=1,\ x=2$

e) $y = x\operatorname{sen} 2x,\ x=0,\ x=\pi$

f) $y = (2x-1)e^x,\ x=0,\ x=2$

g) $y = \dfrac{1}{x^4-1},\ x=2,\ x=4$

h) $y = \dfrac{x+2}{x^2+x},\ x=1,\ x=2$

Ejercicio 2 *Calcula el área comprendida entre* $f(x)=2\operatorname{sen}(2x)$ *y* $g(x)=2\cos(x)$ *en el intervalo* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Ejercicio 3 *Calcula el área comprendida entre las curvas* $y=6x-x^2$ *e* $y=x^2-2x$.

Ejercicio 4 *Calcula el área delimitada por la curva* $y=-\frac{1}{8}x^3+x^2-\frac{1}{2}x+4$, *y su recta tangente en el punto de abscisa* $x=0$.

Ejercicio 5 *Resuelve las siguientes integrales definidas.*

a) $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{1+|x|}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{5e^x}{e^{2x}+4e^x+5}\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^2 \frac{5}{2-e^x}\,dx$

f) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2|\operatorname{sen} x|\,dx$

g) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{(e^{2x}-1)(e^x+1)}\,dx$

h) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{9x\operatorname{sen}(x^2)}{5\sqrt{2+\cos(x^2)}}\,dx$

i) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}(4-9x)}$

Ejercicio 6 *Siendo* $x\in[0,2]\subset\mathbb{R}\to F(x)=\displaystyle\int_0^x \operatorname{arc\,tg}(t^2)\,dt$, *calcular razonadamente* $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)}{\operatorname{sen}^3(x)}$

Ejercicio 7 *Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, hallar los valores de las constantes a, b, c, y d sabiendo que* $\displaystyle\int_0^x (t^3-t+1)e^t\,dt=(ax^3+bx^2+cx+d)e^x$

Ejercicio 8 *Deriva las siguientes funciones:*

a) $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{t-1}\,dt$

b) $F(x)=\displaystyle\int_1^{x^2} \sqrt{t^3+1}\,dt$

c) $F(x)=\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen}(x)} \frac{arcsen(t)}{1-t^2}\,dt$

d) $F(x)=-2x+\displaystyle\int_0^{2x} e^{t^2-10t+24}\,dt$

Ejercicio 9 *Demostrar que* $F(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ *tiene puntos de inflexión.*

Ejercicio 10 *Sea* $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

a) *Calcula la ecuación de la recta tangente a* $y = F(x)$ *en* $x = 0$.

b) *Estudiar la monotonía, la curvatura, y la existencia de extremos relativos y puntos de inflexión de* F.

Ejercicio 11 *Sea* f *una función continua y positiva, con dominio* $\mathbb{R}$, *y de la que se sabe que su integral indefinida es* $\int f(t)\,dt = e^x + \operatorname{arc\,tg}(x) + C$. *Determinar el valor de* C *y la expresión de* $f(x)$.

Ejercicio 12 *Sea* f *una función continua en* $[2, 3]$, *y* F *una primitiva de* f *verificando* $F(2) = 1$ *y* $F(3) = 2$. *Calcular:*

a) $\int_2^3 f(x)\,dx$ b) $\int_2^3 5f(x) + 1\,dx$ c) $\int_2^3 (F(x))^2 f(x)\,dx$

Ejercicio 13 *Sea* f *una función continua tal que* $\int_1^8 f(u)\,du = 3$. *Calcular* $\int_1^2 f(x^3)x^2\,dx$

Ejercicio 14 *Sea* $f'(x) = \begin{cases} 5x - 2 & si \quad 0 < x < 1 \\ x^2 - 6x + 8 & si \quad 1 \le x < 5 \end{cases}$ *la derivada de una función* f, *definida en* $[0, 5]$ *y con* $f(3) = 6$*:*

a) *Obtener la expresión analítica de* f.

b) *Calcular la ecuación de la recta tangente a* $y = f(x)$ *en* $x = 3$.

c) *Estudiar la monotonía de* f

Ejercicio 15 *Sea* f *es una función continua en todo* $\mathbb{R}$, *tal que* $\int_0^x f(t)\,dt = \dfrac{1+x}{1+x^2}$.

a) *Calcular* $f(2)$.

b) *Obtener las ecuaciones de las asíntotas de* f.

Ejercicio 16 *Calcular la expresión analítica de* f *sabiendo que* $f''(x) = 12x - 6$, *y que la recta tangente a la gráfica de* f *en* $x = 2$ *tiene ecuación* $4x - y - 7 = 0$

Ejercicio 17 *Una función* f *es dos veces derivable en* $\mathbb{R}$, *y su función derivada segunda es* $f''(x) = (x^2 - 4x + 3)e^{-x}$. *Si en* $x = 0$ *la recta tangente a* f *tiene pendiente* -1*:*

a) *Estudia la curvatura y los puntos de inflexión de* f.

b) *Estudia la monotonía y la existencia de puntos extremos de* f

c) *Calcula las asíntotas de* $y = f(x)$

Ejercicio 18 *Para la función*$f(x) = -x^2 + 5x - 4$, *calcula el punto* $c \in (1, 4)$ *cuya existencia establece el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.*

Ejercicio 19 *Sea* $f : [0,3] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, continua en* $[0,3]$*, verificando* $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_1^3 f(t)\,dt$*. ¿Puede asegurarse que existan* $a, b \in (0,3)$*, con* $z < 1$*, y* $w > 1$ *tales que* $f(z) = 2f(w)$*? En caso afirmativo, justifica la respuesta.*

Ejercicio 20 *Sea* $f : [0,4] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función continua y positiva. El área del trapecio mixtilíneo delimitado* $x = 0$*,* $y = 0$*,* $x = \lambda$*, e* $y = f(x)$ *es* $2\lambda\sqrt{1+\lambda}$*. Determinar la expresión analítica de* f*, y el área bajo la curva* $y = f(x)$ *en* $[0,4]$

Ejercicio 21 *Sea* $f : \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \to \mathbb{R}$ *una función dos veces derivable en* $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$*, con* $f''(x) = 2x\ln(x) + x$*.*

a) *Estudiar la curvatura y la existencia de puntos de inflexión de* f*.*

b) *Sabiendo que tiene un mínimo relativo en* $\left(1, \frac{8}{9}\right)$*, estudia la monotonía de* f*.*

c) *Calcular la ecuación de las rectas tangente y normal a* f *en* $x = e$*.*