Bloque de Análisis: Límites, continuidad, y derivabilidad de funciones

Ejercicio 1 *Calcula los siguientes límites:*

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x+1}\right)^{3x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x^2+1}\right)^{3x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+1}{3x-1}\right)^{\frac{x+2}{x-2}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{\operatorname{sen} x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\operatorname{sen} x}{x^3}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\operatorname{sen} x}{x^3}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(x^2-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(e^x-x)^{\frac{1}{x}}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)^{1-\cos x}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}2x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

ñ) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}$

o) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x^x$

p) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

q) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\cos(x^2)\right)^{\frac{2}{x^2}}$

r) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}{1-\cos x}$

s) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{arc\,sen}x}$

t) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x^2+x-5}{x^2-3}\right)^{\frac{1}{2x-4}}$

u) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x^{\operatorname{sen}x}$

v) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x^2+2)^{\frac{2x}{x+10}}$

w) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(2-x^2)^{2x}$

x) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x^3\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^3+x}\right)$

Ejercicio 2 *Calcular los siguientes límites.*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{|x|-x}}{x^2-2x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-\sqrt{1-\operatorname{sen}x}}{x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}(x-\sqrt{x^2+x+1})}$

Ejercicio 3 *Calcula el valor del parámetro k para que los límites siguientes tengan el valor indicado:*

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+3x}{2x^2+1}\right)^{kx-1}=e^3$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3\operatorname{sen}(kx)}{\sqrt{1-\cos x}}=6$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\,e^x-x}{k\cos x-\operatorname{sen}x+x-k}=4$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-2x-e^x+\operatorname{sen}(3x)}{x^k}=-5$

Ejercicio 4 *Calcular según los valores del parámetro α:* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{x+1}$

Ejercicio 5 *Estudiar la continuidad de la función* $f(x)=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}-1}{x}$

Ejercicio 6 *La función* $f(x)=\dfrac{x^2-2x+n}{x^3+mx^2-14x}$ *tiene una discontinuidad evitable en* $x=2$. *Calcular m, n, y clasificar el resto de las discontinuidades.*

Ejercicio 7 *Estudiar la continuidad de la función* $f(x) = \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$

Ejercicio 8 *¿Qué condición debe cumplir* m *para que la ecuación* $x^3+x^2+mx-6=0$ *tenga alguna solución en* $(0,2)$*?*

Ejercicio 9 *Demuestra que la ecuación* $x\ln x = 2$ *tiene alguna solución real, y encuéntrala con una cifra decimal exacta.*

Ejercicio 10 *Demostrar que las gráficas de* $y=\ln x$ *e* $y=e^{-x}$ *se cortan en algún punto.*

Ejercicio 11 *Sean* $f,g:[a.b]\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *continuas en* $[a,b]$ *verificando* $f(a)<g(a)$ *y* $f(b)>g(b)$*. Demostrar que existe un* $c\in(a,b)$ *tal que* $f(c)=g(c)$

Ejercicio 12 *Demostrar que la función* $y=\dfrac{x^2+1}{3-\cos x}$ *alcanza el valor* 2 *en algún punto de su dominio.*

Ejercicio 13 *Dada la ecuación* $x^3+\lambda x^2-2x=1$*:*

a) *Demostrar que si* $\lambda>2$*, la ecuación tiene una solución menor que* 1*.*

b) *Demostrar que si* $\lambda<2$*, la ecuación tiene una solución mayor que* 1*.*

Ejercicio 14 *Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función* $f(x)=x^2\cdot\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Ejercicio 15 *Dada la función* $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}+2 & si \quad x\neq 0\\[2ex] k & si \quad x=0\end{cases}$ *:*

a) *¿Existe algún valor de* k *para el cual* f *es continua?*

b) *¿Existe algún valor de* k *para el cual* f *es derivable?*

Ejercicio 16 *Estudiar la continuidad y la derivabilidad de* $f(x)=2x\cdot|4-x|$

Ejercicio 17 *Dada la función* $f(x)=\begin{cases}3-ax^2 & si \quad x\leq 1\\[2ex] \dfrac{2}{ax} & si \quad x>1\end{cases}$*, determina* a *para que sea derivable en* $\mathbb{R}$

Ejercicio 18 *Se considera la función* $f(x)=x^2+m$*, donde* m *es una constante mayor que cero. Para cada valor de* m*, hallar el valor* $a>0$ *tal que la recta tangente a la gráfica de* f *en el punto* $(a,f(a))$ *pase por el origen de coordenadas.*

Hallar también el valor de m *para que la recta* $y=x$ *sea tangente a la gráfica de* $f(x)$

Ejercicio 19 *Dadas las funciones* $f(x)=\dfrac{2}{x}$ *y* $g(x)=\sqrt{x^2-3}$*, hallar las eucaciones de las rectas tangentes a cada una de ellas en el punto de corte de las gráficas* $y=f(x)$ *e* $y=g(x)$*, y demostrar que dichas tangentes son perpendiculares.*

Ejercicio 20 *Dadas las funciones* $f(x) = x^2 - 2x + 3$ *y* $g(x) = ax^2 + b$, *encontrar los valores de* a *y* b *para que sus gráficas sean tangentes en el punto* $x = 2$, *y para dichos valores, hallar la ecuación de la recta tangente común a ambas curvas.*

Ejercicio 21 *Sea* $f(x) = x^2 + ax + b$. *Hallar los valores de* a *y* b *para que la recta* $y = 2x$ *sea tangente a la gráfica en el punto* $P = (2, 4)$

Ejercicio 22 *Dada la función*

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & si \quad x < 3 \\ \ln(x-2) & si \quad x \geq 3 \end{cases}$$

a) *Calcula los valores de* a *y* b *para que sea derivable en* $\mathbb{R}$

b) *Calcula su función derivada.*

c) *Encuentra la ecuación de la recta tangente a* $y = f(x)$ *en* $x = 3$.

Ejercicio 23 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + 8 & si & x \leq -1 \\ ax^3 + b & si & -1 < x < 2 \\ 12x & si & x \geq 2 \end{cases}$

a) *Determinar el valor de* a *y* b *para que sea derivable en* $x = -1$.

b) *Para los valores de* a *y* b *encontrados en el apartado anterior, estudiar la derivabilidad de la función, y obtener la expresión de la función derivada.*

Ejercicio 24 *Para la función* $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & si & x \leq 1 \\ x + b & si & 1 < x < 3 \\ x^2 - 5x & si & x \geq 3 \end{cases}$

a) *Calcula los valores de* a *y* b *para que sea derivable en* $x = 1$.

b) *Para los valores de* a *y* b *encontrados en el apartado anterior, estudia la derivabilidad en* $x = 3$.

c) *Encuentra las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la función en* $x = 4$.

d) *Encuentra los puntos de la gráfica cuya recta tangente es paralela a la recta de ecuación* $y = 2x - 1$

Ejercicio 25 *Determina el valor de* a *para que* $f(x) = \begin{cases} x \ln x & si & 0 < x \leq 1 \\ a(1 - e^{1-x}) & si & 1 < x \end{cases}$ *sea derivable en todo su dominio.*

Ejercicio 26 *Determina el valor de* k *para que la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2} & si & x \neq 0 \\ k & si & x = 0 \end{cases}$

Ejercicio 27 *Utilizando la definición de función derivada, calcula* $f'(1)$ *para las funciones* $f(x) = \ln(x^2 + e)$ *y* $f(x) = \sqrt{x+1}$

Ejercicio 28 *Resuelve las siguientes cuestiones:*

a) *¿En qué punto de la curva de la función* $f(x) = x \ln x - x$ *la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante?*

b) *Determina el ángulo que forma la recta tangente a* $y = -x^2 + 3$ *con el eje* OX *en el punto de abscisa* $x = 3$

c) *Determina las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva* $y = \dfrac{x}{2x+3}$ *paralelas a la recta* $3x - 2y + 15 = 0$

d) *Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola* $y = x^2 - 6x + 8$ *y que pasa por el punto* $(6, 4)$

e) *Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola* $y = -x^2 + 4$ *y que pasa por el punto* $(0, 5)$

f) *Determina la ecuación de la recta tangente a* $y = x^2 + x$ *que forma* $60°$ *con la dirección positiva el eje OX.*

g) *Determina la ecuación de la recta tangente a* $y = -x^2 + 2x + 1$ *que forma* $30°$ *con la dirección positiva el eje OX.*

Ejercicio 29 *Resuelve las siguientes cuestiones:*

a) *¿Es aplicable el Teorema de Rolle a* $f(x) = |x - 2|$ *en el intervalo* $[0, 2]$*?*

b) *Estudiar si la función* $f(x) = x - x^3$ *satisface el Teorema de Rolle en* $[0, 1]$*, y en caso afirmativo, determinar el valor de c.*

c) *Demostrar que la ecuación* $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ *solo tiene una raíz real.*

d) *Determinar el número de raíces reales de la ecuación* $x^3 + 6x^2 + 15x = 25$

e) *Dada la curva* $y = x^3 - x^2 + 2$*, ¿existe alguna recta tangente a la misma paralela a la recta que une los puntos* $A = (1, 2)$ *y* $B = (3, 20)$*? Justifica la respuesta, y determina la ecuación de dicha tangente en caso afirmativo.*

f) *Demostrar que* $f(x) = x^3 + x - 1$ *verifica las hipótesis del Teorema de Lagrange en el intervalo* $[0, 2]$*, y encuentra todos los puntos c en los cuales lo satisface.*

g) *Determinar a, b y c para que* $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & si \quad x \leq 3 \\ bx + c & si \quad x > 3 \end{cases}$ *cumpla el Teorema de Rolle en* $[-1, 7]$

h) *Demuestra razonadamente que la ecuación* $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ *tiene exactamente dos raíces en el intervalo* $[-\pi, \pi]$*.*

i) *Utilizar el teorema de Bolzano y el teorema de Rolle para probar que las gráficas de las funciones* $f(x) = x^2$ *y* $g(x) = 2^{-x}$ *definidas para* $x \geq 0$*, se cortan en un sólo punto.*