Proyecto MaTEX

Límites de Funciones

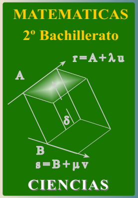
Fco Javier González Ortiz

Directorio

- Tabla de Contenido
- Inicio Artículo

11 de junio de 2004

Versin 1.00



MaTEX

LÍMITES

Tabla de Contenido

1. Introducción

Si has llegado hasta aquí suponemos que has superado el capítulo de Límites de Funciones I. En este capítulo vas a profundizar en el cálculo de límites con funciones:

- trigonométricas,
- exponenciales y
- logarítmicas

que no se han tratado en el capítulo anterior.

Para ello introduciremos los conceptos de infinitésimo e infinito. Esto nos permitirá calcular el tipo de límite indeterminado de la forma $\dfrac{0}{0}$ que es el más importante y es objeto esencial del *Cálculo diferencial*.

El nivel de este capítulo es adecuado para alumnos de 2^o de Bachillerato.

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

2. Infinitésimos

Toda variable $f(x)$ se llama infinitamente pequeña o infinitésimo cuando tiende a 0.

$$\boxed{f(x) \to 0}$$

La condición esencial es la ***variabilidad*** y tener por ***límite*** 0.

No hablamos de números infinitamente pequeños, sería un contrasentido. El número 10^{-2002} es realmente pequeño pero no infinitamente pequeño.

La condición esencial del infinitésimo es que se pueda hacer tan pequeño como queramos, por lo que debe ser una expresión variable.

Decimos que x^2 es infinitésimo en $x = 0$, pues $x^2 \to 0$ en $x = 0$. Pero decimos que $1 + x^2$ no es infinitésimo , pues $1 + x^2 \to 1$ en $x = 0$.

También $\operatorname{sen} x$ es infinitésimo en $x = 0$, pues $\operatorname{sen} x \to 0$ en $x = 0$. Pero decimos que $2 + \operatorname{sen} x$ no es infinitésimo , pues $2 + \operatorname{sen} x \to 2$ en $x = 0$.

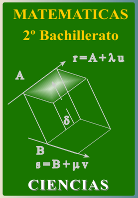
Así mismo, $\operatorname{sen}(1+x)$ no es infinitésimo en $x = 0$, pues $\operatorname{sen}(1+x) \to \operatorname{sen} 1$ en $x = 0$, pero si lo es en $x = -1$.

Y así sucesivamente.

Ejemplo 2.1. Las siguientes funciones son infinitésimos en los puntos que se indican

a) $\lim\limits_{x\to 1} x - 1$ *b*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}$ *c*) $\lim\limits_{x\to 0} x^2$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x$ *e*) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \cos x$ *f*) $\lim\limits_{x\to 0} \tan x$



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

g) $\lim\limits_{x\to 0} e^x - 1$ *h*) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x$ *i*) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x)$

2.1. Algebra de infinitésimos

Regla I La suma finita de infinitésimos es un infinitésimo.

$$\alpha(x)\to 0 \quad \beta(x)\to 0 \Longrightarrow \alpha(x)+\beta(x)\to 0$$

$$\lim_{x\to 0} x^2+\operatorname{sen} x = 0 \qquad \lim_{x\to 0} x^4+\operatorname{sen} x^2 = 0$$

Regla II EL producto de un infinitésimo por una constante, o por una variable acotada, es un infinitésimo.

$$k\in\mathbb{R},\ \alpha(x)\to 0 \Longrightarrow K\alpha(x)\to 0$$

$$z(x) \text{ acotada },\ \alpha(x)\to 0 \Longrightarrow z(x)\alpha(x)\to 0$$

2.2. Orden de un infinitésimo

Cuando $x\to 0$ las variables:

$$x, x^2, x^3, \cdots, x^m, \cdots$$

son infinitésimos y éstas se toman como tipos de comparación de otros infinitésimos. Decimos que $f(x)$ es un infinitésimo en el punto $x=a$ de orden n cuando

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^n} = Cte \neq 0}$$

2.3. Infinitésimos equivalentes

Dos infinitésimos se dicen equivalentes ($\alpha \sim \beta$) cuando el límite de su cociente es 1. Si $\alpha \to 0$ y $\beta \to 0$ son infinitésimos.

$$\boxed{\alpha \sim \beta \Longleftrightarrow lim \frac{\alpha}{\beta} = 1}$$

Teorema 2.1. Los infinitésimos $x \sim \operatorname{sen} x \sim \tan x$ son equivalentes en $x = 0$.

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1} \qquad \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1} \tag{1}$$

Para su aplicación se puede sustituir $\mathbf{x}$ por cualquier variable $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ que también sea un infinitésimo. Estos son algunos ejemplos:

Ejemplo 2.2. Las siguientes infinitésimos equivalentes en los puntos que se indican

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2x} = 1$ *b*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x} = 1$ *c*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x^2}{3x^2} = 1$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 6x}{6x} = 1$ *e*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(-x^3)}{-x^3} = 1$ *f*) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\tan(x-1)}{x-1} = 1$

Ejercicio 1. Escribir el infinitésimo equivalente en $x = 0$ a:

a) $\operatorname{sen} x^3$ *b*) $\tan(x + x^2)$ *c*) $\operatorname{sen} 17\, x^3$

Teorema 2.2. Los infinitésimos $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ son equivalentes en $x = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{2}x^2} = 1} \tag{2}$$

Para su aplicación se puede sustituir $\mathbf{x}$ por cualquier variable $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ que también sea un infinitésimo. Ejemplos de esto son:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x}{\frac{1}{2}\, 4x^2} = 1$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 5x^2}{\frac{1}{2}\, 25x^4} = 1$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{\frac{1}{2}\, x} = 1$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x}{\frac{1}{2}\, 4x^2} = 1$

Ejercicio 2. Escribir el infinitésimo equivalente en $x = 0$ a:

a) $1 - \cos x^2$ *b*) $1 - \cos 3$ *c*) $1 - \cos \dfrac{x}{2}$

d) $1 - \cos \sqrt{x^3}$ *e*) $1 - \cos 3x^7$ *f*) $1 - \cos(\operatorname{sen} x)$

LÍMITES
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Teorema 2.3. Cuando $x \to 0$, $\ln(1+x) \sim x$ son equivalentes

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1} \qquad (3)$$

Para su aplicación se puede sustituir $\mathbf{x}$ por cualquier variable $\alpha(\mathbf{x})$ que también sea un infinitésimo. Ejemplos de esto son:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} = 1$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{-x} = 1$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+5\sqrt{x})}{5\sqrt{x}} = 1$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x} = 1$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\tan x)}{\tan x} = 1$

Ejercicio 3. Escribir el infinitésimo equivalente en $x = 0$ a:

a) $\ln(1+\sqrt{x^3})$

b) $\ln(1+3x^7)$

c) $\ln(1+\operatorname{sen} x)$

d) $\ln(1-3x)$

e) $\ln(1+\dfrac{x}{3})$

f) $\ln(1+2\tan x)$

Teorema 2.4. Cuando $x \to 0$, $e^x - 1 \sim x$ son equivalentes

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1} \tag{4}$$

Para su aplicación se puede sustituir $\mathbf{x}$ por cualquier variable $\alpha(\mathbf{x})$ que también sea un infinitésimo. Ejemplos de esto son:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1$ *b*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = 1$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = 1$ *d*) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} = 1$

Ejercicio 4. Escribir el infinitésimo equivalente en $x = 0$ a:

a) $e^{2x^3} - 1$ *b*) $e^{\operatorname{sen} x} - 1$ *c*) $e^{\tan x^2} - 1$

Recogemos en una tabla las **equivalencias** de infinitésimos que hemos visto añadiendo las inversa del seno y la tangente. Es conveniente aprenderlas para facilitar el cálculo de límites con infinitésimos.

Equivalencias		
$\operatorname{sen}\alpha(x)$	$\sim$	$\alpha(x)$
$1-\cos\alpha(x)$	$\sim$	$\frac{1}{2}\alpha(x)^2$
$\tan\alpha(x)$	$\sim$	$\alpha(x)$
$\ln(1+\alpha(x))$	$\sim$	$\alpha(x)$
$e^{\alpha(x)}-1$	$\sim$	$\alpha(x)$
$\operatorname{arc\,sen}\alpha(x)$	$\sim$	$\alpha(x)$
$\arctan\alpha(x)$	$\sim$	$\alpha(x)$

Tabla de Infinitésimos

Responde a las siguientes cuestiones sobre infinitésimos:

Test. Responde a las siguientes preguntas.

1. La función $f(x) = (x-1)^2$ es un infinitésimo en:

(a) $x = 0$ (b) Nunca (c) $x = 1$

2. La función $f(x) = (x-a)^2$ es un infinitésimo en:

(a) $x = 0$ (b) Nunca (c) $x = a$

3. La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es un infinitésimo en:

(a) $x = 0$ (b) ∞ (c) Nunca

4. La función $f(x) = 1 + x^2$ es un infinitésimo en:

(a) $x = 0$ (b) Nunca (c) $x = 1$

5. La función $f(x) = \ln x$ es un infinitésimo en:

(a) $x = 0$ (b) Nunca (c) $x = 1$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Test. Responde a las siguientes preguntas.

1. La función $f(x) = \ln(x-1)$ es un infinitésimo en:

(a) $x = 0$ (b) Nunca (c) $x = 2$ (d) $x = 1$

2. La función $f(x) = e^x - 1$ es un infinitésimo en:

(a) $x = 0$ (b) Nunca (c) $x = 1$

3. El orden del infinitésimo $5 \cdot x^3$ en $x = 0$, es:

(a) 3 (b) 2 (c) 5

4. El orden del infinitésimo $4 \cdot \sqrt[3]{x}$ en $x = 0$, es:

(a) 3 (b) 1/3 (c) 1 (d) 4

5. El orden del infinitésimo $4 \cdot \sqrt[5]{x^2}$ en $x = 0$, es:

(a) 5 (b) 2 (c) 2/5 (d) 4

6. El orden del infinitésimo $x^2 - 1$ en $x = 1$, es:

(a) 0 (b) 2 (c) 1 (d) Ninguno

Inicio del Test Buscar el infinitésimo equivalente en cada caso:

1. En $x = 0$, $f(x) = \operatorname{sen} x^2$ equivale a:

(a) x (b) x^2 (c) Ninguno de los otros

2. En $x = 0$, $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ equivale a:

(a) x (b) x^2 (c) Ninguno de los otros

3. En $x = 0$, $f(x) = 1 - \cos 4x$ equivale a:

(a) $8x^2$ (b) $4x^2$ (c) $4x$ (d) Ninguno de los otros

4. En $x = 0$, $f(x) = 1 - \cos \sqrt{x}$ equivale a:

(a) $\sqrt{x}$ (b) $\frac{1}{2}x$ (c) Ninguno

Final del Test Puntos:

Inicio del Test Buscar el infinitésimo equivalente en cada caso:

1. En $x = 0$, $\ln(1 + x^2)$ equivale a:

(a) x (b) x^2 (c) $1 + x^2$

2. En $x = 0$, $\ln(1 - 3\,x^2)$ equivale a:

(a) x^2 (b) $-x^2$ (c) $-3\,x^2$

3. En $x = 0$, $\ln(1 + \sqrt{x^3})$ equivale a:

(a) $\sqrt{x^3}$ (b) x^3 (c) $1 + x^3$

4. En $x = 0$, $\ln(1 + \operatorname{sen} x)$ equivale a:

(a) x (b) $\tan x$ (c) $\operatorname{sen} x$ (d) Todos los anteriores

5. En $x = 1$, $\ln(x)$ equivale a:

(a) $x - 1$ (b) x (c) x^2 (d) Ninguno

Final del Test Puntos:

Inicio del Test Buscar el infinitésimo equivalente en cada caso:

1. En $x = 0$, $e^{x^2} - 1$ equivale a:

(a) x (b) x^2 (c) $1 + x^2$

2. En $x = 0$, $\ln(\cos x)$ equivale a:

(a) $x - 1$ (b) $\cos x$ (c) $\cos x - 1$

3. En $x = 0$, $e^{\sqrt{x}} - 1$ equivale a:

(a) $\sqrt{x}$ (b) x (c) $\sqrt{x} - 1$

4. En $x = 0$, $e^{\operatorname{sen} x^2} - 1$ equivale a:

(a) $x^2 - 1$ (b) $\operatorname{sen} x$ (c) x^2

5. En $x = 1$, $\ln(e^x)$ equivale a:

(a) $e^x - 1$ (b) x (c) $\operatorname{sen} x$ (d) Todas ellas

Final del Test Puntos:

Ejercicio 5. Aplicar equivalencias a los siguientes infinitésimos en el punto indicado

a) $(\operatorname{sen} 5x)_{x=0}$

b) $[\tan(1-x)]_{x=1}$

c) $\left[1-\cos x^2\right]_{x=0}$

d) $[\arcsin 3x]_{x=0}$

e) $[\ln x]_{x=1}$

f) $[\arctan \operatorname{sen} x]_{x=0}$

g) $[e^{\operatorname{sen} x}-1]_{x=0}$

h) $[\ln(\cos x)]_{x=0}$

i) $\left[\operatorname{sen} 3\sqrt{x}\right]_{x=0}$

Ejercicio 6. Determinar el orden de los siguientes infinitésimos en $x=0$

a) $\operatorname{sen} x$

b) $\tan x$

c) $1-\cos x$

d) $4x^3+x^{50}$

e) $\ln(1-x)$

f) e^x-1

g) $e^{3x^2}-1$

h) $\ln(1-x^3)$

i) $\operatorname{sen} 3x^2$

MaTEX
LÍMITES
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

2.4. Principio de Sustitución

A la hora de aplicar equivalencias de infinitésimos en los límites hay que tener en cuenta que la sustitución no se puede hacer literalmente. Para hacerlo hay que limitarse al siguiente principio:

> [P.S.] Si en una expresión de un límite se sustituye un factor o divisor por otro equivalente, el límite de la expresión no varía si se sustituye
>
> - Un factor finito por su límite, no nulo
> - Un factor infinitésimo por otro equivalente

Téngase presente este principio de sustitución para los infinitésimos que estén multiplicando o bien dividiendo. Si la sustitución se realiza cuando están sumando o restando es fácil cometer errores.

Ejemplo 2.3. Aplicar el principio de sustitución a los límites:

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{sen} 5x$ *b*) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x}$

Solución:

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{sen} 5x = \lim_{x\to 0} (2x)\cdot(5x) = 0$

b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$

$\square$

▶ **Aviso** Tener mucho cuidado en no sustituir un **infinitésimo** que esté **sumando** por otro equivalente, los resultados pueden ser absurdos.

Por ejemplo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x}{x} = 0 \qquad \textbf{falso}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x}{x^3} = 0 \qquad \textbf{falso}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - (\operatorname{sen} x + 2x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - (x + 2x^3)}{x^3} = -2 \qquad \textbf{falso}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x \cdot \operatorname{sen} x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot x^2}{x^3} = 1 \qquad \textbf{correcto}$$

Ejercicio 7. Aplicar equivalencias al cálculo de los siguientes límites:

a) $\dfrac{3\operatorname{sen} 2x}{4x}$ *b)* $\dfrac{1 - \cos 4x}{5x^2}$ *c)* $\dfrac{\operatorname{sen} x \cdot \tan x}{1 - \cos x}$

d) $\dfrac{\ln x}{2 - 2x}$ *e)* $\dfrac{\ln(1 + x)}{1 - e^x}$ *f)* $\dfrac{x \cdot \operatorname{sen} x}{\ln(\cos x)}$

g) $\dfrac{\ln(1 + 5\,x)}{1 - e^{3x}}$ *h)* $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos 2x}$ *i)* $\dfrac{5x\ \operatorname{sen} 2x}{4x^2}$

3. Infinitos

Toda variable $f(x)$ se llama infinitamente grande o infinita para $x = a$ cuando tiende a ∞.

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) \to \infty}$$

Ejemplo 3.1. Las siguientes funciones son infinitos:

$a)\ \displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$ $\quad b)\ \displaystyle\lim_{x\to\infty} x$ $\quad c)\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$

$d)\ \displaystyle\lim_{x\to\infty} 3x^2$ $\quad e)\ \displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\tan x$ $\quad f)\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+}\ln x$

Ejercicio 8. Indicar si las siguientes funciones son infinitos:

$a)\ \displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1+x}{1-x}$ $\quad b)\ \displaystyle\lim_{x\to -\infty} 2^x$ $\quad c)\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{sen} x}$

$d)\ \displaystyle\lim_{x\to +\infty} 2^x$ $\quad e)\ \displaystyle\lim_{x\to +\infty} e^x$ $\quad f)\ \displaystyle\lim_{x\to +\infty}\ln x$

3.1. Orden de un infinito

Cuando $x \to \infty$ las variables:

$$x, x^2, x^3, \cdots, x^m, \cdots$$

son infinitos y éstas se toman como tipos de comparación de otros infinitos. En la comparación caben cuatro casos:

$$f(x) \to \infty \qquad g(x) \to \infty$$

- Si $lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ Se dice $f(x)$ es de **orden superior** a $g(x)$
- Si $lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ $f(x)$ es de **orden inferior** a $g(x)$
- Si $lim \dfrac{f(x)}{g(x)} =$ finito $\neq 0$ son del **mismo orden**
- Si $lim \dfrac{f(x)}{g(x)} =$ no existe , no son comparables

Ejemplo 3.2. Veamos el orden de algunos infinitos:

a) El polinomio $3x+5$ es un infinito de orden 1, pues

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+5}{x} = 3$$

b) El polinomio $-x^3+5x$ es es un infinito de orden 3, pues

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-x^3+5x}{x^3} = -1$$

c) El polinomio $\sqrt{4x+5}$ es un infinito de orden $1/2$, pues

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x+5}}{\sqrt{x}} = 2$$

MATEMATICAS 2º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
LÍMITES
Doc Doc
Volver Cerrar

d) En general, el polinomio $a_n\, x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ es un infinito de orden n, pues

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n\, x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{x^n} = a_n$$

3.2. Los infinitos: potencial, exponencial y logarítmico

Cuando $x \to +\infty$ las funciones :

$$\mathbf{x^n}(n > 0) \quad \mathbf{a^x}(a > 1), \quad \mathbf{\log_b x}(b > 1)$$

son infinitos pero de distinto orden.

Cuando $x \to +\infty$, la exponencial a^x con $(a > 1)$ es un infinito de orden superior a la potencial, x^n con $(n > 0)$, cualquiera que sea n. Lo escribiremos con la expresión

$$\mathbf{a^x} \gg \mathbf{x^n} \tag{5}$$

Cuando $x \to +\infty$, la potencial x^n con $(n > 0)$, es un infinito de orden superior al logaritmo de x , $log_b\, x$ para cualquier base $(b > 1)$. Lo escribimos con la expresión

$$\mathbf{x^n} \gg \mathbf{\log_b x} \tag{6}$$

► **Aviso** La comparación del crecimiento potencial exponencial puede sorprender. Si construimos una tabla para las funciones $1{,}001^x$ con x^4.

Comparación de $1{,}001^x$ con x^4			
x	$\mathbf{1{,}001^x}$	x^4	$\dfrac{1{,}001^x}{x^4}$
1	1.001	1	1.001
100	1,11E+00	1,00E+08	1,11E-08
5000	1,48E+02	6,25E+14	2,37E-13
30000	1,05E+13	8,10E+17	1,30E-05
47000	2,52E+20	4,87E+18	5,17E+01
100000	2,55E+43	1,00E+20	2,56E+23

vemos como $1{,}001^x$ llega a superar a x^4, y el cociente se hace tan grande como queramos.

Ejemplo 3.3. Con la comparación de infinitos podemos hacer de forma inmediata algunos límites :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{4x^2} = \frac{+\infty}{+\infty} = \infty \qquad \lhd\; e^{3x} \gg x^2$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{4x^2} = \frac{+\infty}{+\infty} = \infty \qquad \lhd\; e^{3x} \gg x^2$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{e^{x}} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0 \qquad \lhd\; e^{x} \gg x^2$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\, x^8 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^8}{e^{x}} = 0 \qquad \lhd\; e^{x} \gg x^8$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty \qquad \lhd\; x \gg \ln x$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{15}+2x^7}{2^{x}} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0 \qquad \lhd\; 2^{x} \gg x^{15}$$

Ejercicio 9. Usar la comparación de infinitos para hallar los límites:

$a)$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^6)}{x^2}$ $\qquad$ $b)$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{e^{-x}}$ $\qquad$ $c)$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\, x^3\, e^{-x}$

Inicio del Test Cuando $x \to +\infty$, comparar el orden de los infinitos:

1. Indica el infinito de mayor orden:

(a) x^2 (b) x^3 (c) x (d) $x^{2,56}$

2. Indica el infinito de mayor orden:

(a) x^3 (b) $x(1+4x)$ (c) $\ln x^4$

3. Indica el infinito de mayor orden:

(a) x^{22} (b) $\ln x^{100}$ (c) e^x

4. Indica el infinito de mayor orden:

(a) 4^x (b) 2^x (c) e^x

5. Indica el infinito de mayor orden:

(a) x^3 (b) $x^{2,75}$ (c) $x^{2,99}$

6. El límite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1,002}}{\ln x}$ es

(a) $+\infty$ (b) 0 (c) 1

Final del Test Puntos:

Ejemplo 3.4. Aplicamos cuando sea necesario los anteriores resultados para el cálculo de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x^6)}{x^2} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0 \qquad \triangleleft\ x^6 \gg \ln(1+x^6)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5}{e^{-x}} = \frac{+\infty}{0} = +\infty \qquad \triangleleft$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\ \ln\ x^3 = 0\cdot\infty = 0 \qquad \triangleleft\ e^x \gg \ln(x^3)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{1,002}}{\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty \qquad \triangleleft\ x^{1,002} \gg \ln x$$

$$\lim_{x\to o^+} x^2\ \ln\ x = 0\cdot(-\infty) = 0 \qquad \triangleleft\ x^2 \gg \ln x$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{54}}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0 \qquad \triangleleft\ e^x \gg x^{54}$$

Test. El límite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{200}}{e^x}$ es

(a) $+\infty$ (b) 0 (c) 1

4. Cálculo de límites $f(x)^{g(x)}$

Si no hay problemas de indeterminación , el cálculo de dichos límites se realiza por paso al límite

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

Ejemplo 4.1.

- $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x}\right)^{x} = (2)^{+\infty} = +\infty$$
- $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{3x}\right)^{x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{+\infty} = 0$$
- $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{3x}\right)^{-2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\infty} = +\infty$$
- $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+1}{3x-1}\right)^{-x} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-\infty} = 0$$
- $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+1}{8x-1}\right)^{-x} = \left(\frac{5}{8}\right)^{-\infty} = +\infty$$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

4.1. Casos indeterminados de límites $f(x)^{g(x)}$

Teniendo en cuenta que toda potencia se puede escribir como una potencia de base el número e, ya que $a^b = e^{b\,\ln a}$, podemos escribir

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\,\ln f(x)}$$

Y de esta forma expresar el límite

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\,\ln f(x)}} \tag{7}$$

De esta forma sabremos cuando tenemos casos indeterminados

Casos Indeterminados				
$(0)^0$	$e^{0\,\ln 0}$	$e^{0\,(-\infty)}$	$e^{?}$	Indeterminado
$(0)^{+\infty}$	$e^{+\infty\,\ln 0}$	$e^{+\infty\,(-\infty)}$	$e^{-\infty}$	$\mathbf{0}$
$(0)^{-\infty}$	$e^{-\infty\,\ln 0}$	$e^{-\infty\,(-\infty)}$	$e^{+\infty}$	$+\infty$
$(\infty)^0$	$e^{0\,\ln\infty}$	$e^{0\,(\infty)}$	$e^{?}$	Indeterminado

Ejemplo 4.2. Hallar $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/x}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1/x} = 0^{+\infty} \qquad \text{de la ecuación } 7$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x}} = e^{-\infty/0^+} = e^{-\infty} = \mathbf{0}$$

□

Ejemplo 4.3. Hallar $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\ln x}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x} = 0^{-\infty} \qquad \text{de la ecuación } 7$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x \ln x} = e^{-\infty(-\infty)} = e^{+\infty} = +\infty$$

□

Ejemplo 4.4. Hallar $\lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{1}{x})^{\ln x}$

Solución:

$$\lim_{x\to +\infty} (\frac{1}{x})^{\ln x} = 0^{+\infty} \qquad = \mathbf{0}$$

□

MATEMATICAS
2º Bachillerato
r=A+λu
A
δ
B
s=B+μv
CIENCIAS

MaTEX

LÍMITES

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Inicio del Test Por la comparación de infinitos, determinar los límites:

1. El $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4 - x^3)$ es:

(a) 0 (b) $+\infty$ (c) $-\infty$

2. El $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4 - 5x^6)$ es:

(a) 0 (b) $+\infty$ (c) $-\infty$

3. El $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x - x^{30})$ es:

(a) 0 (b) $+\infty$ (c) $-\infty$

4. El $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{2^x}$ es:

(a) 0 (b) $+\infty$ (c) $-\infty$

5. El límite $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{0,002}\ln x^{40}$ es

(a) $+\infty$ (b) 0 (c) 1

Final del Test Puntos:

Inicio del Test Determinar de forma directa los límites:

1. El $\lim\limits_{x \to 0^+} x \cdot \ln x$ es:

(a) 0 (b) $-\infty$ (c) $-\infty$ (d) 1

2. El $\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ es:

(a) 0 (b) ∞ (c) No existe (d) 1

3. El $\lim\limits_{x \to 0^+} x \cdot \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ es:

(a) 1 (b) 0 (c) ∞ (d) $\nexists$

4. El $\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ es:

(a) 1 (b) 0 (c) ∞ (d) $\nexists$

5. El límite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{200}}{e^x}$ es

(a) $+\infty$ (b) 0 (c) 1

Final del Test

Puntos: Correctas

Ejercicio 10. Indicar si las siguientes funciones son infinitos:

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{3\,\mathrm{sen}\,2x}{4x}$

b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{5x^2}$

c) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}\,x\cdot\tan x}{1-\cos x}$

d) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{2-2x}$

e) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{1-e^x}$

f) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\mathrm{sen}\,x}{\ln\cos x}$

Ejercicio 11. Usa infinitésimos equivalentes, cuando sea posible, para hallar:

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x^2}$

b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{arcsen\,x^2}{\ln(1-x^2)}$

c) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x}{\mathrm{sen}(\tan x)}$

d) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x}$

e) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

f) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}\,x\tan x}{x\ \mathrm{sen}\,x}$

Ejercicio 12. Usa infinitésimos equivalentes, cuando sea posible, para hallar:

a) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} x^{3/2}\ \mathrm{sen}\,\frac{1}{x}$

b) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\ \mathrm{sen}(x-1)}{1-\cos(x-1)}$

c) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{x\cdot\mathrm{sen}(x^2+x)}{3x\cdot\mathrm{sen}\,x}$

d) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x^2\ \mathrm{sen}^2\ 3x}{x\,\mathrm{sen}^3\ 2x}$

Ejercicio 13. Usa el orden de infinitos, cuando sea posible, para hallar:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2^x$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+2^x$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 4^x-2^x$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} 4^x-2^x$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x^5-x^2$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-\ln x$

Ejercicio 14. Resolver por la técnica del número e cuando sea necesario:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\dfrac{1}{x})^x$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{1+2x}{2x})^x$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{1+2x}{x})^x$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{1+2x}{5x})^x$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{1+x}{2+x})^{5x}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{1-x}{2-x})^x$

Ejercicio 15. Hallar:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^x$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x)^{\operatorname{sen} x}$

Ejercicio 16. Hallar $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x}$

Ejercicio 17. Hallar $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{tg\, x}$

5. Regla de L'Höpital

En este apartado se explica un método para el cálculo de límites con ayuda de la derivada. Por ello es conveniente que lo realices cuando hayas estudiado el capítulo de derivadas

Teorema 5.1. (**Regla de L'Höpital**)
Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en el intervalo (a, b) y tal que $g'(x)$ no se anula en (a, b).

$$\left.\begin{array}{c} \text{Si } \lim\limits_{x\to c} f(x) = 0 \\ \text{y } \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0 \\ \text{y } \exists \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Si no existe $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ no podemos afirmar nada sobre $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 5.1. Hallar $\lim_{x\to 0} \dfrac{3\operatorname{sen} 2x}{4x}$ con la regla de L'Höpital

Solución: Como

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\operatorname{sen} 2x}{4x} = \frac{0}{0} \overset{(L'H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6\ \cos 2x}{4} = \mathbf{\frac{6}{4}}$$

□

Ejemplo 5.2. Hallar $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ con la regla de L'Höpital

Solución: Como

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} &= \frac{0}{0} \\ \overset{(L'H)}{=} \quad \lim_{x\to 0} \frac{2\ \operatorname{sen} 2x}{2x} &= \frac{0}{0} \\ \overset{(L'H)}{=} \quad \lim_{x\to 0} \frac{4\ \cos 2x}{2} &= \mathbf{2} \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.3. Hallar $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{x+\operatorname{sen} x}$ con la regla de L'Höpital

Solución: Como

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+\operatorname{sen} x} = \frac{0}{0} \overset{(L'H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

□

MATEMATICAS
2º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
LÍMITES
◄◄ ►►
◄ ►
◄ Doc Doc ►
Volver Cerrar

- **Caso $\frac{\infty}{\infty}$**

  Cuando $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, en los límites de la forma:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

también podemos aplicar la regla de L'Höpital.

Ejemplo 5.4. Hallar $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x}$ con la regla de L'Höpital

Solución: Como

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} &= \frac{\infty}{\infty} \\
&\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \\
&\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \\
&\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{e^x} = \frac{6}{\infty} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

□

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

- **Caso** $0 \cdot \infty$

Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, podemos aplicar la regla de L'Höpital, pasando a uno de los casos anteriores, dividiendo por el inverso de uno de los factores de la siguiente forma

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0 \cdot \infty = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0}$$

Ejemplo 5.5. Hallar $\lim_{x \to +0} x^2 \cdot \ln x$ con la regla de L'Höpital

Solución: Como

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +0} x^2 \cdot \ln x &= 0 \cdot \infty \\
&= \lim_{x \to +0} \frac{\ln x}{x^{-2}} = \frac{\infty}{\infty} \\
&\overset{(L'H)}{=} \lim_{x \to +0} \frac{1/x}{-2x^{-3}} \\
&= \lim_{x \to +0} -\frac{1}{2}x^2 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$\square$

Doc Doc
Volver Cerrar

- **Caso** $\infty - \infty$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, podemos aplicar la regla de L'Höpital, pasando a uno de los casos anteriores de la siguiente forma

$$\lim_{x\to a} f(x) - g(x) = \infty - \infty = \lim_{x\to a} \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}} = \frac{0}{0}$$

Ejemplo 5.6. Hallar $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ con la regla de L'Höpital

Solución: Como

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} &= \boxed{\infty - \infty} \\ = \quad & \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \cdot \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0} \\ \overset{(L'H)}{=} \quad & \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x \cos x} = \frac{0}{0} \\ \overset{(L'H)}{=} \quad & \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} x}{2\cos x - x \operatorname{sen} x} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.7. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$ con la regla de L'Höpital

Solución: Como

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} &= \boxed{\infty - \infty} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x \cdot \ln(1+x)} = \frac{0}{0} \\
&\overset{(L'H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-x}{(1+x)\cdot \ln(1+x) + x} = \frac{0}{0} \\
&\overset{(L'H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\ln(1+x) + 1 + 1} = -\mathbf{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

□

Ejercicio 18.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-1)^2}{1 - \cos x}$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 19. Hallar los siguientes límites con la regla de L'Höpital.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{5\,x}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-\cos(x-1)}{(\ln x)^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\operatorname{sen} x}{x\,\operatorname{sen} x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1+\operatorname{sen} x-e^x}{(\arctan x)^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\tan x}-\frac{1}{x}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{\tan x-\operatorname{sen} x}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-x-1}{x^2}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\ \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$

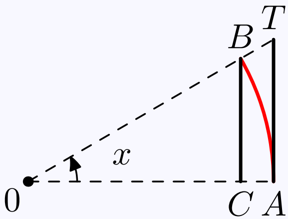
(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\cos\frac{1}{x}\right)^x$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Soluciones a los Ejercicios

Prueba del Teorema 2.1. Cuando $x \to 0$, x y $\operatorname{sen} x$ son equivalentes. Obsérvese la figura de radio 1



$$\overline{CB} < \widehat{AB} < \overline{AT}$$

$$\operatorname{sen} x < x < \tan x$$

Dividiendo por $\operatorname{sen} x$

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0} 1 \le \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \le \lim_{x\to 0} \frac{1}{cos x} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$$

Por otra parte,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

◀

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 1. Los infinitésimos equivalentes en $x = 0$ son:

a) $\operatorname{sen} x^3 \sim x^3$

b) $\tan(x + x^2) \sim x$

c) $\operatorname{sen} 17\, x^3 \sim 17\, x^3$

Ejercicio 1

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Prueba del Teorema 2.2. Equivalencia de $\dfrac{1}{2}x^2 \sim 1 - \cos x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\frac{1}{2}x^2(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos^2 x)}{\frac{1}{2}x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\frac{1}{2}x^2(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \times \lim_{x\to 0} \frac{2}{1+\cos x} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2}_{1} \times \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{2}{1+\cos x}}_{1} = \mathbf{1}$$

Ejercicio 2. Los infinitésimos equivalentes en $x = 0$ son:

a) $1 - \cos x^2 \sim \dfrac{1}{2} x^4$

b) $1 - \cos 3\,x \sim \dfrac{1}{2} 9\,x^2$

c) $1 - \cos \dfrac{x}{2} \sim \dfrac{1}{8} x^2$

d) $1 - \cos \sqrt{x^3} \sim \dfrac{1}{2} x^3$

e) $1 - \cos 3\,x^7 \sim \dfrac{9}{2} x^{14}$

f) $1 - \cos(\operatorname{sen} x) \sim \dfrac{1}{2} x^2$

Ejercicio 2

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Prueba del Teorema 2.3. Equivalencia de $\ln(1+x) \sim x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \ln \lim_{x\to 0} (1 + \frac{1}{\frac{1}{x}})^{\frac{1}{x}} = \ln e = \mathbf{1}$$

Ejercicio 3. Los infinitésimos equivalentes en $x = 0$ son:

$a)$ $\ln(1+\sqrt{x^3}) \sim \sqrt{x^3}$

$b)$ $\ln(1+3x^7) \sim 3x^7$

$c)$ $\ln(1+\operatorname{sen} x) \sim \operatorname{sen} x \sim x$

$d)$ $\ln(3x) \sim -3\,x$

$e)$ $\ln(1+\dfrac{x}{3}) \sim \dfrac{x}{3}$

$f)$ $\ln(1+2\,\tan x) \sim 2\,\tan x \sim 2x$

Ejercicio 3

Prueba del Teorema 2.4. Equivalencia de $e^x - 1 \sim x$
Como

$$\ln(1+x) \sim x \Longrightarrow e^{\ln(1+x)} \sim e^x \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 1 + x \sim e^x \Longrightarrow e^x - 1 \sim x \Longrightarrow$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \mathbf{1}$$

Ejercicio 4. Los infinitésimos equivalentes en $x = 0$ son:

a) $e^{2x^3} - 1 \sim 2x^3$

b) $e^{\operatorname{sen} x} - 1 \sim x$

c) $e^{\tan x^2} - 1 \sim x^2$

Ejercicio 4

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 5. Escribir el infinitésimo equivalente en $x = 0$ a:

$(\operatorname{sen} 5x)_{x=0}$	$\sim$	$5x$
$[\tan(1-x)]_{x=1}$	$\sim$	$1-x$
$\left[1-\cos x^2\right]_{x=0}$	$\sim$	$\dfrac{1}{2}x^4$
$[\arcsin 3x]_{x=0}$	$\sim$	$3x$
$[\ln x]_{x=1}$	$\sim$	$x-1$
$[\arctan \operatorname{sen} x]_{x=0}$	$\sim$	x
$[e^{\operatorname{sen} x}-1]_{x=0}$	$\sim$	x
$[\ln(\cos x)]_{x=0}$	$\sim$	$\cos x - 1 \sim -\dfrac{1}{2}x^2$
$\left[\operatorname{sen} 3\sqrt{x}\right]_{x=0}$	$\sim$	$3\sqrt{x}$

Ejercicio 5

Ejercicio 6. Escribir el infinitésimo equivalente en $x = 0$ a:

Infinitésimo		de	orden
$\operatorname{sen} x$	$\sim$	x	1
$\tan x$	$\sim$	x	1
$1 - \cos x$	$\sim$	$\frac{1}{2}x^2$	2
$4x^3 + x^{50}$	$\sim$	$4x^3$	3
$\ln(1 - x)$	$\sim$	$-x$	1
$e^x - 1$	$\sim$	x	1
$e^{3x^2} - 1$	$\sim$	$3x^2$	2
$\ln(1 - x^3)$	$\sim$	$-x^3$	3
$\operatorname{sen} 3x^2$	$\sim$	$3x^2$	2

Ejercicio 6

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 7. Aplicar equivalencias al cálculo de los siguientes límites:

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{3\,\text{sen}\,2x}{4x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot 2x}{4x}=\frac{3}{2}$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(4x)^2}{5x^2}=\frac{8}{5}$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x\cdot\tan x}{1-\cos x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{\frac{1}{2}x^2}=2$$

d) $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{2-2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2-2x}=-\frac{1}{2}$$

e) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{1-e^x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{-x}=-1$$

f) $$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\text{sen}\,x}{\ln(\cos x)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-2$$

g) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5\,x)}{1-e^{3x}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{-3x}=-\frac{5}{3}$$

h) $$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2\,x}{1-\cos 2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

i) $$\lim_{x\to 0}\frac{5x\;\text{sen}\,2x}{4x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{10\,x^2}{4x^2}=\frac{5}{2}$$

Ejercicio 7

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 8.

a)

$$\lim_{x \to 1} \frac{1+x}{1-x} = \infty$$

b)

$$\lim_{x \to -\infty} 2^x = 0$$

c)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \infty$$

d)

$$\lim_{x \to +\infty 1} 2^x = +\infty$$

e)

$$\lim_{x \to \infty} e^x = +\infty$$

f)

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = +\infty$$

Ejercicio 8

Ejercicio 9.

a)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x^6)}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} = 0$$

b)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^5}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0$$

c)

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\, x^{30}\, 2^{-x} = \infty \cdot 0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{30}}{2^x} = 0$$

Ejercicio 9

Ejercicio 10.

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{3\,\mathrm{sen}\,2x}{4x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cdot 2x}{4x} = \frac{3}{2}$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}16x^2}{5x^2} = \frac{8}{5}$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,x\cdot\tan x}{1-\cos x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{\frac{1}{2}x^2} = 2$$

d) $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{2-2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2(1-x)} = -\frac{1}{2}$$

e) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{1-e^x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{-x} = -1$$

f) $$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\mathrm{sen}\,x}{\ln\cos x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{\cos x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{-\frac{1}{2}x^2} = -2$$

Ejercicio 10

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 11.

$$a)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \infty$$

$$b)\quad \lim_{x\to 0} \frac{arcsen\, x^2}{\ln(1-x^2)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

$$c)\quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(\tan x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$d)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$e)\quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$f)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \tan x}{x\ \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot x}{x\cdot x} = 1$$

Ejercicio 11

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 12.

$$a) \quad \lim_{x\to+\infty} x^{3/2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \infty \cdot 0 = \lim_{x\to+\infty} x^{3/2} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^{1/2} = +\infty$$

$$b) \quad \lim_{x\to1} \frac{(x-1)\operatorname{sen}(x-1)}{1-\cos(x-1)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)\cdot(x-1)}{\frac{1}{2}(x-1)^2} = 2$$

$$c) \quad \lim_{x\to0} \frac{x\operatorname{sen}(x^2+x)}{3x\operatorname{sen} x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to0} \frac{x(x^2+2x)}{3x\cdot x} = \frac{2}{3}$$

$$d) \quad \lim_{x\to0} \frac{x^2\operatorname{sen}^2 3x}{x\operatorname{sen}^3 2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to0} \frac{x^2\cdot 9x^2}{x\cdot 8x^3} = \frac{9}{8}$$

Ejercicio 12

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 13.

a) $$\lim_{x\to+\infty} x^2 + 2^x \quad = +\infty + \infty = +\infty$$

b) $$\lim_{x\to-\infty} x^2 + 2^x \quad = +\infty + 0 = +\infty$$

c) $$\lim_{x\to+\infty} 4^x - 2^x \quad = +\infty - \infty = - + \infty \qquad (4^x \ggg 2^x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 4^x \left(1 - (\frac{2}{4})^x\right) = \infty(1-0) = \infty$$

d) $$\lim_{x\to-\infty} 4^x - 2^x \quad = 0 - 0 = 0$$

e) $$\lim_{x\to+\infty} \ln x^5 - x^2 = +\infty - \infty = -\infty \qquad (x^n \ggg \ln x)$$

f) $$\lim_{x\to+\infty} e^x - \ln x \quad = +\infty - \infty = \infty \qquad (e^x \ggg \ln x)$$

Ejercicio 13

Ejercicio 14.

$$a)\quad \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = 1^\infty = e^{\displaystyle\lim_{x\to\infty} x(1+\frac{1}{x}-1)} = \boxed{\mathbf{e}}$$

$$b)\quad \lim_{x\to+\infty}(\frac{1+2x}{2x})^x = 1^\infty = e^{\displaystyle\lim_{x\to\infty} x(\frac{1+2x}{2x}-1)} = \boxed{\sqrt{e}}$$

$$c)\quad \lim_{x\to+\infty}(\frac{1+2x}{x})^x = 2^{+\infty} = \boxed{+\infty}$$

$$d)\quad \lim_{x\to+\infty}(\frac{1+2x}{5x})^x = (\frac{2}{5})^{+\infty} = \boxed{\mathbf{0}}$$

$$e)\quad \lim_{x\to+\infty}(\frac{1+x}{2+x})^{5x} = 1^\infty = e^{\displaystyle\lim_{x\to\infty} 5x(\frac{1+x}{2+x}-1)} = \boxed{e^{-5}}$$

$$f)\quad \lim_{x\to+\infty}(\frac{1-x}{2-x})^x = 1^\infty = e^{\displaystyle\lim_{x\to\infty} x(\frac{1-x}{2-x}-1)} = \boxed{\mathrm{e}}$$

Ejercicio 14

MATEMATICAS 2º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
LÍMITES
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 15.

a)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{x} = 1^{\infty} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x(\frac{3x+2}{3x-1}-1)} = $$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x}{3x-1}} = \boxed{\mathbf{e}}$$

b)

$$\lim_{x\to 0^+}(x)^{\operatorname{sen} x} = 0^0 = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x\cdot\ln x} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\ln x} = (x \ggg \ln x)$$

$$= e^0 = \boxed{\mathbf{1}}$$

Ejercicio 15

Doc Doc
Volver Cerrar

Ejercicio 16.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x} &= 1^\infty && \triangleleft\ (7) \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}(\cos x - 1)} && \triangleleft\ 1-\cos\alpha\sim\tfrac{1}{2}\alpha^2 \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x}} && \triangleleft\ (simplificando) \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{2}x} \\
&= e^0 = \boxed{\mathbf{1}}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 16

Ejercicio 17.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} &= \infty^0 \\
&= e^{\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \tan x \cdot \ln \frac{1}{x}} \\
&= e^{\displaystyle\lim_{x\to 0^+} -\tan x \cdot \ln x} \\
&= e^{\displaystyle\lim_{x\to 0^+} -x \cdot \ln x} \\
&= e^0 = \boxed{\mathbf{1}}
\end{aligned}$$

Ejercicio 17

Ejercicio 18.

a)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\boxed{\frac{0}{0}}$$
$$\stackrel{(L'H)}{=}\quad\lim_{x\to 1}\frac{2\,x}{1}=\mathbf{2}$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)^2}{1-\cos x}=\boxed{\frac{0}{0}}$$
$$\stackrel{(L'H)}{=}\quad\lim_{x\to 0}\frac{2\,(x-1)}{\operatorname{sen}x}=\frac{0}{0}$$
$$\stackrel{(L'H)}{=}\quad\lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos x}=\mathbf{2}$$

Ejercicio 18

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 19(a) Como

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{5\,x} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\stackrel{(L'H)}{=} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{5} = \mathbf{\frac{1}{5}}$$

□

Ejercicio 19(b) Como

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{1-\cos(x-1)}{(\ln x)^2} &= \boxed{\frac{0}{0}} \\
&\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{2\,\frac{\ln x}{x}} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x\,\operatorname{sen}(x-1)}{2\,\ln x} = \frac{0}{0} \\
&\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1) + x\,\cos(x-1)}{2/x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 19(c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\operatorname{sen} x}{x\ \operatorname{sen} x}=\boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\overset{(L'H)}{=}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\cos x}{\operatorname{sen} x+x\ \cos x}=\frac{0}{0}$$

$$\overset{(L'H)}{=}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{(1+x)^2}+\operatorname{sen} x}{2\ \cos x-x\ \operatorname{sen} x}=-\mathbf{\frac{1}{2}}$$

$\square$

Ejercicio 19(d)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1+\operatorname{sen} x - e^x}{(\arctan x)^2} &= \boxed{\frac{0}{0}} \\
\stackrel{(L'H)}{=} \quad & \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^x}{2\,\arctan x \frac{1}{1+x^2}} = \frac{0}{0} \\
(\longrightarrow) \quad & \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1 \\
= \quad & \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^x}{2\,\arctan x} = \frac{0}{0} \\
\stackrel{(L'H)}{=} \quad & \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x - e^x}{\frac{2}{1+x^2}} = -\mathbf{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

□

Ejercicio 19(e)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x} &= \boxed{\infty - \infty} \\
= \quad & \lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{x \, \tan x} = \frac{0}{0} \\
\overset{(L'H)}{=} \quad & \lim_{x\to 0} \frac{1 - (1 + \tan^2 x)}{\tan x + x\,(1 + \tan^2 x)} = \frac{0}{0} \\
\overset{(L'H)}{=} \quad & \lim_{x\to 0} \frac{-2\tan x\,(1 + \tan^2 x)}{2(1 + \tan^2 x) + x\,2\tan x\,(1 + \tan^2 x)} \\
= \quad & \lim_{x\to 0} \frac{-\tan x}{1 + x \, \tan x} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 19(f)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\tan x - \operatorname{sen} x} &= \boxed{\frac{0}{0}} \\
&\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{(1+\tan^2 x) - \cos x} = \frac{0}{0} \\
&\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2\tan x\,(1+\tan^2 x) + \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0} \\
&\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2(1+\tan^2 x)^2 + 4\tan^2 x\,(1+\tan^2 x) + \cos x} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 19(g)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\stackrel{(L'H)}{=} \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2\,x} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{(L'H)}{=} \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

□

Ejercicio 19(h)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\stackrel{(L'H)}{=} \quad \lim_{x\to 0} \frac{2\,x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x^2 \, \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$$

$$= \quad \lim_{x\to 0} \frac{2\,x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$$

Este límite no existe pues no existe $\lim\limits_{x\to 0} \cos \dfrac{1}{x}$. Es decir L'Höpital no resuelve el límite. Si volvemos al inicio y le escribimos como

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{x}{\operatorname{sen} x}}_{1} \cdot \underbrace{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}}_{1} = \mathbf{1}$$

$\square$

Ejercicio 19(i)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x} = \boxed{1^{\infty}}$$

$$= \mathbf{e}^{\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)}$$

hallamos

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\left(\cos\frac{1}{x}-1\right) = \boxed{\infty\cdot 0}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{(L'H)}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

solución $e^0 = \mathbf{1}$ □

Ejercicio 19(j)

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}} = \boxed{1^{\infty}}$$

$$= \mathbf{e}^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot(\cos 2x - 1)}$$

hallamos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x - 1}{x} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-2\ \text{sen}\, 2x}{1} = 0$$

solución $e^0 = \mathbf{1}$ □

Soluciones a los Tests

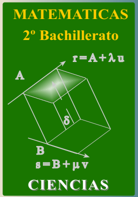
Solución al Test:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{200}}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = 0$$

pues

$$e^x \gg x^a \qquad a > 0$$

Final del Test



MaTEX

LÍMITES

Índice alfabético

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar