Proyecto MaTEX

Derivadas

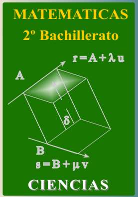
Fco Javier González Ortiz

Directorio

- Tabla de Contenido
- Inicio Artículo

2 de junio de 2004

Versin 1.00



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Tabla de Contenido

1. **Introducción**
   1.1. **El problema de la tangente**
      • Idea intuitiva de la reta tangente • Ecuación de la reta tangente
2. **Definición de derivada en un punto**
      • Derivabilidad y continuidad • Derivadas laterales
3. **Derivada en un intervalo**
   3.1. **Función Derivada**
4. **Reglas de Derivación**
      • Derivada de una constante • Derivada de la potencia • Regla de la suma • Regla del producto • Regla del cociente • Regla de la cadena
5. **Derivadas de las funciones trascendentes**
      • Trigonométricas • Exponenciales • Logarítmos • Derivadas Logarítmicas
6. **Regla de la inversa**
      • Derivadas de Arcos trigonométricos

Soluciones a los Ejercicios

Soluciones a los Tests

1. Introducción

Los científicos de los últimos años del siglo XVII dedicaron gran parte de su tiempo y energía a resolver el problema de la tangente que tiene relación en cuestiones como las siguientes:

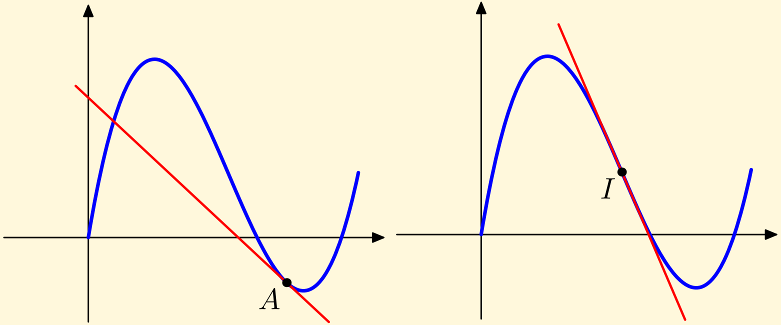
- En óptica, el ángulo con el que un rayo de luz incide en una superficie de una lente está definida en términos de la tangente a la superficie.
- En física, la dirección de un cuerpo en movimiento en un punto de su recorrido es la de la tangente en ese punto.
- En geometría, al ángulo entre dos curvas que intersecan es el ángulo entre las tangentes en el punto de intersección.
- ¿Cómo encontraremos la ecuación de la tangente? Usaremos el método ya desarrollado por Fermat en 1629.

El concepto de derivada es el fundamento del Cálculo. La definición de derivada puede abordarse de dos formas. Una es geométrica (como la pendiente de una curva) y la otra es física (como razón de cambio).

1.1. El problema de la tangente

- **Idea intuitiva de la reta tangente**

Se llama tangente a una curva en un punto, a la recta que pasa por el punto con la misma dirección que la curva.
¿Puede la recta tangente cortar a la curva en más de un punto?.
¿Puede atravesar la recta tangente a la curva por el punto de tangencia?.



Las figuras muestran la respuesta afirmativa a ambas preguntas.

A continuación veremos como se determina la pendiente de la recta tangente.

• Ecuación de la reta tangente

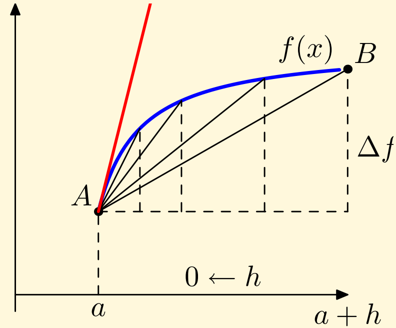
Dada una función $y = f(x)$ y un punto $A(a, f(a))$ del grafo de la función se trata de determinar la pendiente de la recta tangente al grafo de la función en el punto A. Consideremos la recta secante desde A a B. Siendo los puntos $A(a, f(a))$ y $B(a+h, f(a+h))$,

la secante AB tiene pendiente

$$m = \frac{\triangle f}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

A medida que $h \to 0$, $B \to A$, y definimos la pendiente de la tangente m_{tan} como

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Esta pendiente la escribiremos como $f'(a)$ quedando la ecuación de la tangente de la forma

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x - a) \qquad (1)}$$

2. Definición de derivada en un punto

Definición 2.1 *Sea f una función y $a \in Dom(f)$. Definimos derivada de f en $x = a$ al siguiente límite cuando existe y es finito*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{2}$$

Observaciones:

- Cuando dicho límite sea infinito se dice que la función no es derivable, aunque tiene derivada infinita. (Gráficamente significa que la recta tangente en ese punto es vertical).
- Para que la derivada exista, la función tiene que estar definida en un entorno del punto.
- Observar que la definición de derivada coincide con la definición de pendiente de la recta tangente y, con la definición de variación instantánea
- No olvidar que la derivada es un límite, aunque buscaremos reglas para calcular derivadas sin tener que hacer dicho límite.

Ejemplo 2.1. Hallar en $x = 2$ la tangente a la curva $f(x) = x^2$.

Solución: El punto de la curva en $x = 2 \Longrightarrow f(2) = 2^2 = 4$, $A(2, 4)$. La pendiente de la tangente es

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h \to 0} (4 + h) = 4 \end{aligned}$$

Siendo la recta tangente

$$y - 4 = 4(x - 2)$$

□

Ejemplo 2.2. Hallar en $x = 1$ la tangente a la curva $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Solución: El punto de la curva en $x = 1 \Longrightarrow f(1) = \dfrac{1}{1} = 1$, $A(1, 1)$. La pendiente de la tangente es

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{(1+h)\,h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{1+h} = -1 \end{aligned}$$

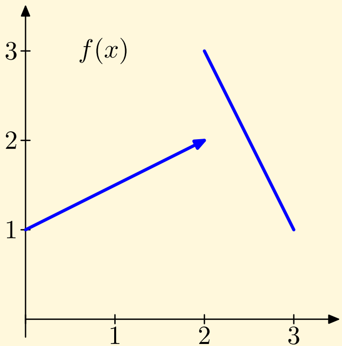
Siendo la recta tangente

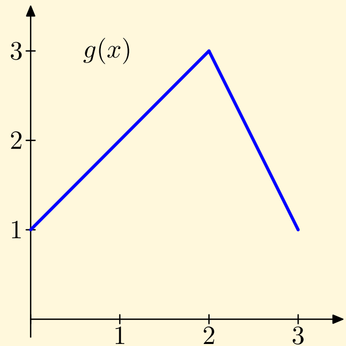
$$y - 1 = -(x - 1)$$

□

• Derivabilidad y continuidad

En el capítulo anterior se estudió la continuidad de las funciones. La derivabilidad de una función es una propiedad más «fuerte» que la continuidad, ya que no todas las funciones continuas tienen tangente en un punto.
En al figura se representan dos funciones $f(x)$ y $g(x)$. En el punto $x = 2$ dichas funciones no son derivables y no tienen tangente en dicho punto. En $f(x)$ por no ser continua y en $g(x)$ porque cambia la pendiente «bruscamente» en dicho punto.





Teorema 2.1. Si $f(x)$ es derivable en $x = a$ entonces es continua en a.

- **Derivadas laterales**

Definición 2.2 *Sea f una función y $a \in Dom(f)$ decimos que f es derivable en $x = a$ cuando*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \textit{existe}$$

y en este caso, definimos la derivada en $x = a$, $f'(a)$ como

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}} \tag{3}$$

En los ejemplos anteriores hemos calculado la pendiente de la tangente a una función con esta definición. Puede ocurrir que dicha pendiente no esté definida ya que el límite anterior no siempre existe y los límites laterales pueden ser distintos, lo que nos lleva a considerar los limites por la izquierda y por la derecha.

Definición 2.3 *Sea f una función y $a \in Dom(f)$*

1. *Definimos la derivada por la izquierda de f en a cuando*

$$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \textit{existe} \tag{4}$$

2. *Definimos la derivada por la derecha de f en a cuando*

$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \textit{existe} \tag{5}$$

MATEMATICAS 2º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
DERIVADAS
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Teorema 2.2. Sea f una función definida en un intervalo abierto conteniendo a x, entonces $f'(x)$ existe si y solo si existen las derivadas laterales $f'(x^-)$ y $f'(x^+)$ y son iguales. En este caso

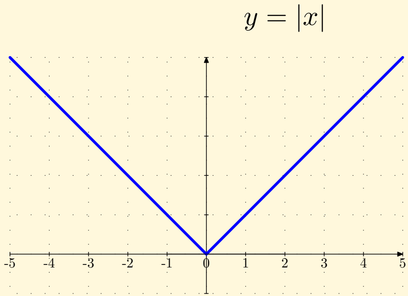
$$f'(x) = f'(x^-) = f'(x^+)$$

Demostración: Se deduce de la propia definición de límite, ya que para que un límite exista deben existir los límites laterales y ser iguales. □

Ejemplo 2.3. ¿Es derivable $f(x) = |x|$ en $x = 0$?.

Solución: Siendo $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \leq 0 \\ x & > 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \\ f'(0^+) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \end{aligned}$$



Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ la función no es derivable en $x = 0$

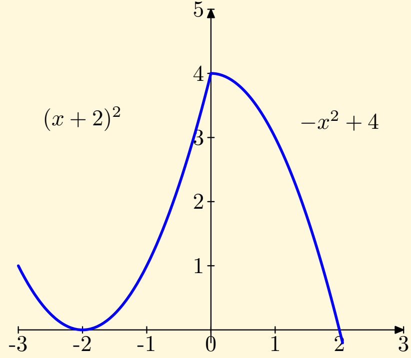
□

Ejemplo 2.4. Analizar gráfica y analíticamente la derivada en $x = 0$ de $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & x < 0 \\ -x^2 + 4 & 0 \leq x \end{cases}$$

Solución: Hallamos las derivadas laterales $f'(0^-)$y $f'(0^+)$

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0^-} \frac{(h+2)^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2 + 4h}{h} = \mathbf{4} \\ f'(0^+) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{(-h^2 + 4) - 4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} (-h) = \mathbf{0} \end{aligned}$$



Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ la función no es derivable en $x = 0$.
En el gráfico se aprecia que la función es continua pero no es derivable.. En el punto $x = 0$ presenta un «pico» o cambio de dirección. □

Ejercicio 1. Estudiar la derivabilidad de $f(x) = x - |1 - x|$ en $x = 1$.

Ejercicio 2. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & x \geq 0 \\ (x+2)^2 & x < 0 \end{cases}$$

¿Es derivable en $x = 0$?.

Ejercicio 3. Hallar a y b para que $f(x)$ sea una función derivable en $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} a(1 + e^x) & x < 0 \\ b + ln(x+1) & x \geq 0 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Probar que $f(x)$ es derivable en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{1+x}{2} & 1 \leq x \end{cases}$$

Ejercicio 5. Hallar a y b para que $f(x)$ sea una función derivable en $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} Ln(a + \operatorname{sen} x) & x < 0 \\ x^3 + ax + b & x \geq 0 \end{cases}$$

Ejercicio 6. Calcularlos valores de a y c para que $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + c & x \leq 1 \\ \ln x & 1 < x \end{cases}$$

MATEMATICAS 2º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
DERIVADAS
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

sea derivable en $x = 1$, y en ese caso dar la ecuación de la tangente a la gráfica en $x = 1$.

Ejercicio 7. Hallar a para que $f(x)$ sea una función derivable

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & 0 < x \leq 1 \\ a\,(1 - e^{1-x}) & 1 \leq x \end{cases}$$

Ejercicio 8. Dada la función

$$f(x) = x^2 \, sen \, \frac{1}{x}$$

si definimos $f(0) = 0$ demostrar que es derivable en $x = 0$.

Test. Si $f(x)$ es continua en $x = a$ entonces es derivable.

(a) Si (b) No

Test. Si $f(x)$ es derivable en $x = a$ entonces es continua.

(a) Si (b) No

3. Derivada en un intervalo

Definición 3.1 *Según sea el intervalo se tiene*

- *Sea f una función y el intervalo abierto (a, b), decimos que f es derivable en (a, b) cuando es derivable en todo punto de (a, b).*

- *Sea f una función y el intervalo cerrado $[a, b]$, decimos que f es derivable en $[a, b]$ cuando es derivable en todo punto de (a, b) y existen $f'(a^+)$ y $f'(b^-)$.*

3.1. Función Derivada

Definición 3.2 *Sea f una función. Si calculamos la derivada de f en cualquier x que se cumpla*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \textit{existe}$$

hemos definido la función derivada $f'(x)$ de la función f.

En general se tiene que $Dom(f') \subseteqq Dom(f)$

Ejercicio 9. Sea la función $f(x) = \sqrt{x}$. Demuestra con la definición de derivada que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

y comprobar que $Dom(f') \subseteqq Dom(f)$.

A continuación vamos a obtener las reglas de derivación de las funciones elementales

4. Reglas de Derivación

• Derivada de una constante

Teorema 4.1. Sea f una función constante $f(x) = c \quad \forall x \in R$, siendo c un número real, entonces

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in R$$

• Derivada de la potencia

Teorema 4.2. (Regla de la potencia) Consideremos la función $f(x) = x^n$, para algún número natural $n \in N$. Entonces

$$f'(x) = n x^{n-1} \qquad x \in R \tag{6}$$

Nota al Teorema. La regla anterior se extiende y funciona cuando el exponente es cualquier **número real**.

Ejemplo 4.1. Hallar las derivadas de

$$f(x) = x^6 \qquad g(x) = x^{-5} \qquad h(x) = x^{5/3}$$

Solución: $f'(x) = 6x^5 \qquad g'(x) = -5x^{-6} \qquad h'(x) = \dfrac{5}{3}x^{2/3}$ $\square$

Ejercicio 10. Calcular las derivadas.

a) $f(x) = 2x^{13}$ *b*) $f(x) = \sqrt{x^3}$

c) $f(x) = \sqrt[5]{x^7}$ *d*) $f(x) = 2\,x^{-30}$

• Regla de la suma

Teorema 4.3. (Derivada de la suma) Sean las funciones $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Entonces

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x) \tag{7}$$

$$\boxed{[u + v]' = u' + v'} \tag{8}$$

Ejemplo 4.2. Hallar las derivadas de

$$f(x) = x^3 + x^4 \qquad g(x) = x^2 - x^{-3}$$

Solución:

$$f'(x) = 3x^2 + 4x^3 \qquad g'(x) = 2x + 3x^{-4}$$

□

Ejercicio 11. Calcular las derivadas.

a) $f(x) = 3\,x^2 - 5\,x^{-3}$

b) $f(x) = x^2 - 3,\ x^5$

c) $f(x) = x^{10} + x^{-10}$

d) $f(x) = x - \sqrt[3]{x^5}$

e) $f(x) = x^8 + x^{8,003}$

f) $f(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[5]{x}$

• Regla del producto

Teorema 4.4. (Derivada del producto) Sean las funciones $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Entonces

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{9}$$

$$\boxed{[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'} \tag{10}$$

Ejemplo 4.3. Hallar la derivada del producto

$$f(x) = (x^3 + x^4)(x^2 - x^{-3})$$

Solución:

$$f'(x) = (3x^2 + 4x^3) \cdot (x^2 - x^{-3}) + (x^3 + x^4) \cdot (2x + 3x^{-4})$$

□

Ejercicio 12. Calcular las derivadas.

a) $f(x) = (x^2 + 10)(1 - x^2)$

b) $f(x) = (x + x^2 + 1) \cdot (1 + x)$

c) $f(x) = (x^{10} + 1)(1 - x)$

d) $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot (1 - x^2)$

e) $f(x) = (x^2 + x^3) \cdot (3 + x)$

f) $f(x) = (\sqrt{x^3} + x) \cdot (x - \sqrt[5]{x})$

- **Regla del cociente**

Teorema 4.5. (Derivada del cociente) Sean $u = f(x)$ y $v = g(x)$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \tag{11}$$

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}} \tag{12}$$

Ejemplo 4.4. Hallar la derivada del cociente $f(x) = \dfrac{x^3 + x^4}{x^2 - x^{-3}}$

Solución:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 4x^3)(x^2 - x^{-3}) - (x^3 + x^4)(2x + 3x^{-4})}{(x^2 - x^{-3})^2}$$

$\square$

Ejercicio 13. Calcular las derivadas.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *b*) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{x^{10} + 1}{1 - x}$ *d*) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x + 3}$

• Regla de la cadena

Teorema 4.6. (Regla de la cadena) Sea las funciones $y = f(u)$ y $u = g(x)$. Supongamos que g es derivable en x y f es derivable en u, entonces la función compuesta $f \circ g$ es derivable en x y su derivada es

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)} \tag{13}$$

Ejemplo 4.5. Hallar las derivadas de

$$f(x) = (2x + x^2 + 5)^3 \quad g(x) = (2 - x^{12})^6$$

Solución:

$$f'(x) = 3(2x + x^2 + 5)^2(2 + 2\,x)$$
$$g'(x) = 6(2 - x^{12})^5(-12\,x^{11})$$

$\square$

Ejercicio 14. Calcular las derivadas.

a) $f(x) = (1 + 2\,x)^3$

b) $f(x) = (x + x^2)^3$

c) $f(x) = (x^{10} + 1)^2$

d) $f(x) = (2x^3 + x)^3$

e) $f(x) = x^2(2x^3 + x)^3$

f) $f(x) = (1 - x^2)^3(5 + x)^5$

5. Derivadas de las funciones trascendentes

• Trigonométricas

Teorema 14. Las derivadas trigonométricas elementales son:

(a) $\boxed{(\operatorname{sen} x)' = \cos x}$ (b) $\boxed{(\cos x)' = -\operatorname{sen} x}$ (c) $\boxed{(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}}$

Ejemplo 5.1. Hallar las derivadas de

$$f(x) = \operatorname{sen} 6x \qquad g(x) = \cos(1+x^2) \qquad h(x) = \tan x^3$$

Solución: Del teorema y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$f'(x) = 6\cos 6x \qquad g'(x) = -2x\operatorname{sen}(1+x^2) \qquad h'(x) = \frac{3x^2}{\cos^2 x^3}$$

□

Ejercicio 15. Calcular las derivadas.

a) $f(x) = \operatorname{sen}(3x+1)$

b) $f(x) = \operatorname{sen}(x^3+1)$

c) $f(x) = \operatorname{sen}^3(x^2+1)$

d) $f(x) = \cos(\dfrac{x}{1-x})$

e) $f(x) = \tan(1+2x^2+x^3)$

f) $f(x) = \sec(1-x^2)$

- **Exponenciales**

TEOREMA 15. Las derivadas de la función exponencial son:

(a) $\boxed{(e^x)' = e^x}$

(b) $\boxed{(a^x)' = a^x \ln a \quad (0 < a \neq 1)}$

Ejemplo 5.2. Hallar las derivadas de

$$f(x) = e^{6x} \qquad g(x) = e^{1+x^2} \qquad h(x) = 6^{\operatorname{sen} x}$$

Solución: Del teorema y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$f'(x) = 6\, e^{6x} \qquad g'(x) = 2x\, e^{1+x^2} \qquad h'(x) = 6^{\operatorname{sen} x} \ln 6 \cos x$$

□

Ejercicio 16. Calcular las derivadas.

a) $f(x) = e^{-5x+4x^2}$

b) $f(x) = e^{x \operatorname{sen} x}$

c) $f(x) = e^{1-\operatorname{sen}^2 x}$

d) $f(x) = 2^{\tan 3x}$

e) $f(x) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{x^2+3x}$

f) $f(x) = a^{\operatorname{sen} x+\cos x}$

- **Logarítmos**

TEOREMA 16. Las derivadas de la función logarítmica son:

(a)

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}} \tag{14}$$

(b)

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x\,\ln a}} \tag{15}$$

Ejemplo 5.3. Hallar las derivadas de

$$f(x) = \ln(5x - x^2) \qquad g(x) = \ln(5 - \operatorname{sen} x) \qquad h(x) = \log_3(x^2 + e^x)$$

Del teorema y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$f'(x) = \frac{5 - 2x}{5x - x^2} \qquad g'(x) = \frac{-\cos x}{5 - \operatorname{sen} x} \qquad h'(x) = \frac{1}{\ln 3}\,\frac{2x + e^x}{x^2 + e^x}$$

Ejercicio 17. Calcular las derivadas.

a) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x} + 1)$

b) $f(x) = \ln(x^2 + \operatorname{sen} x)$

c) $f(x) = \ln(x^2\,\operatorname{sen} x)$

d) $f(x) = \ln^2(1 + e^x)$

e) $f(x) = \ln^2(1 + \ln x)$

f) $f(x) = \log_5(\dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x})$

- **Derivadas Logarítmicas**

Dada una función $y = f(x)$, la derivación logarítmica consiste en tomar logaritmos en los dos miembros de la igualdad y derivar, después de simplificar. La derivación logarítmica se aplica:

- Para derivar funciones del tipo $y = f(x)^{g(x)}$.
- Para simplificar la derivación de productos y cocientes.

Ejemplo 5.4. Derivar $y = x^{\operatorname{sen} x}$.

Solución: Tomando ln y derivando en ambos miembros resulta:

$$\ln y = \ln x^{\operatorname{sen} x} \Longrightarrow \ln y = \operatorname{sen} x \cdot \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

y se despeja y',

$$y' = x^{\operatorname{sen} x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$$

□

Ejemplo 5.5. Derivar $y = \cos x^{x}$.

Solución: $\ln y = \ln \cos x^x \Longrightarrow \ln y = x \cdot \ln \cos x$

$$y' = \cos x^{x}\left(\ln \cos x - x\,\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$$

□

6. Regla de la inversa

Teorema 6.1. (Regla de la inversa) Sea la función $f(x)$ y su inversa $f^{-1}(x)$.

$$\boxed{\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}} \tag{16}$$

Ejemplo 6.1. Hallar la derivada de la inversa de $f(x) = x^2$.

Solución: Como

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad x \geq 0$$

De la ecuación (16),

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

□

Ejemplo 6.2. Hallar la derivada de la inversa de $f(x) = e^x$.

Solución: Como

$$f^{-1}(x) = \ln x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{f^{-1}(x)}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

□

- **Derivadas de Arcos trigonométricos**

TEOREMA 17. Las derivadas de los arcos trigonométricos son:

(a) $(\operatorname{arc\,sen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(b) $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(c) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Ejemplo 6.3. Hallar las derivadas de

$$f(x) = \operatorname{arc\,sen} 6x \qquad g(x) = \arctan x^3$$

Solución:

$$f'(x) = \frac{6}{\sqrt{1-(6x)^2}} \qquad g'(x) = \frac{3x^2}{1+(x^3)^2}$$

□

Ejercicio 18. Calcular las derivadas.

a) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(-x)$

b) $f(x) = \arctan(x^2)$

c) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(\ln x + x)$

d) $f(x) = \arccos(1-x)$

e) $f(x) = \arctan(\operatorname{sen} x)$

f) $f(x) = \arctan(\ln x)$

Ejercicio 19. Calcular las derivadas.

a) $f(x) = \ln^2(1 + \cos x)^3$ *b*) $f(x) = \operatorname{sen} x(1 + \cos x)^3$

c) $f(x) = e^{1-\operatorname{sen} x}$ *d*) $f(x) = 8^{x-\ln x}$

Ejercicio 20. Calcular las derivadas.

a) $f(x) = \ln(1 - \sqrt{x})^2$ *b*) $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}}$

Ejercicio 21. Calcular las derivadas.

a) $f(x) = x^2 \cdot \arctan x^{-1/2}$ *b*) $f(x) = x^x$

Ejercicio 22. Calcular las derivadas.

a) $f(x) = (\tan x)^{\operatorname{sen} x}$ *b*) $f(x) = e^x \cdot \sqrt[x]{x}$

Ejercicio 23. Hallar a y b para que $f(x)$ sea una función derivable en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x \leq 1 \\ a\,x + b & 1 < x \end{cases}$$

Ejercicio 24. Dada la función

$$f(s) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

¿Es continua en $x = 0$? ¿Es derivable en $x = 0$? ¿Es continua la función derivada f' en $x = 0$?

Soluciones a los Ejercicios

Prueba del Teorema 2.1. Veamos que la derivabilidad implica la continuidad.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{existe}$$

multiplicando por h

$$\lim_{h\to 0} h \cdot f'(a) = \lim_{h\to 0} h \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} h \cdot f'(a) = \lim_{h\to 0} (f(a+h)-f(a))$$

$$0 = \lim_{h\to 0} (f(a+h)-f(a))$$

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a) \Longrightarrow f(x) \text{ continua en } x = a$$

Ejercicio 1. Siendo $f(x) = x - |1-x| = \left\{ \begin{array}{cc} 2x-1 & \leq 1 \\ 1 & > 1 \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{2(1+h)-1-1}{h} = 2 \\ f'(1^+) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1-1}{h} = 0 \end{aligned}$$

Como $f'(1^-) \neq f'(1^+)$ la función no es derivable en $x=1$. Ejercicio 1

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 2. Siendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & x \geq 0 \\ (x+2)^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0^-} \frac{(h+2)^2 - 4}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2 + 4h}{h} = 4 \\ f'(0^+) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{(h^2 + 4) - 4}{h} = 0 \end{aligned}$$

Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ la función no es derivable en $x = 0$. Ejercicio 2

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 3. Siendo

$$f(x) = \begin{cases} a(1+e^x) & x < 0 \\ b + \ln(x+1) & x \geq 0 \end{cases}$$

- Para que sea continua en $x = 0$

$$f(0^-) = 2\,a = f(0^+) = b \Longrightarrow 2\,a = b$$

- Para que sea derivable en $x = 0$.

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{(a(1+e^h)-2\,a}{h} \stackrel{(1)}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{a\,h}{h} = a \\ f'(0^+) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{b+\ln(h+1)-b}{h} \stackrel{(2)}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \end{aligned}$$

$$f'(0^-) = a = f'(0^+) = 1 \Longrightarrow \boxed{a = 1}$$

Sustituyendo en la ecuación $2\,a = b$, se tiene $\boxed{b = 2}$

(1) $\quad e^h \equiv 1 + h \qquad$ (2) $\quad \ln(1+h) \equiv h$

Ejercicio 3

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 4.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{1+x}{2} & 1 \leq x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \\ &\stackrel{(1)}{=} \lim_{h \to 0^-} \frac{h}{(\sqrt{1+h}+1)h} = \boxed{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1^+) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{2+h}{2} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{2h} = \boxed{1/2} \end{aligned}$$

$$f'(1^-) = f'(1^+) \Longrightarrow \text{ es derivable en } x = 1$$

(1) Por el conjugado. Ejercicio 4

Ejercicio 5. Siendo

$$f(x) = \begin{cases} \ln(a + \operatorname{sen} x) & x < 0 \\ x^3 + ax + b & x \geq 0 \end{cases}$$

- Para que sea continua en $x = 0$

$$f(0^-) = \ln a = f(0^+) = b \Longrightarrow \ln a = b$$

- Para que sea derivable en $x = 0$.

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\ln(a + \operatorname{sen} h) - b}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\ln(a + \operatorname{sen} h) - \ln a}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\ln(1 + \frac{\operatorname{sen} h}{a})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{\operatorname{sen} h}{a}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{a}\frac{\operatorname{sen} h}{h} = \frac{1}{a} \end{aligned}$$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(h^3 + ah + b) - b}{h} = a$$

Igualando $f'(0^-) = f'(0^+)$ se tiene que $\dfrac{1}{a} = a \Longrightarrow a = \pm 1$. Como $b = \ln a$ se descarta $a = -1$, luego para que f sea derivable en $x = 0$, $\boxed{a = 1}$ y $\boxed{b = \ln 1 = 0}$.

Ejercicio 5

Ejercicio 6. Siendo

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+c & x\leq 1 \\ \ln x & 1<x \end{cases}$$

Debe ser continua en $x=1$, luego $f(1^-)=a+c=f(1^+)=0 \Longrightarrow \boxed{c=-a}$.

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{a(1+h)^2+c-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2ah+h^2}{h} = 2\,a \end{aligned}$$

$$f'(1^+)=\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(1+h)-0}{h} \overset{(1)}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

En (1) hemos usado infinitésimos $\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$.
Para que sea derivable en $x=1$,

$$f'(1^-)=2a=f'(1^+)=1 \Longrightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}}$$

Siendo $f(1)=0$ y $f'(1)=1$, la ecuación de la recta tangente en $x=1$ es

$$y=x-1$$

Ejercicio 6

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 7.

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & 0 < x \leq 1 \\ a\,(1 - e^{1-x}) & 1 \leq x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)\,\ln(1+h) - 0}{h} \\ &\stackrel{(1)}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)\,h}{h} = \boxed{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1^+) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{a(1 - e^{-h})}{h} \\ &\stackrel{(2)}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{ah}{h} = a \end{aligned}$$

$$f'(1^-) = f'(1^+) \Longrightarrow \boxed{a = 1}$$

(1) $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$ (2) $e^{\alpha} \sim 1 + \alpha$

Ejercicio 7

MATEMATICAS 2º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
DERIVADAS
Doc Doc
Volver Cerrar

Ejercicio 8. Siendo

$$f(x) = x^2 \, sen \, \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \, sen \, \frac{1}{h} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \, sen \, \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} h \, sen \, \frac{1}{h} \\ &\overset{(1)}{=} \boxed{0} \end{aligned}$$

(1) Infinitésimo por acotada = infinitésimo. Ejercicio 8

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 9.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{0}{0} \\
&\overset{(1)}{=} \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\
&= \lim_{h \to 0^-} \frac{h}{h\,\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\
&= \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

luego

$$f(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Se tiene que $Dom(f) = [0, +\infty)$ y $f'(0)$ no existe, luego el $Dom(f') = (0, +\infty) \subsetneqq Dom(f) = [0, +\infty)$

(1) Por el conjugado. Ejercicio 9

Doc Doc
Volver Cerrar

Prueba del Teorema 4.1. Sea f una función constante $f(x) = c \quad \forall x \in R$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0 \end{aligned}$$

Prueba del Teorema 4.2. Sea $f(x) = x^n$ con $n \in N$. Se tiene que

$$\begin{aligned} f'(x)(x+h) &= (x+h)^n = \\ &= x^n + nx^{n-1}h + h^2\{\text{ polinomio en } h\} \end{aligned}$$

En la diferencia de $f(x+h) - f(x)$ se elimina x^n y queda

$$f(x+h) - f(x) = nx^{n-1}h + h^2\{\text{ polinomio en } h\}$$

luego en la expresión

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = nx^{n-1} + h\{\text{ polinomio en } h\}$$

al ser la derivada $f'(x)$ el límite de esta expresión cuando $h \to 0$, como el segundo sumando

$$\lim_{h \to 0} h\{\text{ polinomio en } h\} = 0$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

◀

Ejercicio 10.

a) Si $f(x) = 2x^{13}$,

$$f'(x) = 26\,x^{12}$$

b) $f(x) = \sqrt{x^3} = x^{3/2}$. Luego

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

c) $f(x) = \sqrt[5]{x^7} = x^{7/5}$. Luego

$$f'(x) = \frac{7}{5}x^{2/5}$$

d) $f(x) = 2\,x^{-30}$. Luego

$$f'(x) = -60\,x^{-31}$$

Ejercicio 10

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Prueba del Teorema 4.3. Siendo $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} &= \\
&= \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\
&= \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{(1)} + \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{(2)}
\end{aligned}$$

Al pasar al límite cuando $h \to 0$,

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \longrightarrow f'(x) \\
(2) \quad & \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \longrightarrow g'(x)
\end{aligned}$$

obteniéndose

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

◀

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 11.

a) Si $f(x) = 3\,x^2 - 5\,x^{-3}$,

$$f'(x) = 6\,x + 15\,x^{-4}$$

b) Siendo $f(x) = x^2 - 3\,x^5$,

$$f'(x) = 2\,x - 15\,x^4$$

c) Si $f(x) = x^{10} + x^{-10}$,

$$f'(x) = 10\,x^9 - 10\,x^{-11}$$

d) Siendo $f(x) = x - \sqrt[3]{x^5}$,

$$f'(x) = 1 - \frac{5}{3}x^{2/3}$$

e) Siendo $f(x) = x^8 + x^{8,003}$,

$$f'(x) = 8x^7 + 8{,}003x^{7{,}003}$$

f) Siendo $f(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[5]{x}$,

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} + \frac{1}{5}x^{-4/5}$$

Ejercicio 11

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Prueba del Teorema 4.4. Siendo $(fg)(x) = f(x)g(x)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} &= \text{ introduciendo } g(x+h)f(x) \\
&= \frac{f(x+h)g(x+h) - g(x+h)f(x) + g(x+h)f(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h)}_{(1)} + \underbrace{f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{(2)}
\end{aligned}$$

Al pasar al límite cuando $h \to 0$,

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) \longrightarrow f'(x)g(x) \\
(2) \quad & f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \longrightarrow f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

obteniéndose

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

◄

Ejercicio 12.

a) Si $f(x) = (x^2 + 10)(1 - x^2)$,

$$f'(x) = (2\,x) \cdot (1 - x^2) + (x^2 + 10) \cdot (-2\,x)$$

b) Siendo $f(x) = (x + x^2 + 1) \cdot (1 + x)$,

$$f'(x) = (1 + 2\,x) \cdot (-2\,x) + (x + x^2 + 1) \cdot (-2)$$

c) Si $f(x) = (x^{10} + 1)(1 - x)$,

$$f'(x) = (10x^9) \cdot (1 - x) + (x^{10} + 1) \cdot (-1)$$

d) Siendo $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot (1 - x^2)$,

$$f'(x) = (2x - 2) \cdot (1 - x^2) + (x^2 - 2x) \cdot (-2x)$$

e) Siendo $f(x) = (x^2 + x^3) \cdot (3 + x)$,

$$f'(x) = (2x + 3x^2) \cdot (3 + x) + (x^2 + x^3) \cdot (1)$$

f) Siendo $f(x) = (\sqrt{x^3} + x) \cdot (x - \sqrt[5]{x})$.

$$f'(x) = (\frac{3}{2}x^{1/2} + 1) \cdot (x - \sqrt[5]{x}) + (\sqrt{x^3} + x) \cdot (1 - \frac{1}{5}x^{-4/5})$$

Ejercicio 12

Prueba del Teorema 4.5. Siendo $(fg)(x) = f(x)g(x)$, se tiene que

$$\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \qquad (\triangleleft \text{ operando})$$

$$= \frac{f(x+h)g(x) - g(x+h)f(x)}{hg(x+h)g(x)} \qquad (\triangleleft \text{ introduciendo } f(x)g(x))$$

$$= \frac{f(x+h)g(x) - g(x)f(x) + g(x)f(x) - g(x+h)f(x)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$= \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\frac{g(x)}{g(x+h)g(x)}}_{(1)} - \underbrace{\frac{f(x)}{g(x+h)g(x)}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{(2)}$$

Al pasar al límite cuando $h \to 0$,

$$(1) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\frac{g(x)}{g(x+h)g(x)} \longrightarrow f'(x)\frac{g(x)}{g(x)^2}$$

$$(2) \quad \frac{f(x)}{g(x+h)g(x)}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)^2}g'(x)$$

obteniéndose la fórmula para la derivada del cociente.

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Ejercicio 13.

a) Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$,

$$f'(x) = \frac{(0)(x) - (1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

b) Si $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$,

$$f'(x) = \frac{(2x)(x) - (x^2+1)(1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

c) Si $f(x) = \dfrac{x^{10}+1}{1-x}$,

$$f'(x) = \frac{(10x^9)(1-x) - (x^{10}+1)(-1)}{(1-x)^2}$$

d) Siendo $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x+3}$,

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+3) - (x^2+x)(1)}{(x+3)^2}$$

Ejercicio 13

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Prueba del Teorema 4.6. Siendo $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, y llamando a

$$\triangle g = g(x+h) - g(x)$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{(f\circ g)(x+h)-(f\circ g)(x)}{h} &= \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} \\
&= \frac{f(g(x)+\triangle g)-f(g(x))}{h} \\
&= \frac{f(g(x)+\triangle g)-f(g(x))}{\triangle g}\,\frac{\triangle g}{h} = \\
&= \underbrace{\frac{f(g(x)+\triangle g)-f(g(x))}{\triangle g}}_{(1)}\,\underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{(2)}
\end{aligned}$$

$$(1)\quad \frac{f(g(x)+\triangle g)-f(g(x))}{\triangle g} \longrightarrow f'(g(x)$$

$$(2)\quad \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \longrightarrow g'(x)$$

◀

Ejercicio 14.

a) Si $f(x) = (1 + 2\,x)^3$,
$$f'(x) = 3(1 + 2\,x)^2\,(2)$$

b) Siendo $f(x) = (x + x^2)^3$,
$$f'(x) = 3(x + x^2)^2(1 + 2\,x)$$

c) Si $f(x) = (x^{10} + 1)^2$,
$$f'(x) = 2(x^{10} + 1)(10\,x^9)$$

d) Siendo $f(x) = (2x^3 + x)^3$,
$$f'(x) = 3(2x^3 + x)^2(6x^2 + 1)$$

e) Si $f(x) = f(x) = x^2(2x^3 + x)^3$,
$$f'(x) = 2x(2x^3 + x)^3 + x^2\,3\,(2x^3 + x)^2(6x^2 + 1)$$

f) Siendo $f(x) = (1 - x^2)^3(5 + x)^5$,
$$f'(x) = 3(1 - x^2)^2(-2x)(5 + x)^5 + (1 - x^2)^3\,5\,(5 + x)^4$$

Ejercicio 14

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Teorema 14(a) Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \frac{0}{0} \qquad & \text{desarrollando} \\
= \quad \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} & = \\
= \quad \operatorname{sen} x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} & = \\
= \quad \operatorname{sen} x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{0} + \cos x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{1} & = \cos x
\end{aligned}
$$

□

Teorema 14(b) Sea $f(x) = \cos x$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{0}{0} \qquad \text{desarrollando}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \cos x}{h} =$$

$$= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} =$$

$$= \cos x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{0} - \operatorname{sen} x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{1} = -\operatorname{sen} x$$

$\square$

Teorema 14(c) Sea $f(x) = \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$. Aplicando la regla del cociente,

$$
\begin{aligned}
(\tan x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' \\
&= \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}
$$

$\square$

Ejercicio 15.

a) Si $f(x) = \operatorname{sen}(3x+1)$.

$$f'(x) = 3\cos(3x+1)$$

b) Si $f(x) = \operatorname{sen}(x^3+1)$.

$$f'(x) = 3x^2\,\cos(x^3+1)$$

c) Si $f(x) = \operatorname{sen}^3(x^2+1)$. Luego

$$f'(x) = 3\operatorname{sen}^2(x^2+1)\cos(x^2+1)\,(2x)$$

d) Si $f(x) = \cos(\dfrac{x}{1-x})$.

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(\frac{x}{1-x})\frac{1}{(1-x)^2}$$

e) Si $f(x) = \tan(1+2x^2+x^3)$,

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(1+2x^2+x^3)}(4x+3x^2)$$

f) Si $f(x) = \sec(1-x^2) = \dfrac{1}{\cos(1-x^2)}$

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen}(1-x^2)\,(-2x)}{\cos^2(1-x^2)}$$

Ejercicio 15

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Teorema 15(a) Sea $f(x) = e^x$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{0}{0} \qquad \text{desarrollando}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} =$$

$$= e^x \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{1} = e^x$$

$\square$

Teorema 15(b) Sea $f(x) = a^x$ con $(a > 1)$

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} &= \frac{0}{0} && \triangleleft \text{ (desarrollando)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = && \triangleleft \text{ (factor)} \\
&= a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} && \triangleleft \quad a^h = e^{h \ln a} \\
&= a^x \lim_{h\to 0} \frac{e^{h \ln a} - 1}{h} && \triangleleft \quad e^{\alpha(x)} \sim 1 + \alpha(x) \\
&= a^x \lim_{h\to 0} \frac{h \ln a}{h} && \triangleleft \text{ (simplificando)} \\
&= a^x \ln a
\end{aligned}
$$

$\square$

Ejercicio 16.

a) Si $f(x) = e^{-5x+4x^2}$.

$$f'(x) = e^{-5x+4x^2}\,(-5+8x)$$

b) Si $f(x) = e^{x \ \mathrm{sen}\, x}$.

$$f'(x) = e^{x \ \mathrm{sen}\, x}(\mathrm{sen}\, x + x\cos x)$$

c) Si $f(x) = e^{1-\mathrm{sen}^2 x}$. Luego

$$f'(x) = e^{1-\mathrm{sen}^2 x}(-2\,\mathrm{sen}\, x\ \cos x)$$

d) Si $f(x) = 2^{\tan 3x}$.

$$f'(x) = 2^{\tan 3x}\ln 2\,\frac{3}{\cos^2 3x}$$

e) Si $f(x) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{x^2+3x}$,

$$f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+3x}(2x+3)\ \ln\frac{3}{5}$$

f) Si $f(x) = a^{\mathrm{sen}\, x+\cos x}$

$$f'(x) = a^{\mathrm{sen}\, x+\cos x}\ln a\,(\cos x - \mathrm{sen}\, x)$$

Ejercicio 16

Teorema 16(a) Sea $f(x) = \ln x$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{0}{0} \qquad \triangleleft \quad \text{agrupando}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h} = \qquad \triangleleft \quad \ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{x}}{h} = \frac{1}{x}$$

$\square$

Teorema 16(b) Sea $f(x) = \log_a\, x \quad (a > 1)$. Efectuando el cambio de base se tiene de forma directa que

$$\log_a\, x = \frac{1}{\ln a}\ln x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\,\ln a} \quad (0 < a \neq 1)$$

□

Ejercicio 17.

a) Si $f(x) = \ln(x + \sqrt{x} + 1)$.

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x} + 1}(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})$$

b) Si $f(x) = \ln(x^2 + \operatorname{sen} x)$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + \operatorname{sen} x}(2x + \cos x)$

c) Si $f(x) = \ln(x^2\ \operatorname{sen} x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{x^2\ \operatorname{sen} x}(2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x)$$

d) Si $f(x) = \ln^2(1 + \ln x)$.

$$f'(x) = 2\ln(1 + e^x)\frac{1}{1 + e^x}e^x$$

e) Si $f(x) = \ln^2(1 + \ln x)$.

$$f'(x) = 2\ln(1 + \ln x)\frac{1}{1 + \ln x}\frac{1}{x}$$

f) Si $f(x) = \log_5(\dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x})$.

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 5}\frac{1}{\frac{1}{1+\operatorname{sen} x}}\frac{-\cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2} = -\frac{1}{\ln 5}\frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$$

Ejercicio 17

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Prueba del Teorema 6.1. Sea la función $f(x)$ y su inversa $g(x) = f^{-1}(x)$. Teniendo en cuenta la identidad

$$(f \circ g)(x) = x$$

derivando con la regla de la cadena se tiene

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$$

despejando $g'(x)$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

luego

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

◀

Teorema 17(a) Teniendo en cuenta la identidad

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x) = x$$

derivando con la regla de la cadena se tiene

$$\cos(\operatorname{arc\,sen} x) \cdot (\operatorname{arc\,sen} x)' = 1 \tag{17}$$

Teniendo en cuenta que

$$\cos(f) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 f}$$

$$\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen} x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

y despejando en (17),

$$(\operatorname{arc\,sen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$\square$

Teorema 17(b) Teniendo en cuenta la identidad

$$\cos(\arccos x) = x$$

derivando con la regla de la cadena se tiene

$$-\operatorname{sen}(\arccos x) \cdot (\arccos x)' = 1 \tag{18}$$

Teniendo en cuenta que

$$\operatorname{sen}(f) = \sqrt{1 - \cos^2 f}$$

$$\operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

y despejando en (18),

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

□

Teorema 17(c) Teniendo en cuenta la identidad

$$\tan(\arctan x) = x$$

derivando con la regla de la cadena se tiene

$$\frac{1}{\cos^2(\arctan x)} \cdot (\arctan x)' = 1 \tag{19}$$

Teniendo en cuenta que

$$\cos^2(f) = \frac{1}{1 + \tan^2 f}$$

$$\cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

y despejando en (19),

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

□

Ejercicio 18.

a) Si $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(-x)$ $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(-x)^2}}$

b) Si $f(x) = \arctan(x^2)$ $\quad f'(x) = \dfrac{2\,x}{\sqrt{1+x^4}}$

c) Si $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(\ln x + x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\ln x + x)^2}}(\frac{1}{x}+1)$$

d) Si $f(x) = \operatorname{arc\,cos}(1-x)$.

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}(-1)$$

e) Si $f(x) = \arctan(\operatorname{sen} x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+(\operatorname{sen} x)^2}\cos x$$

f) Si $f(x) = \arctan(\ln x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+(\ln x)^2}\,\frac{1}{x}$$

Ejercicio 18

Ejercicio 19.

a) Si $f(x) = \ln^2(1+\cos x)^3$.

$$f'(x) = 2\,\ln(1+\cos x)^3 \frac{1}{(1+\cos x)^3} 3(1+\cos x)^2(-\operatorname{sen} x)$$
$$= -6\,\ln(1+\cos x)^3 \frac{\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)}$$

b) Si $f(x) = \operatorname{sen} x(1+\cos x)^3$.

$$f'(x) = \cos x(1+\cos x)^3 + \operatorname{sen} x\, 3(1+\cos x)^2(-\operatorname{sen} x)$$

c) Si $f(x) = e^{1-\operatorname{sen} x}$.

$$f'(x) = -e^{1-\operatorname{sen} x}\cos x$$

d) Si $f(x) = 8^{x-\ln x}$.

$$f'(x) = 8^{x-\ln x}\cdot \ln 8 \cdot (1-\frac{1}{x})$$

Ejercicio 19

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 20.

a) Si $f(x) = \ln(1-\sqrt{x})^2$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1-\sqrt{x})^2} 2(1-\sqrt{x}) \frac{-1}{2\sqrt{x}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} \end{aligned}$$

b) Si $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}}} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\sec^2 x(1-\tan x) + (1+\tan x)\sec^2 x}{(1-\tan x)^2} \\ &= \frac{1-\tan x}{2(1+\tan x)} \cdot \frac{2\sec^2 x}{(1-\tan x)^2} \\ &= \frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)(1-\tan x)} \end{aligned}$$

Ejercicio 20

MATEMATICAS 2º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
DERIVADAS
Doc Doc
Volver Cerrar

Ejercicio 21.

a) Si $f(x) = x^2 \cdot \arctan x^{-1/2}$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2x \cdot \arctan \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2 \cdot \frac{1}{1+(\frac{1}{\sqrt{x}})^2} \cdot \frac{-1}{2} x^{-3/2} \\
&= 2x \cdot \arctan \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x}}{1+(\frac{1}{\sqrt{x}})^2}
\end{aligned}
$$

b) Si $f(x) = x^x$. Aplicando logaritmos

$$\ln f(x) = x \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = (\ln x + 1) \cdot x^x$$

Ejercicio 21

Ejercicio 22.

a) Si $f(x) = (\tan x)^{\operatorname{sen} x}$. Aplicando logaritmos

$$\ln f(x) = \operatorname{sen} x \, \ln \tan x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \, \ln \tan x + \operatorname{sen} x \, \frac{\sec^2 x}{\tan x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \, \ln \tan x + \frac{1}{\cos x}$$

$$f'(x) = (\cos x \, \ln \tan x + \frac{1}{\cos x}) \cdot (\tan x)^{\operatorname{sen} x}$$

b) Si $f(x) = e^x \cdot \sqrt[x]{x}$. Aplicando logaritmos

$$\ln f(x) = x + \frac{1}{x} \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - \frac{1}{x^2} \, \ln x + \frac{1}{x} \, \frac{1}{x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = (1 - \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}) \cdot e^x \cdot \sqrt[x]{x}$$

Ejercicio 22

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 23. Siendo

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x \leq 1 \\ a\,x + b & 1 < x \end{cases}$$

- Para que sea continua en $x = 1$

$$f(1^-) = 0 = f(1^+) = a + b \Longrightarrow a + b = 0$$

- Para que sea derivable en $x = 1$.

$$f'(x) = \begin{cases} 3\,x^2 & x < 1 \\ a & 1 < x \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 3 = f'(1^+) = a \Longrightarrow \boxed{a = 3}$$

Sustituyendo en la ecuación $a + b = 0$, se tiene $\boxed{b = -3}$

Ejercicio 23

Ejercicio 24. Siendo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

•f es continua en $x = 0$, pues

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1 \qquad\qquad (e^x \sim 1 + x)$$

•f es derivable en $x = 0$, pues

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{e^h - 1} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h - e^h + 1}{h(e^h - 1)} \overset{(1)}{=} -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

El límite en (1) se ha calculado por la regla de L'Hopital.
• Hallamos la función derivada f' de f, para $x \neq 0$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)' = \frac{e^x - xe^x - 1}{(e^x - 1)^2}$$

•f' es continua en $x = 0$, pues

$$\begin{aligned} f'(0) &= -\frac{1}{2} \\ \lim_{x \to 0} f'(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - xe^x - 1}{(e^x - 1)^2} \overset{(2)}{=} -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

El límite en (2) se ha calculado por la regla de L'Hopital. Ejercicio 24

Doc Doc
Volver Cerrar

Soluciones a los Tests

Solución al Test: La continuidad no implica la derivabilidad. Por ejemplo

$$f(x) = |x|$$

es continua en 0, sin embargo no es derivable en 0. Final del Test

Solución al Test: la derivabilidad implica la continuidad.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{existe}$$

multiplicando por h

$$\lim_{h\to 0} h \cdot f'(a) = \lim_{h\to 0} h \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} h \cdot f'(a) = \lim_{h\to 0} (f(a+h) - f(a))$$

$$0 = \lim_{h\to 0} (f(a+h) - f(a))$$

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a) \Longrightarrow f(x) \text{ continua en } x = a$$

Final del Test

Índice alfabético

derivabilidad y continuidad, 8
derivada, 6, 9
- de una constante, 15
- de una potencia, 15
- en un intervalo, 13
- en un punto, 6, 9
- función, 14
- laterales, 9

derivadas
- arcos trigonométricos, 25
- exponenciales, 21
- logarítmicas, 22
- trigonométricas, 20

Ecuación de la tangente, 5
ecuación de la tangente, 5
El problema de la tangente, 4

regla, 16
- de la cadena, 19
- de la inversa, 24
- de la suma, 16
- del cociente, 18
- del producto, 17