Continuidad

Matemáticas II. Bloque de Análisis

IES O Couto

curso 2019-2020

Continuidad en un punto $x = a$

Definición

Una función f es **continua en un punto** $x = a$ si satisface las siguientes condiciones:

I) Existe $f(a)$

II) Existe, y es un número real, el límite $\lim_{x \to a} f(x)$ (para lo cual deben existir, ser números reales, y coincidir ambos límites laterales). Es decir:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

III) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si f no cumple alguna de las condiciones anteriores, se dice que f es **discontinua** en $x = a$.

Continuidad lateral

Aunque la función no sea continua en $x = a$, en determinadas condiciones puede hablarse de **continuidad lateral**:

Definición

- Si existe $f(a) \in \mathbb{R}$, y $f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$, pero $f(a) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$ o $\nexists \lim_{x \to a^-} f(x)$, se dice que f es continua en $x = a$ por la derecha (o que existe continuidad lateral por la derecha), y discontinua por la izquierda.
- Si existe $f(a) \in \mathbb{R}$, y $f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x)$, pero $f(a) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$ o $\nexists \lim_{x \to a^+} f(x)$, se dice que f es continua en $x = a$ por la izquierda (o que existe continuidad lateral por la izquierda), y discontinua por la derecha.

Es decir, para que una función f sea continua en $x = a$, debe ser continua en $x = a$ por la derecha y por la izquierda.

Clasificación de discontinuidades

- Discontinuidad Evitable.
- Discontinuidad Esencial de Primera Especie:
  - Discontinuidad de Salto de longitud finita (o de Salto Finito).
  - Discontinuidad de salto de longitud infinita (o de Salto Infinito).
- Discontinuidad Esencial de Segunda Especie.

Discontinuidad Evitable.

Definición

Se dice que f presenta una **discontinuidad evitable** en $x = a$ cuando se cumplen las dos siguientes condiciones:

I) Los límites laterales en $x = a$ existen, son reales, y coinciden:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \in \mathbb{R}$$

II) O no existe $f(a)$ $(a \not\in Dom\, f)$, o aunque existe $f(a)$, se tiene que $f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$

Esta discontinuidad podría evitarse redefiniendo la función en $x = a$ mediante el valor $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$. A dicho valor se le llama valor verdadero de la función en $x = a$

Discontinuidades no Evitables

Discontinuidad Esencial de Primera Especie

- **Discontinuidad de salto finito**
  Se dice que f presenta una discontinuidad de salto finito en $x = a$ cuando existen y son números reales los límites laterales en $x = a$, pero no coinciden. Es decir, cuando se cumple que:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1 \in \mathbb{R} \neq \lim_{x \to a^-} f(x) = L_2 \in \mathbb{R}$$

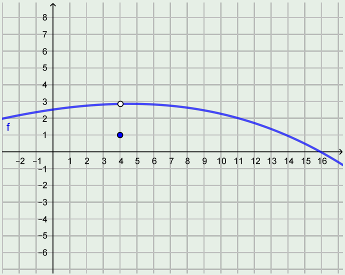
  A la cantidad $|L_1 - L_2|$ se la denomina salto.
- **Discontinuidad de salto infinito**
  Se dice que f presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = a$ cuando existen los límites laterales, pero alguno de ellos no es un número real (es $+\infty$ o $-\infty$).

Discontinuidad Esencial de Segunda Especie

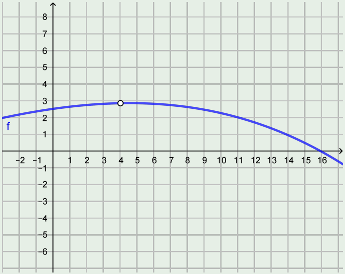
Se dice que f presenta una discontinuidad esencial de segunda especie cuando no existe alguno de los límites laterales en $x = a$.

Ejemplos de funciones discontinuas en x=a

Discontinuidad evitable en $x = a$

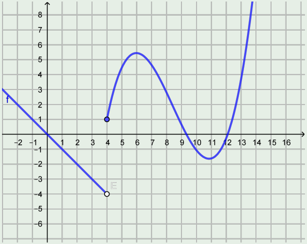


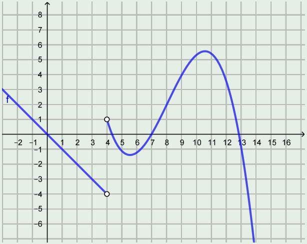
Ejemplo: $f(a) \neq \lim\limits_{xtoa} f(x)$

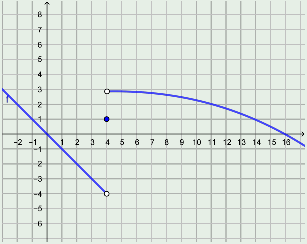


Ejemplo: $\exists \lim\limits_{xtoa} f(x) \in \mathbb{R}$ pero $\nexists f(a)$

Discontinuidad de Salto Finito en $x = a$







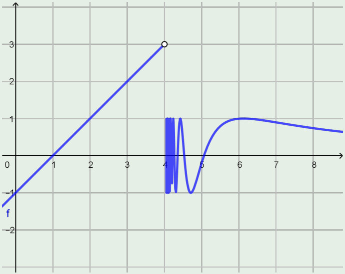
En todos estos ejemplos:

$\exists \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$

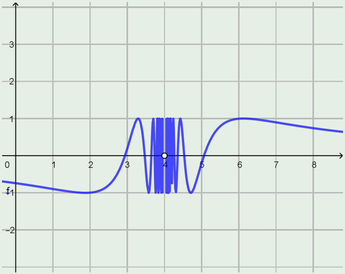
$\exists \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_2 \in \mathbb{R}$

$L_1 \neq L_2$

Discontinuidad Esencial de Segunda Especie en $x = a$



Ejemplo: $\nexists \lim_{x \to a^+} f(x)$



Ejemplo: $\nexists \lim_{x \to a^-} f(x)$, $\nexists \lim_{x \to a^+} f(x)$

Función continua en un intervalo de la recta real

Definición

Dado un intervalo de la recta real I, la función $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en I si es continua en todos los puntos del intervalo.

Propiedades

- En un punto que sea extremo de un intervalo cerrado, la continuidad en dicho punto se refiere a la continuidad lateral.
- Todas las funciones elementales son continuas en su dominio.
- Las operaciones suma, resta, producto, división, y composición de funciones continuas es una función continua en su dominio de definición.

Teorema de Bolzano

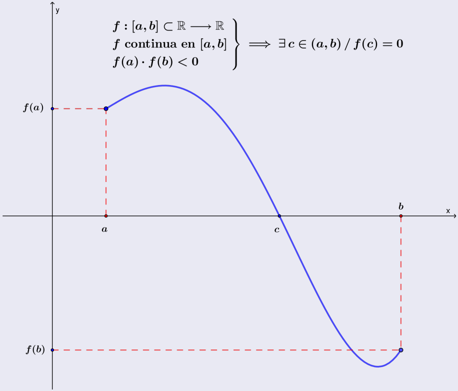
Teorema

Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Si el signo de $f(a)$ es distinto del signo de $f(b)$, entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$

Interpretación geométrica

Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo, los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ estarán situados uno por encima del eje OX, y el otro por debajo. Como la función es continua, debe poder trazarse la gráfica de un solo trazo, por tanto dicha gráfica, en algún punto situado entre $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ deberá cortar al eje OX.

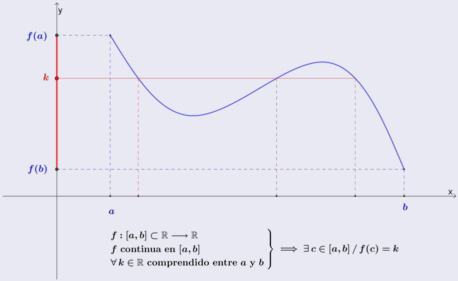
Interpretación geométrica del Teorema de Bolzano



Teorema de Darboux o de los valores intermedios

Teorema

Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una continua en $[a, b]$, y $k \in \mathbb{R}$ un número comprendido entre los valores $f(a)$ y $f(b)$. Entonces, existe algún $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.



Es decir, toda función f continua en $[a, b]$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$

Teorema de Weierstrass

Teorema

Para cualquier función $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$, existen x_m, $x_M \in [a,b]$ tales que $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in [a,b]$.
Es decir, toda función $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto en el intervalo $[a,b]$