

Proyecto MaTeX

Aplicación de

las Derivadas

Fco Javier González Ortiz

Directorio

- [Tabla de Contenido](#)
- [Inicio Artículo](#)



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES

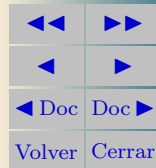


Tabla de Contenido

1. Extremos de funciones
 - 1.1. Máximos y mínimos absolutos o globales
 - Puntos Críticos. • Método de búsqueda de extremos globales
 - 1.2. Máximos y mínimos relativos o locales
 - Crecimiento y decrecimiento de funciones
2. Test de máximos y mínimos con la 1ª derivada
3. La derivada segunda. Curvatura
 - 3.1. Clasificación Máximos y mínimos con f''
 - 3.2. Punto de Inflexión
4. Teoremas de funciones derivables
 - 4.1. Teorema de Fermat
 - 4.2. Teorema de Rolle
 - 4.3. Teorema del Valor Medio

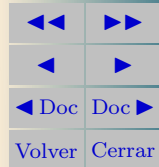
Soluciones a los Ejercicios

Soluciones a los Tests



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



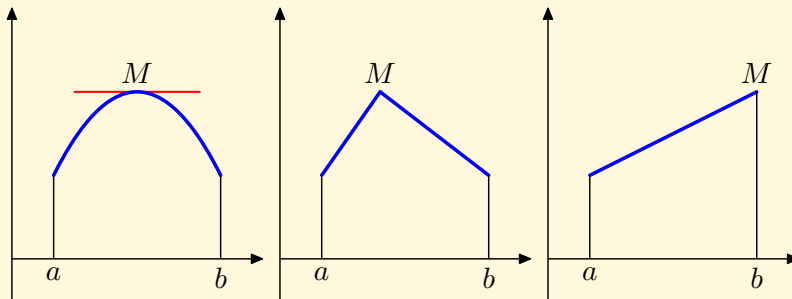


1. Extremos de funciones

1.1. Máximos y mínimos absolutos o globales

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a; b]$, alcanza un máximo y un mínimo en dicho intervalo.

Observa las siguientes gráficas:



El máximo y el mínimo absoluto solamente pueden estar situados:

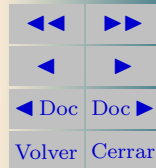
- En puntos donde $f'(x) = 0$.
- En puntos donde $f'(x)$ no está definida.
- O en los extremos del intervalo

Interesa por tanto determinar los puntos donde la derivada valga cero o bien no esté definida. A estos puntos los llamaremos puntos **críticos**.

MaTeX

DERIVADA.

APLICACIONES





● Puntos Críticos.

Definición 1.1 Decimos que c es un *punto crítico* cuando

$$f'(c) = 0 \quad \text{o} \quad f'(c) \text{ no existe}$$

Se entiende que la función f debe ser continua en c .

● Método de búsqueda de extremos globales

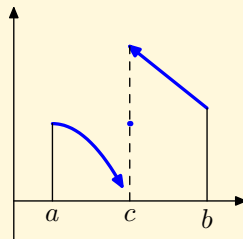
Para la búsqueda de los extremos globales de una función f continua en el intervalo cerrado $I = [a, b]$ seguiremos los siguientes pasos:

1. Buscamos los puntos críticos de f en $[a, b]$, esto es, los puntos en que $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no existe. Estos puntos serán x_1, x_2, \dots, x_n
2. Añadimos a esa lista los extremos del intervalo $[a, b]$,

$$a, x_1, x_2, \dots, x_n, b$$

3. Evaluamos la función en todos los puntos de esa lista.

► **ATENCIÓN** : Si la función no es continua el método anterior no es válido, ya que los valores de la función en los puntos críticos no determinan nada.



MaTeX

DERIVADA.

APLICACIONES

◀◀	▶▶
◀	▶
◀ Doc	Doc ▶
Volver	Cerrar

Ejemplo 1.1. Encontrar los puntos críticos $f(x) = x^2 - 1$ en el intervalo $[-1, 2]$

Solución: Hallamos f' , $f'(x) = 2x$ como

$$f'(x) = 2x = 0 \implies x = 0$$

se tiene que el punto $c = 0$ es un punto crítico de f en $[-1, 2]$. □

Ejemplo 1.2. Encontrar los puntos críticos $f(x) = x^2 - 1$ en el intervalo $[1, 2]$

Solución: Hallamos f' , $f'(x) = 2x$ como

$$f'(x) = 2x = 0 \implies x = 0$$

como $c = 0 \notin [1, 2]$ la función f no tiene puntos críticos en $[1, 2]$. □

Ejemplo 1.3. Encontrar los puntos críticos en el intervalo $[-1, 1]$ de

$$f(x) = |x|$$

Solución: Siendo

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

Hallamos f' ,

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Como $f'(0^-) = -1$ y $f'(0^+) = 1$ son distintas, $f'(0)$, no existe y $x = 0$ es el único punto crítico de f en $[-1, 1]$. □



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



Ejemplo 1.4. Encontrar en el intervalo $[-1, 2]$ los valores extremos de

$$f(x) = x^2 - 1$$

Solución:

Hallamos f' , $f'(x) = 2x$ como

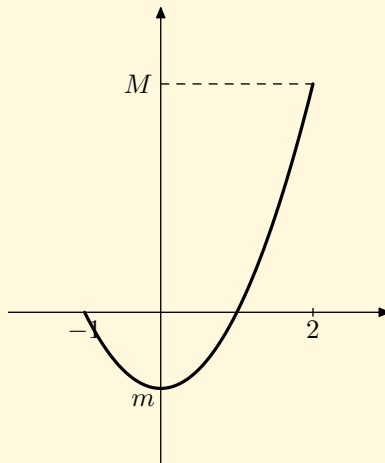
$$f'(x) = 2x = 0 \implies x = 0$$

se tiene que el punto $c = 0$ es el único punto crítico de f en $[-1, 2]$. Realizamos una tabla con los extremos del intervalo y los críticos encontrados

x	-1	0	2
$f(x)$	0	-1	3

Los valores extremos absolutos en $[-1, 2]$ son:

$$x_{min} = 0 \quad x_{max} = 2$$



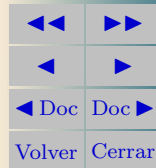
□



MaTeX

DERIVADA.

APLICACIONES





Ejemplo 1.5. Encontrar los valores extremos en el intervalo $[-1, 1]$ de

$$f(x) = |x|$$

Solución:

Siendo

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

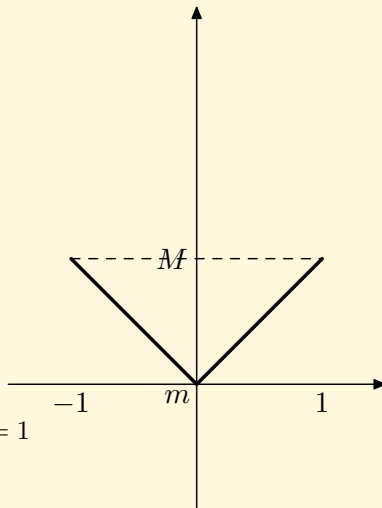
$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

$f'(0)$, no existe y $x = 0$ es el único punto crítico de f en $[-1, 1]$.

x	-1	0	1
$f(x)$	1	0	1

Los valores extremos en $[-1, 1]$ son:

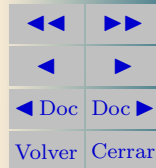
$$x_{min} = 0 \quad x_{max1} = -1 \quad x_{max2} = 1$$



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES

□





Ejercicio 1. Encontrar en el intervalo $[-1, 2]$ los valores extremos de

$$f(x) = \frac{1 - |x|}{1 + |x|}$$

Ejercicio 2. Encontrar en el intervalo $[-2, 2]$ los valores extremos de

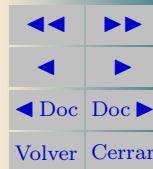
$$f(x) = \frac{|1 + x|}{1 + x^2}$$

Test. Responde a las siguientes preguntas.

- Si la tangente a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es horizontal, entonces se cumple que $f'(a) = 0$
 - Verdadero
 - Falso
- Si existen $f'(a^-)$ y $f'(a^+)$ entonces existe $f'(a)$
 - Verdadero
 - Falso
- Si $x = a$ es un extremo local de f entonces $f'(a) = 0$
 - Verdadero
 - Falso
- Si $x = a$ es un extremo global de f entonces $f'(a) = 0$
 - Verdadero
 - Falso

MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES





1.2. Máximos y mínimos relativos o locales

Definición 1.2 (Extremos Locales) Sea f una función continua definida en $[a, b]$, y sea $c \in [a, b]$,

1. **Mínimo Local** Decimos que c es un mínimo local de f si hay un intervalo abierto J conteniendo a c donde se verifica

$$f(x) \geq f(c) \quad x \in J \cap [a, b]$$

2. **Máximo Local** Decimos que c es un máximo local de f si hay un intervalo abierto J conteniendo a c donde se verifica

$$f(x) \leq f(c) \quad x \in J \cap [a, b]$$

Definición 1.3 (Extremos Globales) Sea f una función con $Dom(f)$, y sea $c \in Dom(f)$,

1. **Mínimo Global** Decimos que c es un mínimo global de f en $Dom(f)$, si verifica

$$f(x) \geq f(c) \quad \forall x \in Dom(f)$$

2. **Máximo Global** Decimos que c es un máximo global de f en $Dom(f)$, si verifica

$$f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in Dom(f)$$

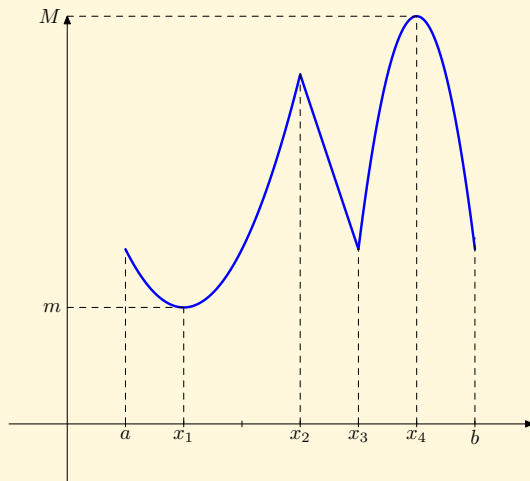
MaTeX

DERIVADA.

APLICACIONES



En el gráfico se representa una función $y = f(x)$ continua en el intervalo $[a, b]$, y se detallan los extremos locales y globales:



x_1 mínimo global x_2 máximo local

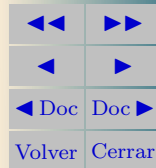
x_3 mínimo local x_4 máximo global

► **ATENCIÓN** Observar que en los extremos locales la derivada vale cero o no existe. Vamos a llamar a estos puntos críticos.



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES

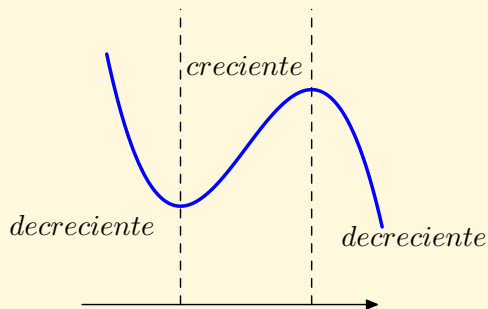


- **Crecimiento y decrecimiento de funciones**

Sea f una función definida en un intervalo I

► La función f es **estrictamente creciente** en el intervalo I si cumple

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$



complicado . El estudio del signo de la derivada nos permite estudiar la monotonía de una forma más sencilla.

► La función f es **estrictamente decreciente** en el intervalo I si cumple

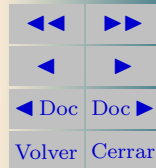
$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

Una función **monótona** es aquella que es *estrictamente creciente* o *estrictamente decreciente*. El análisis de la monotonía de una función si se hace de forma algebraica suele ser



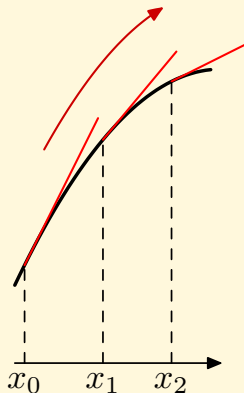
MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES

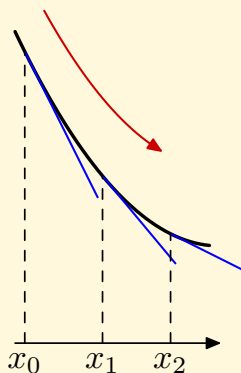


Teorema 1.1. (Test de Monotonía) Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $I = [a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b) .

Test de crecimiento Si $f'(x) > 0$ en el intervalo (a, b) , entonces f es estrictamente creciente en $[a, b]$.

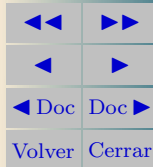


Test de decrecimiento Si $f'(x) < 0$ en el intervalo (a, b) , entonces f es estrictamente decreciente en $[a, b]$.



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



Ejemplo 1.6. Estudiar la monotonía de la función $f(x) = x^2 - 1$ en el intervalo $[-1, 2]$

Solución: Hallamos f' , $f'(x) = 2x$ como $f'(x) = 0 \implies x = 0$, se tiene

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'		$-$	$+$
y		\searrow	\nearrow

La función es estr. decreciente en $[-1, 0)$ y estr. creciente en $(0, 2)$. El punto $x = 0$ es un mínimo local y global en el intervalo $[-1, 2]$. \square

Ejercicio 3. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de:

a) $f(x) = x^4 - 2x^2$

b) $g(x) = 4x^3 - x^4$

Ejercicio 4. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de:

a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

b) $g(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

Ejercicio 5. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de:

a) $f(x) = x^2 - \ln x^2$

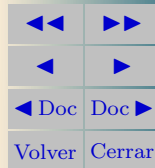
b) $g(x) = \frac{1}{(x+1)(x-4)}$



MaTeX

DERIVADA.

APLICACIONES





2. Test de máximos y mínimos con la 1ª derivada

Teorema 2.1. (Test de Clasificación de Puntos Críticos) Sea $f(x)$ una función y c un **punto crítico** de f

- a) **Test de Máximo Local** Si f' es positiva a la izquierda de c y f' es negativa a la derecha de c , entonces c es un máximo local.
- b) **Test de Mínimo Local** Si f' es negativa a la izquierda de c y f' es positiva a la derecha de c , entonces c es un mínimo local.
- c) **Test de Inflexión** Si $f'(c) = 0$ no cambia de signo a la izquierda y a la derecha de c , entonces c es un punto de inflexión.

Ejercicio 6. Clasifica los puntos críticos de las funciones:

a) $f(x) = 2x^2 - x + 3$

b) $f(x) = (x - 1)e^x$

Ejercicio 7. Clasifica los puntos críticos de las funciones:

a) $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$

b) $f(x) = x \ln x$

Ejercicio 8. Clasifica los puntos críticos de las funciones:

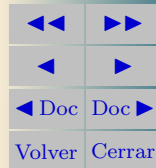
a) $f(x) = x \ln^2 x$

b) $f(x) = x^2 \ln x$

MaTeX

DERIVADA.

APLICACIONES



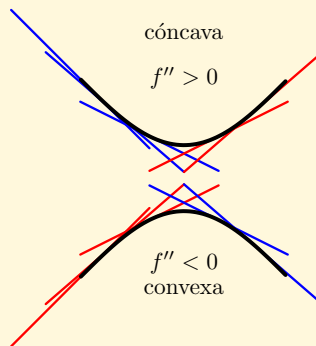


3. La derivada segunda.Curvatura

Como hemos visto, la primera derivada f' nos da información de ciertas propiedades de la función f . Si derivamos f' obtenemos la derivada segunda que representamos por f'' .

► ¿Qué nos dice la f'' ?. Así como $f' > 0$ nos informa de que f es creciente, de forma análoga $f'' > 0$ nos informa de que f' es creciente. Esto se traduce, como muestra la figura en que la curva está por encima de sus tangentes, y decimos que tiene curvatura positiva o que es cóncava.

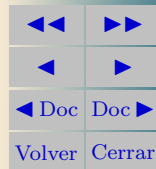
El caso de $f'' < 0$ nos informa de que f' es decreciente. Esto se traduce, como muestra la figura en que la curva está por debajo de sus tangentes, y decimos que tiene curvatura negativa o que es convexa.



- Si $f'' > 0$ en un intervalo, entonces f es cóncava, \cup .
- Si $f'' < 0$ en un intervalo, entonces f es convexa, \cap .

MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES

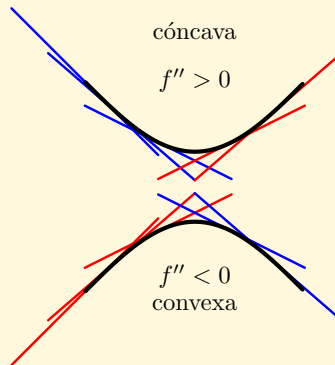




3.1. Clasificación Máximos y mínimos con f''

Sea $x = a$ un punto donde $f'(a) = 0$, es decir $x = a$ es un posible máximo o mínimo. Si la función admite derivada segunda, el signo de $f''(a)$, determina el tipo de extremo.

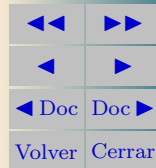
- ▶ Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, $x = a$ es un extremos con curvatura positiva, luego es un mínimo relativo.
- ▶ Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, $x = a$ es un extremos con curvatura negativa, luego es un máximo relativo.
- ▶ En el caso $f''(a) = 0$, no podemos decir si $x = a$ es un máximo o mínimo relativo.



	Mínimo relativo			Máximo relativo		
	$x = a$			$x = a$		
f'	-	0	+	+	0	-
f	↘	$\exists f(a)$	↗	↗	$\exists f(a)$	↘
f''	$f'' > 0$ Cóncava			$f'' < 0$ Convexa		

MaTeX

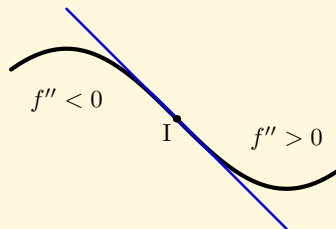
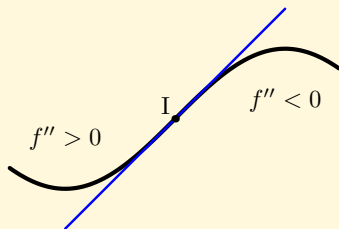
DERIVADA.
APLICACIONES





3.2. Punto de Inflexión

Cuando en un punto $(a, f(a))$ la función cambia de curvatura se tiene un punto de inflexión, y la tangente en el punto, si existe, atraviesa la función.



	Punto Inflexión		
	$x = a$		
f''	+	(*)	-
f	∪	∃f(a)	∩

	Punto Inflexión		
	$x = a$		
f''	-	(*)	+
f	∩	∃f(a)	∪

► **ATENCIÓN** Para que exista punto de inflexión es necesario que exista $f(a)$, y cambie de curvatura en a .

No es necesario que estén definidas $f'(a)$ ni $f''(a)$, pero si $f''(a)$ es continua en $x = a$ entonces debe ser $\star = 0$.

MaTeX

DERIVADA.

APLICACIONES



Ejemplo 3.1. Estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función, $f(x) = x^3 - 3x + 4$.

Solución: Hallamos f'' derivando dos veces,

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \quad f''(x) = 6x$$

Resolvemos $f'' = 0$, $f''(x) = 6x = 0 \implies x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	\cup	$f(0)$	\cup

Punto de inflexión $I(0, 4)$

□

Ejemplo 3.2. Estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función, $f(x) = x^4 - 6x^2$.

Solución: Hallamos f'' derivando dos veces,

$$f'(x) = 4x^3 - 12x \quad f''(x) = 12x^2 - 12$$

Resolvemos $f'' = 0$, $f''(x) = 12x^2 - 12 = 0 \implies x = \pm 1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	\cup	$f(-1)$	\cap	$f(1)$	\cup

Puntos de inflexión

$$I_1(-1, 5)$$

$$I_2(1, 5)$$

□



MaTeX

DERIVADA.

APLICACIONES



Ejemplo 3.3. Estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función, $f(x) = \frac{1}{x}$.

Solución: Es importante determinar el dominio. $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
Hallamos f'' derivando dos veces,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Resolvemos $f'' = 0, f''(x) = \frac{2}{x^3} \neq 0 \quad \forall x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	\nexists	$+$
f	\cap	\nexists	\cup

Punto de inflexión $I(0, 4)$

□

Ejercicio 9. Estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de las funciones:

a) $f(x) = (x - 2)^4$

b) $g(x) = xe^x$

Ejercicio 10. Estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de las funciones:

a) $f(x) = \ln(x + 1)$

b) $g(x) = \frac{2 - x}{x + 1}$



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



EJERCICIO 11. Hallar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las funciones:

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x.$

(b) $f(x) = x^4 - 2x^3.$

(c) $f(x) = x^4 + 2x^2.$

(d) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$

(e) $f(x) = e^x(x - 1).$

(f) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}.$

Ejercicio 12. La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, tiene un punto de derivada nula en $(1, 1)$, que no es un extremo relativo. Razonar el valor de a, b y c .

Ejercicio 13. La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, tiene un punto de derivada nula en $(1, 1)$, que no es un extremo relativo. Razonar el valor de a, b y c .

Ejercicio 14. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, tiene como tangente en el punto de inflexión $(1, 0)$, la recta $y = -3x + 3$, y presenta un extremo en el punto de abcisa $x = 0$

Ejercicio 15. Hallar el valor de b y m para que la curva $y = x^3 + bx^2 + mx + 1$ tenga un punto de inflexión en el punto $(0, 1)$, y la pendiente de la recta tangente en ese punto valga 1.

Ejercicio 16. Representa una función continua con las siguiente información:

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
f'		+	+
f''		-	+



MaTeX

DERIVADA.

APLICACIONES





Ejercicio 17. Representa una función continua con las siguiente información:

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	$+\infty$			
f'		+	0	+	1	+	0	-
f''		-	0	+	0	-	-	-

Ejercicio 18. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, tiene como tangente en el punto $(1, 1)$, la recta $y = -x + 2$, y presenta un extremo en el punto $(0, 2)$.

Ejercicio 19. Determinar el polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, que tiene 1 y 2 como raíces, pasa por $(-1, 24)$ y tiene un mínimo relativo en $x = 1$.

Test. Si una función $f(x)$ tiene recta tangente en el punto $(a, f(a))$ entonces existe $f'(a)$

- (a) Verdadero (b) Falso

Test. Si $f'(c)$ no existe entonces existe $x = c$ es un punto crítico.

- (a) Verdadero (b) Falso

EJERCICIO 20. Estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de las funciones:

(a) $f(x) = x^3 - 3x + 4$.

(b) $f(x) = x^4 - 6x^2$.

(c) $f(x) = (x - 2)^4$.

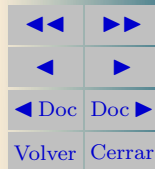
(d) $f(x) = xe^x$.

(e) $f(x) = \ln(x + 1)$.

(f) $f(x) = \frac{2 - x}{x + 1}$.

MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



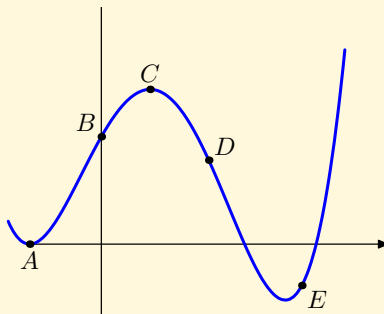
Ejercicio 21. Halla los intervalos de concavidad y convexidad de

$$f(x) = x|x|$$

y comprueba que existe un punto de inflexión en $x = 0$ a pesar de que no existe $f''(0)$.

Ejercicio 22. En la figura se muestra el grafo de una función $f(x)$. Completar en la tabla el signo positivo, negativo o cero en los puntos del gráfico para f , f' y f'' .

Punto	f	f'	f''
A			
B			
C			
D			
E			



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES





4. Teoremas de funciones derivables

4.1. Teorema de Fermat

Teorema 4.1.

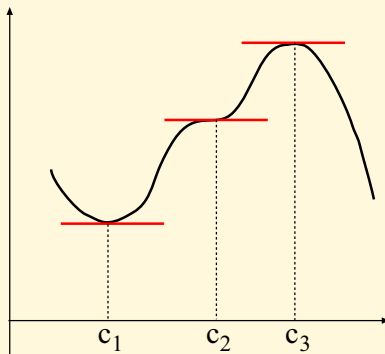
Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo I . Si c un extremo local y existe $f'(c)$, entonces $f'(c) = 0$.

El recíproco de este teorema no es cierto, como se aprecia en el gráfico.

Los puntos c_1 y c_3 son extremos con tangente horizontal,

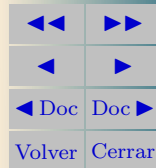
$$f'(c_1) = 0 \quad f'(c_3) = 0$$

Sin embargo en c_2 , $f'(c_2) = 0$ y el punto no es extremo.



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES





Inicio del Test Indicar si en general son verdaderas las siguientes afirmaciones:

1. Si $f(x)$ es continua en $x = a$ entonces es derivable en $x = a$

Verdadero

Falso

2. Si $f(x)$ es derivable en $x = a$ entonces $f(x)$ es continua $x = a$

Verdadero

Falso

3. Si c es un extremo local de $f(x)$ entonces $f'(c) = 0$

Verdadero

Falso

4. Si c es un extremo global de $f(x)$ entonces $f'(c) = 0$

Verdadero

Falso

5. Si $f'(c) = 0$ entonces c es un extremo local de $f(x)$

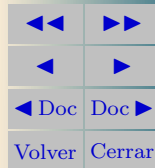
Verdadero

Falso

Final del Test

MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES





4.2. Teorema de Rolle

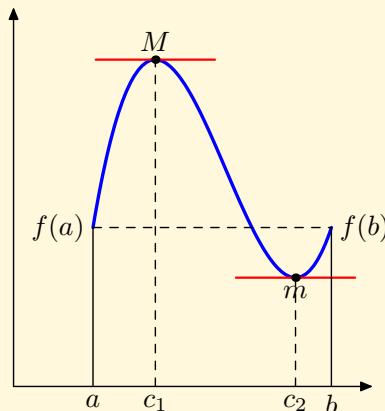
Teorema 4.2. (Teorema de Rolle)

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $I = [a, b]$

$$\begin{array}{l} f(a) = f(b) \\ \text{existe } f' \text{ en } (a, b) \end{array} \implies \exists c \in (a, b) \text{ con } f'(c) = 0 \quad (1)$$

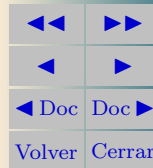
Interpretación gráfica. El teorema asegura para las funciones continuas en un intervalo cerrado, y derivables en todo punto interior del intervalo la **existencia** de al menos un punto donde la derivada se anula y por tanto tiene una tangente horizontal.

La figura muestra una función con dos puntos c_1 y c_2 donde se cumple.



MaTeX

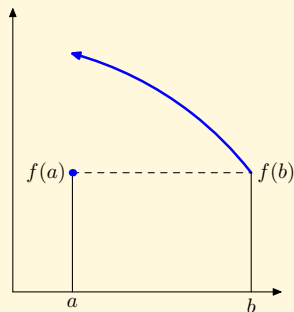
DERIVADA.
APLICACIONES



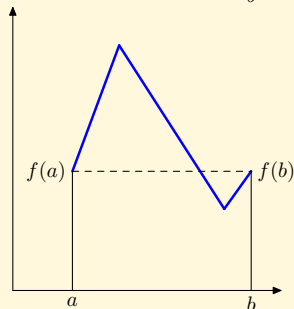


Observaciones al teorema de Rolle:

Si la función *no es continua* en el intervalo cerrado no se puede asegurar la **existencia** de al menos un punto donde la derivada se anula. Por ejemplo, en la figura se muestra una función continua en $(a, b]$ ya que es discontinua en el extremo a , y que cumple las demás condiciones.

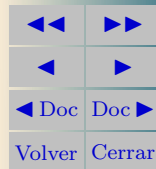


Si la función *no es derivable* en todo punto interior del intervalo no se puede asegurar la **existencia** de al menos un punto donde la derivada se anula. Por ejemplo, en la figura se muestra una función que no es derivable y que cumple las demás condiciones..



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



Ejercicio 23. Comprobar que la función $f(x) = x^3 - 18x$ verifica el teorema de Rolle en el intervalo $[0, 3\sqrt{2}]$, y hallar el punto cuya existencia asegura el teorema.

Ejercicio 24. Calcular los valores de a, b y c para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax + c & x < 4 \\ -x^2 + 10x + b & 4 \leq x \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[2, 6]$.

Ejercicio 25. Calcular los valores de a, b y c para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x < 1 \\ x^2 + cx & 1 \leq x \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-2, 2]$.

Ejercicio 26. Calcular los valores de a, b y c para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 12x + 1 & 0 \leq x < 1 \\ ax^2 + bx + c & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 2]$.



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES





4.3. Teorema del Valor Medio

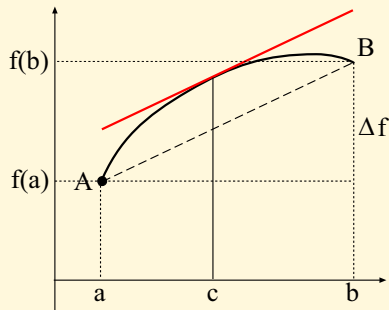
Teorema 4.3. (Teorema del Valor Medio)(Lagrange)

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $I = [a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b) . Entonces existe un número $c \in (a, b)$ que verifica

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (2)$$

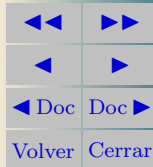
Interpretación gráfica. El término de la derecha en (2) es la pendiente de la cuerda AB .

El teorema asegura que existe un punto $c \in (a, b)$ donde la tangente tiene la misma pendiente que la cuerda AB , es decir, donde la tangente es paralela a la cuerda.



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



Ejemplo 4.1. Comprobar que la función $f(x) = |x - 2|$ no cumple las condiciones del teorema del valor medio en $[0, 3]$.

Solución: Como

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & 0 \leq x \leq 2 \\ x - 2 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

no es derivable en el punto $x = 2 \in (0, 3)$, pues

$$f'(2-) = -1 \neq f'(2+) = 1$$

no se cumplen las condiciones del teorema del valor medio. \square

Ejercicio 27. Aplicar el teorema del valor medio en el intervalo $[-1, 2]$ a la función

$$f(x) = x^3$$

Ejercicio 28. Aplicar el teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$ a la función

$$f(x) = 4x^2 - 5x + 1$$

Ejercicio 29. Para la función $f(x) = 3x^2$, encontrar un punto en que la tangente a la curva en dicho punto sea paralela a la cuerda que une los puntos en $(0, 0)$ y $(4, 48)$.



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES





Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1. Siendo $f(x) = \frac{1 - |x|}{1 + |x|}$ en el intervalo $[-1, 2]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{1-x} & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1-x}{1+x} & 0 < x \leq 2 \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{(1-x)^2} & -1 \leq x < 0 \\ \frac{-2}{(1+x)^2} & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

Como $f'(0^-) = 2 \neq f'(0^+) = -2$, $f'(0)$, no existe y $x = 0$ es el único punto crítico de f en $[-1, 2]$.

x	-1	0	2
$f(x)$	0	1	-1/3

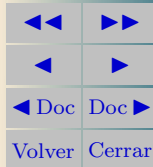
Los valores extremos en $[-1, 2]$ son:

$$x_{\min} = 2 \quad x_{\max} = 0$$

Ejercicio 1

MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES





Ejercicio 2. Siendo $f(x) = \frac{|1+x|}{1+x^2}$ en el intervalo $[-2, 2]$

$$f = \begin{cases} \frac{-1-x}{1+x^2} & -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{1+x}{1+x^2} & -1 < x \leq 2 \end{cases} \quad f' = \begin{cases} \frac{x^2+2x-1}{(1+x^2)^2} & -2 \leq x < -1 \\ \frac{-x^2-2x+1}{(1+x^2)^2} & -1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Como $f'(-1^-) = -1/2 \neq f'(-1^+) = 1/2$, $f'(-1)$, no existe y $x_1 = -1$ es punto crítico de f en $[-2, 2]$. Resolvemos

$$f' = 0 \implies x^2 + 2x - 1 = 0 \implies x = -1 \pm \sqrt{2}$$

Solo vale $x_2 = -1 + \sqrt{2} \in (-1, 2]$, luego otro punto crítico es

$$x_2 = \sqrt{2} - 1 \quad \text{con} \quad f(\sqrt{2} - 1) = \frac{\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} \approx 1,207$$

x	-2	-1	$\sqrt{2} - 1$	2
$f(x)$	1/5	0	1,207	3/5

Los valores extremos en $[-2, 2]$ son:

$$x_{min} = -1 \quad x_{max} = \sqrt{2} - 1$$

Ejercicio 2

MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



Prueba del Teorema 1.1. La demostración es fácil a partir del Teorema del Valor Medio. Sean $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Apliquemos el teorema en el intervalo $[x_1, x_2]$, existe un valor c cumpliendo

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

Entonces como $x_2 > x_1$ de la expresión anterior se sigue que $f(x_2) > f(x_1)$ y por tanto f es estrictamente creciente en $[a, b]$. ◀



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



**Ejercicio 3.**

a) Sea $f(x) = x^4 - 2x^2$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \implies 4x(x-1)(x+1) = 0 \implies x = 0, \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f		\searrow	-1	\nearrow	0	\searrow	-1	\nearrow

b) Sea $g(x) = 4x^3 - x^4$. Resolvemos $g' = 0$

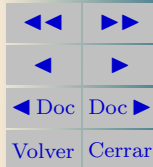
$$g'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 0 \implies 4x^2(3-x) = 0 \implies x = 0, 3$$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$		
g'		$+$	0	$+$	0	$-$
g		\nearrow	0	\nearrow	27	\searrow

Ejercicio 3

MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



**Ejercicio 4.**

a) Sea $f(x) = \frac{1}{x-2}$. Con $Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

Luego f es estrictamente decreciente.

b) Sea $g(x) = x^3 - 2x^2 + 1$. Resolvemos $g' = 0$

$$g'(x) = 3x^2 - 4x = 0 \implies x(3x - 4) = 0 \implies x = 0, 4/3$$

x	$-\infty$	0	$4/3$	$+\infty$		
g'		$+$	0	$-$	0	$+$
g		\nearrow	0	\searrow	$f(4/3)$	\nearrow

Ejercicio 4

MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



**Ejercicio 5.**

a) Sea $f(x) = x^2 - \ln x^2$. Con $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 0 \implies 2x^2 - 2 = 0 \implies x = \pm 1$$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	$-$	$+$
f	\searrow	1	\nearrow	\searrow	\nearrow

b) Sea $g(x) = \frac{1}{(x+1)(x-4)}$. Con $Dom(g) = \mathbb{R} - \{-1, 4\}$. Resolvemos $g' = 0$

$$g'(x) = -\frac{2x-3}{(x+1)^2(x-4)^2} = 0 \implies x = 3/2$$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$
g	\searrow	$f(\frac{3}{2})$	\nearrow

MaTeX

DERIVADA.

APLICACIONES

Ejercicio 5



**Ejercicio 6.**

a) Sea $f(x) = 2x^2 - x + 3$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 4x - 1 = 0 \implies x = 1/4$$

x	$-\infty$	$1/4$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	\searrow	$f(1/4)$	\nearrow

Mínimo $m\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$

b) Sea $f(x) = (x - 1)e^x$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = x e^x = 0 \implies x = 0$$

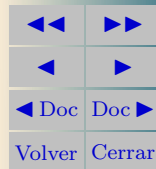
x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	\searrow	$f(0) = -1$	\nearrow

Mínimo $m(0, -1)$

MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES

Ejercicio 6



**Ejercicio 7.**

a) $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$. Sea $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$. $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3} = 0 \implies x^3 - 2 = 0 \implies x = \sqrt[3]{2}$$

Punto crítico $x = \sqrt[3]{2}$, pues $x = 0 \notin Dom(f)$

x	$-\infty$	0	$\sqrt[3]{2}$	$+\infty$
f'	$+$	\neq	$-$	$+$
f	\nearrow	\neq	\searrow	$f(\sqrt[3]{2})$

Mínimo $m\left(\sqrt[3]{2}, f(\sqrt[3]{2})\right)$

b) $f(x) = x \ln x$. Sea $f(x) = x \ln x$.

$$Dom(f) = (0, \infty)$$

Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = \ln x + 1 = 0 \implies x = e^{-1}$$

x	0	e^{-1}	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	\searrow	$f(e^{-1})$	\nearrow

Mínimo $m(e^{-1}, -e^{-1})$

MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



**Ejercicio 8.**

a) $f(x) = x \ln^2 x$. Sea $f(x) = x \ln^2 x$.

$$\text{Dom}(f) = (0, \infty)$$

Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = \ln x(\ln x + 2) = 0 \implies x = 1, e^{-2}$$

x	0	e^{-2}	1	$+\infty$		
f'	+	0	-	0	+	
f		\nearrow	$4e^{-2}$	\searrow	0	\nearrow

Máximo $M(e^{-2}, 4e^{-2})$ Mínimo $m(1, 0)$

b) $f(x) = x^2 \ln x$. Sea $f(x) = x^2 \ln x$.

$$\text{Dom}(f) = (0, \infty)$$

Resolvemos $f' = 0$

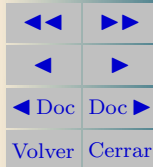
$$f'(x) = x(2 \ln x + 1) = 0 \implies x = e^{-1/2}$$

x	0	$e^{-1/2}$	$+\infty$	
f'	-	0	+	
f		\searrow	$f(e^{-1/2})$	\nearrow

Mínimo $m(e^{-1/2}, -\frac{1}{2e})$

MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



**Ejercicio 9.**

a) Sea $f(x) = (x - 2)^4$. Hallamos f''

$$f'(x) = 4(x - 2)^3 \quad f''(x) = 12(x - 2)^2$$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 12(x - 2)^2 = 0 \implies x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''		+	0
f		∪	$f(2)$

No tiene puntos de Inflexión.

b) Sea $g(x) = xe^x$. Hallamos g''

$$g'(x) = (x + 1)e^x \quad g''(x) = (x + 2)e^x$$

Resolvemos $g'' = 0$

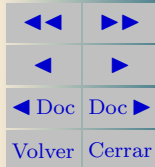
$$g''(x) = (x + 2)e^x = 0 \implies (x + 2) = 0 \implies x = -2$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
g''		-	0
g		∩	$f(-2)$

Punto de inflexión $I(-2, -2e^{-2})$

MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



**Ejercicio 10.**

a) Sea $f(x) = \ln(x + 1)$. $Dom(f) = (-1, \infty)$. Hallamos f''

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \quad f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

- Como $f'' \neq 0$ no tiene puntos de inflexión.
- Como $f'' < 0 \quad \forall x \in Dom(f)$, es siempre convexa.

b) Sea $g(x) = \frac{2-x}{x+1}$. $Dom(g) = \mathbb{R} - \{-1\}$. Hallamos g''

$$g'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2} \quad g''(x) = \frac{6}{(x+1)^3}$$

- Como $g'' \neq 0$ no tiene puntos de inflexión.
- Concavidad y convexidad:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g''	$-$	\neq	$+$
g	\cap	\neq	\cup

MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES

Ejercicio 10





Ejercicio 11(a) Sea $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \implies 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \implies x = 1, 3$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$			
f'		+	0	-	0	+	
f			↗	4	↘	0	↗

Máximo $M(1, 4)$ Mínimo $m(3, 0)$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \implies 6(x - 2) = 0 \implies x = 2$$

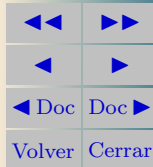
x	$-\infty$	2	$+\infty$	
f''		-	0	+
f		∩	$f(2) = 2$	∪

Punto de inflexión $I(2, 2)$

□

MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES





Ejercicio 11(b) Sea $f(x) = x^4 - 2x^3$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 0 \implies 2x^2(2x - 3) = 0 \implies x = 0, 3/2$$

x	$-\infty$	0	$3/2$	$+\infty$		
f'	$-$	0	$-$	0	$+$	
f		\searrow	$f(0)$	\searrow	$f(3/2)$	\nearrow

$$\text{Mínimo } m\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{27}{16}\right)$$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 0 \implies 12x(x - 1) = 0 \implies x = 0, 1$$

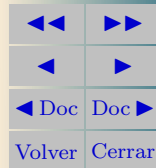
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
f''	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		\cup	$f(0)$	\cap	$f(1)$	\cup

Puntos de inflexión $I_1(0, 0)$ $I_2(1, -1)$

□

MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



Ejercicio 11(c) Sea $f(x) = x^4 + 2x^2$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 4x^3 + 4x = 0 \implies 4x(x^2 + 1) = 0 \implies x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f		\searrow $f(0)$ \nearrow	

Mínimo $m(0, 0)$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 12x^2 + 2 \neq 0 \quad \forall x \implies \text{no se anula}$$

no tiene puntos de inflexión. Como

$$f''(x) > 0 \forall x$$

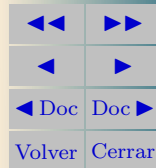
la función es cóncava.

□



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES





Ejercicio 11(d) Sea $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \implies 2x = 0 \implies x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	+	0	-
f		\nearrow $f(0)$ \searrow	

Máximo $M(0, 1)$

$$f'' = 0 \implies f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3} = 0 \implies 6x^2 - 2 = 0 \implies x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$	
f''	+	0	-	0	+
f		\cup $f(\frac{1}{\sqrt{3}})$	\cap $f(\frac{1}{\sqrt{3}})$	\cup	

Puntos de inflexión $I_1(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$ $I_2(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$

MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES

□





Ejercicio 11(e) Sea $f(x) = e^x(x - 1)$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = xe^x = 0 \implies x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f		\searrow $f(0)$ \nearrow	

Mínimo $m(0, -1)$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f'(x) = (x + 1)e^x = 0 \implies (x + 1) = 0 \implies x = -1$$

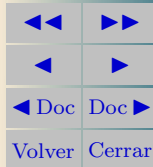
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f		\cap $f(-1)$ \cup	

Punto de inflexión $I(-1, -2e^{-1})$

□

MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



Ejercicio 11(f) Sea $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$. Con $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2} \neq 0$$

Como $f'(x) > 0 \quad \forall x \in Dom(f)$ es siempre creciente.
Resolvemos $f'' = 0$

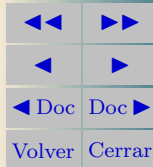
$$f''(x) = -\frac{2}{x^3} \neq 0$$

Como $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in Dom(f)$ no tiene puntos de inflexión. □



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES





Ejercicio 12. Como $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$,

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad f''(x) = 6x + 2a$$

- f pasa por $(1, 1)$, luego $f(1) = 1 \implies \boxed{1+a+b+c=1}$
- Derivada nula en $(1, 1)$ luego $\implies f'(1) = 0 \implies \boxed{3+2a+b=0}$
- $(1, 1)$ es punto de inflexión, luego $f''(1) = 0 \implies \boxed{6+2a=0}$

Resolviendo el sistema se obtiene

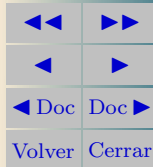
$$a = -3 \quad b = 3 \quad c = -1$$

y la función pedida es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Ejercicio 12

MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES





Ejercicio 13. Como $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$,

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad f''(x) = 6x + 2a$$

- f pasa por $(1, 1)$, luego $f(1) = 1 \implies \boxed{1+a+b+c=1}$
- Derivada nula en $(1, 1)$ luego $\implies f'(1) = 0 \implies \boxed{3+2a+b=0}$
- $(1, 1)$ es punto de inflexión, luego $f''(1) = 0 \implies \boxed{6+2a=0}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$a = -3 \quad b = 3 \quad c = -1$$

y la función pedida es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Ejercicio 13

MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



Ejercicio 14. Como $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

■ $(1, 0)$ es punto de inflexión $\implies f''(1) = 0 \implies \boxed{6a+2b=0}$

■ $y = -3x + 3$ es tangente en $(1, 0)$, luego $f'(1) = -3$

$$\boxed{3a+2b+c=-3}$$

■ f pasa por $(1, 0)$, luego $f(1) = 0 \implies \boxed{a+b+c+d=0}$

■ En $x = 0$, hay un extremo, luego $f'(0) = 0 \implies \boxed{c=0}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$a = 1 \quad b = -3 \quad c = 0 \quad d = 2$$

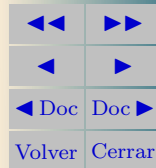
y la función pedida es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Ejercicio 14



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



Ejercicio 15. Como $f(x) = x^3 + bx^2 + mx + 1$,

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + m \quad f''(x) = 6x + 2b$$

■ $(0, 1)$ es punto de inflexión, luego $f''(0) = 0 \implies \boxed{2b=0}$

■ Derivada en $x = 0$ vale 1, luego $\implies f'(0) = 1 \implies \boxed{m=1}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$b = 0 \quad m = 1$$

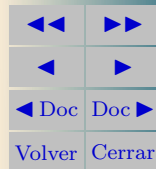
y la función pedida es $f(x) = x^3 + x + 1$

Ejercicio 15



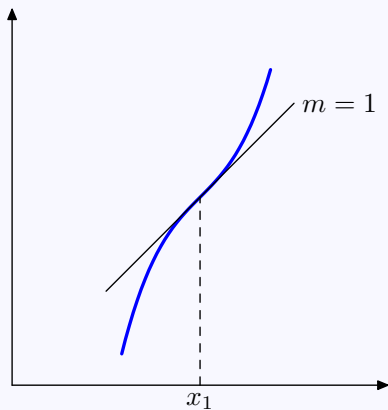
MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



Ejercicio 16. Por ejemplo

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
f'		+	+
f''		-	+



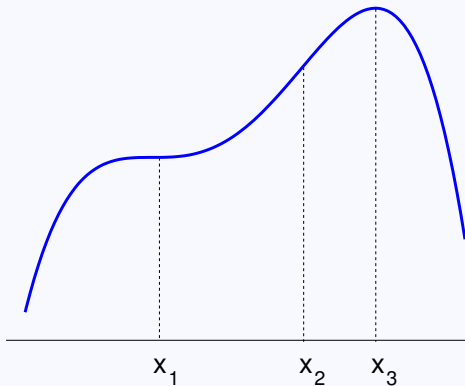
MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES

Ejercicio 16



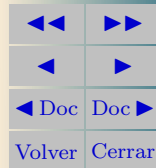
Ejercicio 17.



Ejercicio 17



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



Ejercicio 18. Como $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

- f pasa por $(1, 1)$, luego $f(1) = 1 \implies \boxed{a+b+c+d=1}$
- f pasa por $(0, 2)$, luego $f(0) = 2 \implies \boxed{d=2}$
- La pendiente en $x = 1$ es $-1 \implies f'(1) = -1 \implies \boxed{3a+2b+c=-1}$
- Un extremo en $x = 0$, luego $\implies f'(0) = 0 \implies \boxed{c=0}$

Resolviendo el sistema se obtiene

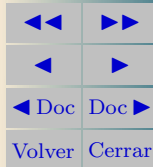
$$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 0 \quad d = 2$$

y la función pedida es $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$

Ejercicio 18

MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES





Ejercicio 19. Como $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad p''(x) = 6ax + 2b$$

■ f pasa por $(-1, 24)$, luego $p(-1) = 24 \implies \boxed{-a+b-c+d=24}$

■ $x = 1$ es una raíz, luego $p(1) = 0 \implies \boxed{a+b+c+d=0}$

■ $x = 2$ es una raíz, luego $p(2) = 0 \implies \boxed{8a+4b+2c+d=0}$

■ Un mínimo en $x = 1$, luego $\implies p'(1) = 0 \implies \boxed{3a+2b+c=0}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$a = -2 \quad b = 8 \quad c = -10 \quad d = 4$$

y el polinomio pedido es $p(x) = -2x^3 + 8x^2 - 10x + 4$

Ejercicio 19

MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



Ejercicio 20(a) Sea $f(x) = x^3 - 3x + 4$. Hallamos f''

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \quad f''(x) = 6x$$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 6x = 0 \implies x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	\cap	$f(0)$	\cup

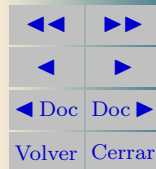
Punto de inflexión $I(0, 4)$

□



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



Ejercicio 20(b) Sea $f(x) = x^4 - 6x^2$. Hallamos f''

$$f'(x) = 4x^3 - 12x \quad f''(x) = 12x^2 - 12$$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 0 \implies x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	\cup	$f(-1)$	\cap	$f(1)$	\cup

Puntos de inflexión $I_1(-1, 5)$ $I_2(1, 5)$

□



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



Ejercicio 20(c) Sea $f(x) = (x - 2)^4$. Hallamos f''

$$f'(x) = 4(x - 2)^3 \quad f''(x) = 12(x - 2)^2$$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 12(x - 2)^2 = 0 \implies x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	+	0	+
f	∪	$f(2)$	∪

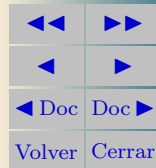
No tiene puntos de Inflexión.

□



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



Ejercicio 20(d) Sea $f(x) = xe^x$. Hallamos f''

$$f'(x) = (x+1)e^x \quad f''(x) = (x+2)e^x$$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = (x+2)e^x = 0 \implies (x+2) = 0 \implies x = -2$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	\cap	$f(-2)$	\cup

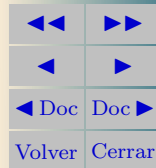
Punto de inflexión $I(-2, -2e^{-2})$

□



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



Ejercicio 20(e) Sea $f(x) = \ln(x + 1)$. $Dom(f) = (-1, \infty)$. Hallamos f''

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \quad f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

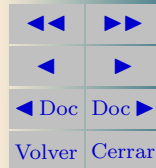
- Como $f'' \neq 0$ no tiene puntos de inflexión.
- Como $f'' < 0 \quad \forall x \in Dom(f)$, es siempre convexa.

□



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



Ejercicio 20(f) Sea $f(x) = \frac{2-x}{x+1}$. $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$. Hallamos f''

$$f'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2} \quad f''(x) = \frac{6}{(x+1)^3}$$

- Como $f'' \neq 0$ no tiene puntos de inflexión.
- Concavidad y convexidad:

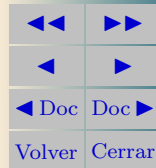
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''	$-$	\neq	$+$
f	\cap	\neq	\cup

□



MaTeX

DERIVADA. APLICACIONES



**Ejercicio 21.** Siendo

$$f(x) = x|x| \implies \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & x < 0 \\ 2x & 0 < x \end{cases} \quad f''(x) = \begin{cases} -2 & x < 0 \\ 2 & 0 < x \end{cases}$$

Como

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	\nexists	$+$
f	\cap	0	\cup

El punto $x = 0$ es un punto de Inflexión y $f''(0)$ no existe.

Ejercicio 21

MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES

Ejercicio 22.

Punto	f	f'	f''
A	0	0	+
B	+	+	-
C	+	0	-
D	+	-	-
E	-	+	+



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES

Ejercicio 22



Prueba del Teorema 4.1. Razonamos para el caso en que c es un mínimo local. (análogo para el caso de un máximo local). Entonces existe un intervalo J , donde

$$f(x) \geq f(c) \quad x \in J \cap I \quad (3)$$

La derivada por la izquierda en c , $f'(c^-)$ es

$$\left. \begin{array}{l} f(c+h) - f(c) \geq 0 \\ h < 0 \end{array} \right\} \implies f'(c^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

La derivada por la derecha en c , $f'(c^+)$ es

$$\left. \begin{array}{l} f(c+h) - f(c) \geq 0 \\ h > 0 \end{array} \right\} \implies f'(c^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

Puesto que existe $f'(c) = f'(c^-) = f'(c^+)$, las desigualdades anteriores

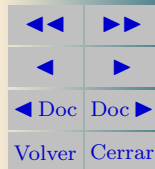
$$0 \leq f'(c) = f'(c^-) = f'(c^+) \leq 0$$

implican que $f'(c) = 0$ ▶



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



Prueba del Teorema 4.2. Siendo continua en $[a, b]$, la función f tiene un valor máximo (absoluto) M y un valor mínimo (absoluto) m en este intervalo. Distinguiamos dos casos:

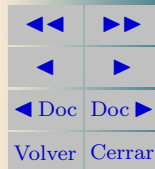
- Si f es constante, es $M = m = f(a) = f(b) = c$ y $f'(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.
- Si f no es constante en $[a, b]$, es $M > m$ y no puede verificarse $f(a) = f(b) = m = M$. Por tanto existe un punto interior de $[a, b]$ que es un máximo o un mínimo absoluto. Para ese valor, que también es un extremo relativo donde la función es derivable, se tiene por el teorema de Fermat que la derivada vale cero.



MaTeX

DERIVADA.

APLICACIONES



Ejercicio 23. Siendo $f(x) = x^3 - 18x$ se cumplen las hipótesis en $[0, 3\sqrt{2}]$, pues:

- $f(x)$ es continua en $[0, 3\sqrt{2}]$ por ser una función polinómica.
- $f(x)$ es derivable en $(0, 3\sqrt{2})$ por ser una función polinómica.
- Como $f(0) = 0$ y $f(3\sqrt{2}) = 0$, la función tiene el mismo valor en los extremos del intervalo.

Luego el teorema asegura la **existencia** de al menos un punto $c \in (0, 3\sqrt{2})$ donde la derivada se anula. Como

$$f'(x) = 3x^2 - 18$$

$$f'(x) = 3x^2 - 18 = 0 \implies x = \pm\sqrt{6}$$

luego el valor que asegura el teorema es $c = \sqrt{6}$

Ejercicio 23



MaTeX

DERIVADA.

APLICACIONES



**Ejercicio 24.** Siendo

$$f(x) = \begin{cases} ax + c & x < 4 \\ -x^2 + 10x + b & 4 \leq x \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} a & x < 4 \\ -2x + 10 & 4 < x \end{cases}$$

$$\blacksquare f(2) = 2a + c = f(6) = 24 + b \implies \boxed{2a + c = 24 + b}$$

- Continuidad en $[2, 6]$,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} ax + c = 4a + c \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} -x^2 + 10x + b = 24 + b \end{aligned} \right\} \implies \boxed{4a + c - b = 24}$$

- Derivabilidad en $(2, 6)$,

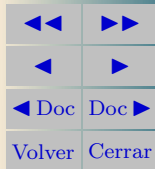
$$\left. \begin{aligned} f'(4^-) &= a \\ f'(4^+) &= 2 \end{aligned} \right\} \implies \boxed{a = 2}$$

Resolviendo el sistema se tiene, $a = -\frac{1}{4}, b = -19$ y $c = -\frac{9}{4}$

Ejercicio 24

MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



**Ejercicio 25.** Siendo

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x < 1 \\ x^2 + cx & 1 \leq x \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} a & x < 1 \\ 2x + c & 1 < x \end{cases}$$

$$\blacksquare f(-2) = -2a + b = f(2) = 4 + 2c \implies \boxed{-2a + b = 4 + 2c}$$

- Continuidad en $[-2, 2]$,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} ax + b = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + cx = 1 + c \end{aligned} \right\} \implies \boxed{a + b = 1 + c}$$

- Derivabilidad en $(-2, 2)$,

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= a \\ f'(1^+) &= 2 + c \end{aligned} \right\} \implies \boxed{a = 2 + c}$$

Resolviendo el sistema se tiene, $a = -\frac{1}{4}$, $b = -1$ y $c = -\frac{9}{4}$

Ejercicio 25

MaTeX

DERIVADA.
 APLICACIONES



**Ejercicio 26.** Siendo

$$f \begin{cases} x^3 - 12x + 1 & 0 \leq x < 1 \\ ax^2 + bx + c & 1 < x \leq 2 \end{cases} \implies f' \begin{cases} 3x^2 - 12 & 0 \leq x < 1 \\ 2ax + b & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\blacksquare f(0) = 1 = f(2) = 4a + 2b + c \implies \boxed{1 = 4a + 2b + c}$$

- Continuidad en $[-2, 2]$,

$$\left. \begin{aligned} f(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^3 - 12x + 1 = -10 \\ f(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 + bx + c = a + b + c \end{aligned} \right\} \implies \boxed{a + b + c = -10}$$

- Derivabilidad en $(-2, 2)$,

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= -9 \\ f'(1^+) &= 2a + b \end{aligned} \right\} \implies \boxed{2a + b = -9}$$

Resolviendo el sistema se tiene, $a = 20$, $b = -49$ y $c = 19$. Para hallar el valor de $\xi \in (0, 2)$ que cumple $f'(\xi) = 0$, resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$.

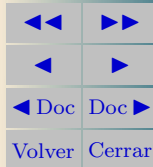
$$f'(x) = 0 \implies \begin{cases} 3x^2 - 12 = 0 \implies x = \pm 2 \notin (0, 1) \\ 40x - 49 = 0 \implies x = \frac{49}{40} \in (1, 2) \end{cases}$$

luego el valor que asegura el teorema es $\xi = \frac{49}{40}$ con $f'(\xi) = 0$ **Ejercicio 26**

MaTeX

DERIVADA.

APLICACIONES





Prueba del Teorema 4.3. Definimos la función

$$G(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

Se tiene que $G(a) = f(a)$ y $G(b) = f(a)$, con $G(x)$ continua y derivable por ser suma de funciones continuas y derivables. Aplicando el teorema de Rolle, existe un punto c donde $G'(c) = 0$. La derivada de $G(x)$ es

$$G'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

luego

$$G'(c) = 0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

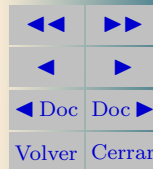
y de aquí

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES





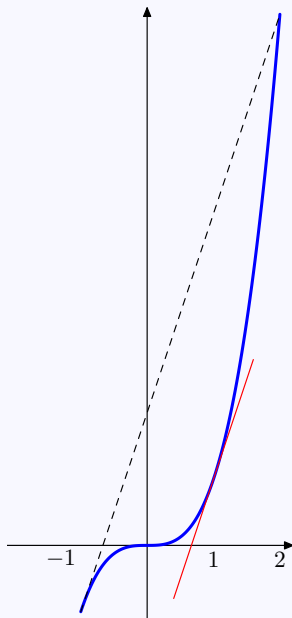
Ejercicio 27.

Siendo $f(x) = x^3$, aplicando el teorema del valor medio en el intervalo $[-1, 2]$ se obtiene

$$f(2) - f(-1) = f'(c) \cdot 3$$

y como $f'(c) = 3c^2$, se tiene

$$8 - (-1) = 3c^2 \cdot 3 \implies \boxed{c = 1} \in (-1, 2)$$



Ejercicio 27

MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES





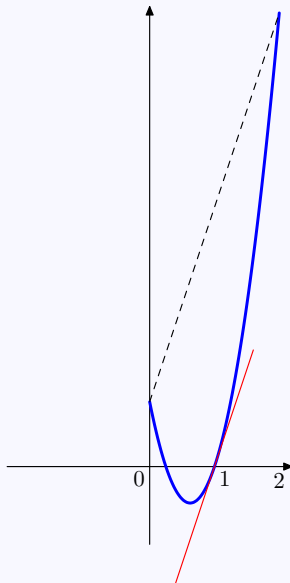
Ejercicio 28.

Siendo $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$, aplicando el teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$ se obtiene

$$f(2) - f(0) = f'(c) \cdot 2$$

y como $f'(c) = 8c - 5$, se tiene

$$7 - (1) = (8c - 5) \cdot 2 \implies \boxed{c = 1} \in (0, 2)$$



Ejercicio 28

MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



Ejercicio 29. Aplicando el teorema del valor medio en el intervalo $[0, 4]$ se obtiene

$$f(4) - f(0) = f'(c) \cdot 4$$

y como $f'(c) = 6c$, se tiene

$$48 - 0 = 6c \cdot 4 \implies \boxed{c = 2}$$

luego el punto en que la tangente a la curva es paralela a la cuerda que une los puntos en $(0, 0)$ y $(4, 48)$ es

$$P(2, 12)$$

Ejercicio 29



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



Soluciones a los Tests

Solución al Test: Puede existir la recta tangente en el punto $(a, f(a))$ sin que exista la derivada en dicho punto. Por ejemplo la función

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

tiene en el origen $x = 0$ como tangente vertical el eje OY y sin embargo

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

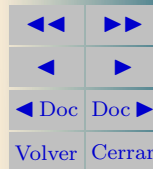
no existe $f'(0)$.

Final del Test



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES



Solución al Test: Es falso. Para que $x = c$ sea un punto crítico no basta que no exista $f'(c)$, además c tiene que estar en el dominio de f .

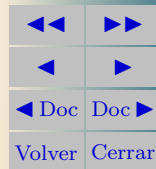
Final del Test



MaTeX

DERIVADA.

APLICACIONES



Índice alfabético

curvatura, 16

extremo

- búsqueda de, 4
- global o absoluto, 9
- local o relativo, 9

función

- cóncava, 16
- convexa, 16
- creciente, 11
- decreciente, 11
- monótona, 11

máximo

- global o absoluto, 9
- local o relativo, 9

mínimo

- global o absoluto, 9
- local o relativo, 9

punto crítico, 4

clasificación, 14

Punto de inflexión, 17

punto de inflexión, 17

teorema

- de Fermat, 23
- del Valor Medio, 28
- de Rolle, 25



MaTeX

DERIVADA.
APLICACIONES

