1. Continuidad

1.1. Función continua en un punto $x = a$

Una función f es continua en un punto $x = a$ si satisface las siguientes condiciones:

I) Existe $f(a)$

II) Existe, y es un número real, el límite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ (para lo cual deben existir, ser números reales, y coincidir ambos límites laterales). Es decir:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

III) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si f no cumple alguna de las condiciones anteriores, se dice que f es discontinua en $x = a$.

Observaciones a la defición de continuidad en $x = a$

Aunque la función no sea continua en $x = a$, en determinadas condiciones puede hablarse de continuidad lateral:

- Si existe $f(a) \in \mathbb{R}$, y $f(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, pero $f(a) \neq \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ o $\nexists \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, se dice que f es continua en $x = a$ por la derecha (o que existe continuidad lateral por la derecha), y discontinua por la izquierda.
- Si existe $f(a) \in \mathbb{R}$, y $f(a) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, pero $f(a) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ o $\nexists \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, se dice que f es continua en $x = a$ por la izquierda (o que existe continuidad lateral por la izquierda), y discontinua por la derecha.

Es decir, para que una función f sea continua en $x = a$, debe ser continua en $x = a$ por la derecha y por la izquierda.

1.2. Clasificación de discontinuidades en $x = a$

$$\begin{cases} \text{Discontinuidad Evitable} \\[2em] \text{Discontinuidad Esencial de Primera Especie} \begin{cases} \text{Discontinuidad de Salto Finito} \\[1em] \text{Discontinuidad de Salto Infinito} \end{cases} \\[2em] \text{Discontinuidad Esencial de Segunda Especie} \end{cases}$$

Discontinuidad evitable

Se dice que f presenta una discontinuidad evitable en $x = a$ cuando se cumplen las dos siguientes condiciones:

I) Los límites laterales en $x = a$ existen, son reales, y coinciden:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) \in \mathbb{R}$$

II) O no existe $f(a)$ ($a \notin Dom\, f$), o aunque existe $f(a)$, se tiene que $f(a) \neq \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Esta discontinuidad podría evitarse redefiniendo la función en $x = a$ mediante el valor $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. A dicho valor se le llama valor verdadero de la función en $x = a$

Discontinuidades no evitables

- **Discontinuidades Esenciales de Primera Especie**

  - **Discontinuidad de salto finito**

    Se dice que f presenta una discontinuidad de salto finito en $x = a$ cuando existen y son números reales los límites laterales en $x = a$, pero no coinciden. Es decir, cuando se cumple que:

    $$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1 \in \mathbb{R} \neq \lim_{x\to a^-} f(x) = L_2 \in \mathbb{R}$$

    A la cantidad $|L_1 - L_2|$ se la denomina salto.

  - **Discontinuidad de salto infinito**

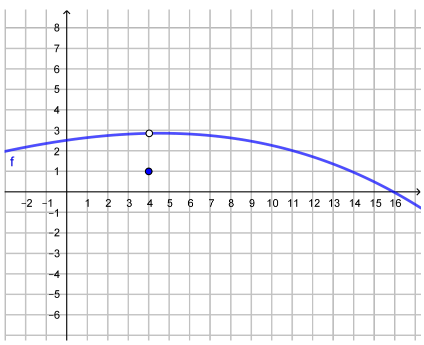
    Se dice que f presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = a$ cuando existen los límites laterales, pero alguno de ellos no es un número real (es $+\infty$ o $-\infty$).

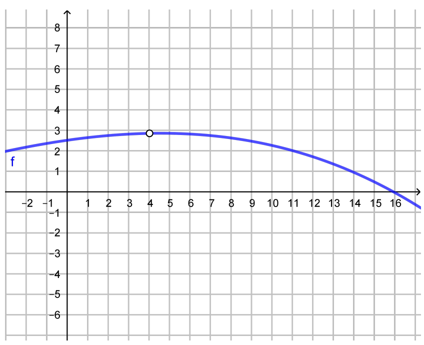
- **Discontinuidad Esencial de Segunda Especie**

  Se dice que f presenta una discontinuidad esencial de segunda especie cuando no existe alguno de los límites laterales en $x = a$.

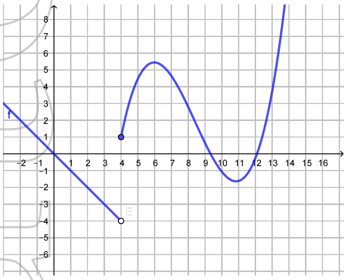
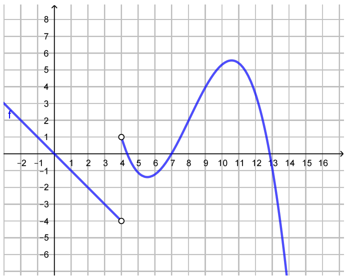
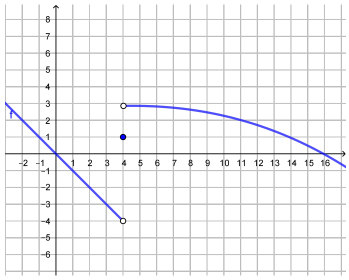
1.3. Ejemplos de discontinuidades en $x = a$

Discontinuidades evitables en $x = a$

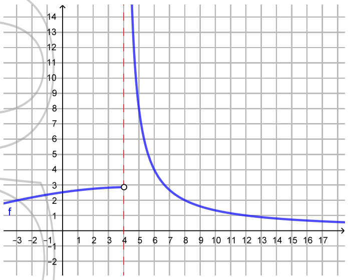
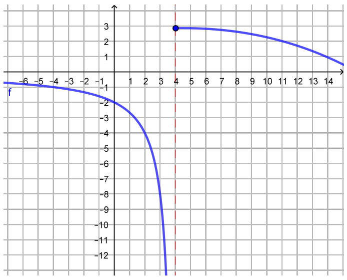
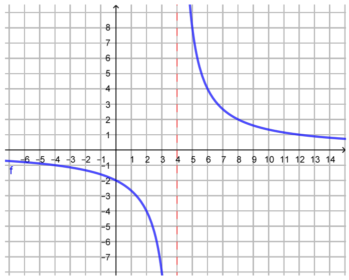




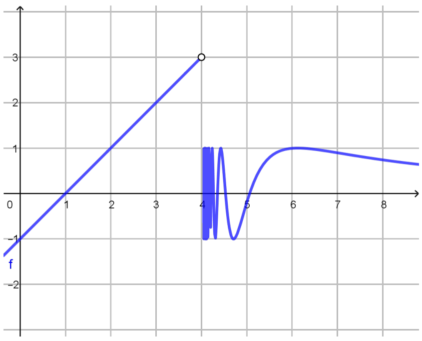
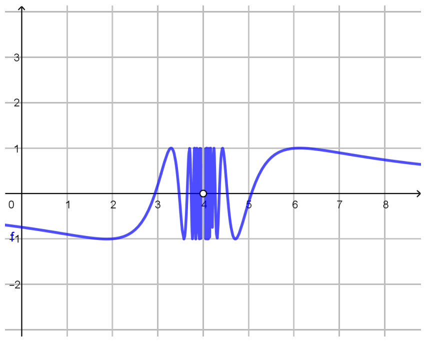
Discontinuidades de salto finito en $x = a$

Discontinuidades de salto infinito en $x = a$

Discontinuidades Esencial de Segunda Especie en $x = a$

1.4. Continuidad en un intervalo

Dado un intervalo de la recta real I, la función $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en I si es continua en todos los puntos del intervalo.

Observaciones

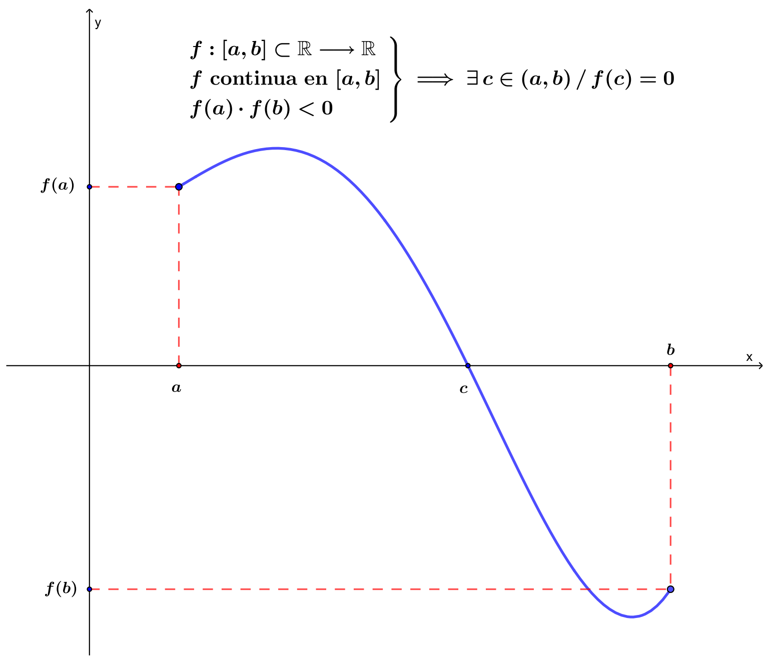
- En un punto que sea extremo de un intervalo cerrado, la continuidad en dicho punto se refiere a la continuidad lateral.
- Todas las funciones elementales son continuas en su dominio.
- Las operaciones suma, resta, producto, división, y composición de funciones continuas es una función continua en su dominio de definición.

1.5. Teorema de Bolzano

Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Si el signo de $f(a)$ es distinto del signo de $f(b)$, entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$

Interpretación geométrica

Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo, los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ estarán situados uno por encima del eje OX, y el otro por debajo. Como la función es continua, debe poder trazarse la gráfica de un solo trazo, por tanto dicha gráfica, en algún punto situado entre $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ deberá cortar al eje OX.



Corolario: Propiedad de Darboux

Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una continua en $[a, b]$, y $k \in \mathbb{R}$ un número comprendido entre los valores $f(a)$ y $f(b)$. Entonces, existe algún $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.

Dicho de otro modo, toda función f continua en $[a, b]$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$

1.6. Teorema de Weierstrass

Para cualquier función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$, existen x_m, $x_M \in [a, b]$ tales que $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall\, x \in [a, b]$.

Es decir, toda función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto en el intervalo $[a, b]$

2. Derivabilidad

2.1. Función derivable en $x = a$

Sean I un invervalo de la recta real , y una función $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Dado un punto $x = a$ perteneciente al interior del intervalo I, se dice que f es derivable en $x = a$ si existe, y es un número real el límite $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

A dicho límite se le llama derivada de f en $x = a$.

Se denota $f'(a)$, $Df(a)$, o $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$

Observaciones

- Si f es derivable en $x = a$, el valor de $f'(a)$ puede encontrarse resolviendo cualquiera de los dos límites equivalentes:

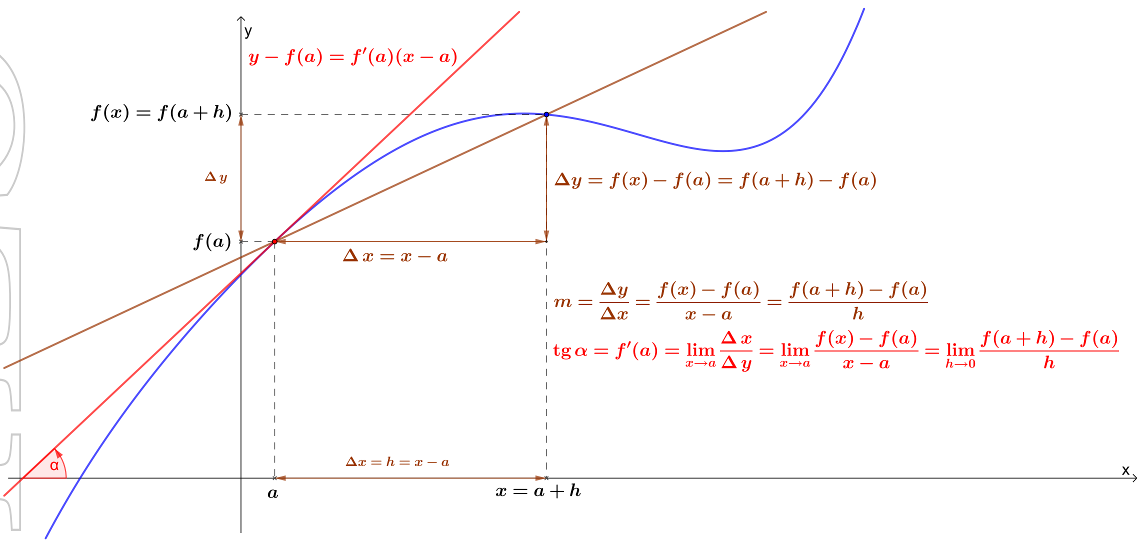
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{o} \quad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- Para que exista la derivada en f en $x = a$ deben existir los límites laterales, ser números reales, y coincidir. Dichos límites se llaman derivadas laterales:
  - Si existe y es real el límite $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, se llama a dicho límite derivada lateral por la derecha, y se denota $f'(a^+)$
  - Si existe y es real el límite $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, se llama a dicho límite derivada lateral por la izquierda, y se denota $f'(a^-)$

  Es decir:

$$\exists f'(a) \Longleftrightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$$

Interpretación geométrica



La recta tangente a una curva $y = f(x)$ en un punto $A = (a, f(a))$ puede considerarse como la recta límite de las rectas secantes que unen A con puntos $B = (a+h, f(a+h))$ que van aproximándose cada vez más al punto A (es decir, cuando $h \to 0$).

Por definición, cuando una función $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en un punto $x = a$ interior al intervalo I, existe el límite $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \in \mathbb{R}$.

Por otra parte, la ecuación de la recta secante que une los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (a+h, f(a+h))$, tiene por pendiente el cociente $m_h = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Por tanto:

- Por definición, $f'(a)$, es el límite de las pendientes de las rectas secantes a la función que unen el punto $A = (a, f(a))$ con puntos que se aproximan cada vez más a A.

  Es decir, $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = a$ (y por tanto, la tangente del ángulo que forma dicha tangente con la dirección positiva del eje OX)

- Una función es derivable en $x = a$ si y solo si puede trazarse su recta tangente en $x = a$.

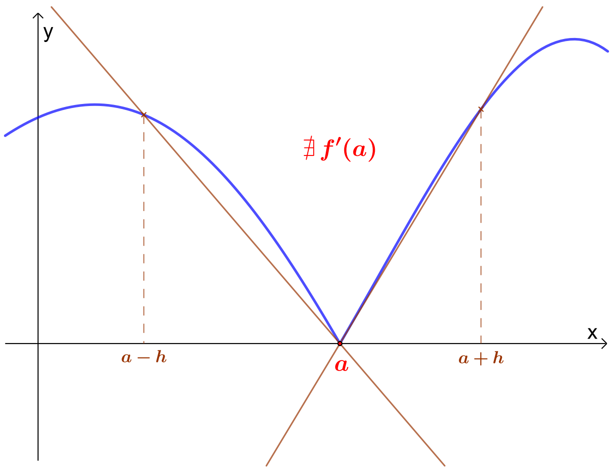
- La ecuación de la recta tangente a una función $y = f(x)$ en un punto $x = a$ en el que la función es derivable es: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

2.2. Consecuencias de la interpretación geométrica de derivada

- La ecuación de la recta normal en $x = a$ a una función derivable en dicho punto es

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

- En una representación gráfica, los puntos en los cuales la función no es derivable se identifican localizando aquellos puntos donde no es posible trazar la recta tangente a la curva (los llamados "puntos angulosos")



2.3. Teorema: Condición necesaria para la derivabilidad en $x = a$

Sean un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, y una función $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Dado un punto a interior al intervalo I, si f es derivable en $x = a$ entonces f es continua en $x = a$.

Observación: El recíproco de este teorema no es cierto. Es decir, la continuidad en $x = a$ no asegura la derivabilidad en $x = a$:

$$f \text{ derivable en } x = a \implies f \text{ continua en } x = a$$

$$f \text{ continua en } x = a \not\Longrightarrow f \text{ derivable en } x = a$$

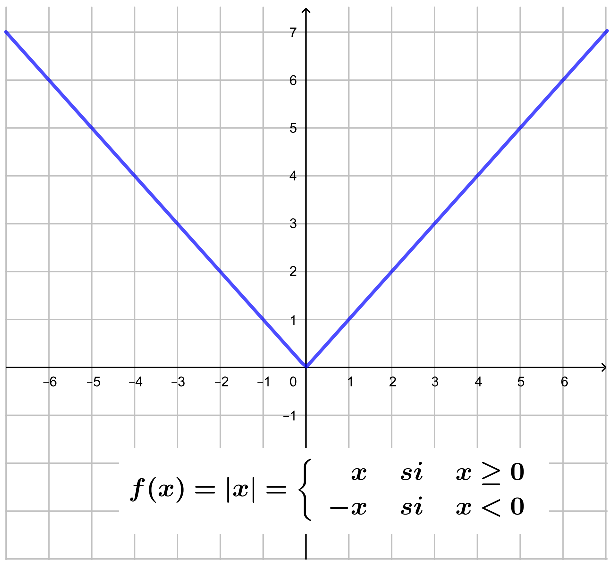


Figura 1: f es continua pero no derivable en $x = 0$

2.4. Función derivable en un intervalo

Dado un intervalo abierto I, una función $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en I si es derivable en todo $a \in I$

2.5. Función derivada

Dado un intervalo abierto I, y una función $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en I, se llama función derivada de f, o función derivada primera de f a la función:

$$\begin{array}{rccc} f' : & I \subset \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & f'(x) \end{array}$$

2.5.1. Operaciones con funciones derivables

Dadas las funciones f y g derivables en el intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$, se tiene que las siguientes operaciones de funciones son derivables en todo su dominio de definición:

- La función $f+g$, con función derivada $(f+g)'=f'+g'$
- La función $f-g$, con función derivada $(f-g)'=f'-g'$
- La función $k\cdot f$, $k\in\mathbb{R}$, con función derivada $(k\cdot f)'=k\cdot f'$
- La función $f\cdot g$, con función derivada $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$
- La función $\dfrac{f}{g}$, con función derivada $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$

Regla de la cadena: Si la función $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$ es derivable, entonces

$$(f\circ g)'(x)=f'[g(x)]\cdot g'(x)$$

2.5.2. Derivadas de orden superior

Dada una función $f:I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ derivable:

- Si la función derivada primera de f, es derivable, su función derivada se llama derivada segunda de f, y se denota f''

$$\begin{array}{rccl} f'': & I\subset\mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & f''(x)=(f')'(x) \end{array}$$

- Si la función derivada segunda de f es derivable, su función derivada se llama derivada tercera de f, y se denota f'''

$$\begin{array}{rccl} f''': & I\subset\mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & f'''(x)=(f'')'(x) \end{array}$$

- En general, si una función f puede derivarse sucesivamente n veces, se llama función derivada enésima de f, o función derivada de orden n de f, a la función $f^{(n}$

$$\begin{array}{rccl} f^{(n}: & I\subset\mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & f^{(n}(x)=(f^{(n-1)})'(x) \end{array}$$

2.6. Teorema de Rolle

Si $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b), y con $f(a)=f(b)$, entonces existe al menos un punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

Interpretación geométrica

$$\left.\begin{array}{l} f:[a,b]\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \\ f \text{ continua en } [a,b] \\ f \text{ derivable en } (a,b) \\ f(a)=f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, c\in(a,b)\,/\,f'(c)=0$$

- Si la función es constante en $[a,b]$, trivialmente $f'(c)=0 \quad \forall\, c\in(a,b)$ (figura 2)
- Si la función no es constante en $[a,b]$, en virtud del teorema de Rolle sabemos que existe al menos un punto interior al intervalo en el que la recta tangente es horizontal, es decir, paralela al eje OX (figuras 3 y 4)

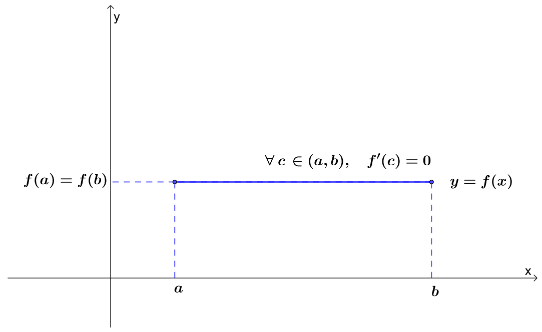


Figura 2: f constante en $[a,b]$

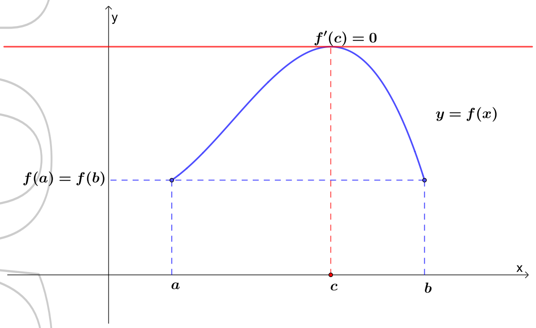


Figura 3: máximo relativo en $x = c$

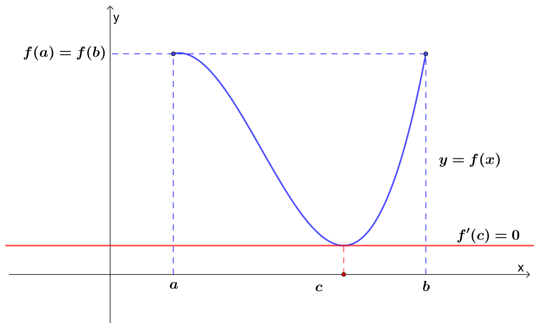


Figura 4: mínimo relativo en $x = c$

2.7. Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial (de Lagrange)

Si $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$, y derivable en (a,b), entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

Interpretación geométrica

$$\left.\begin{array}{l} f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \text{ continua en } [a,b] \\ f \text{ derivable en } (a,b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, c \in (a,b) \,/\, f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

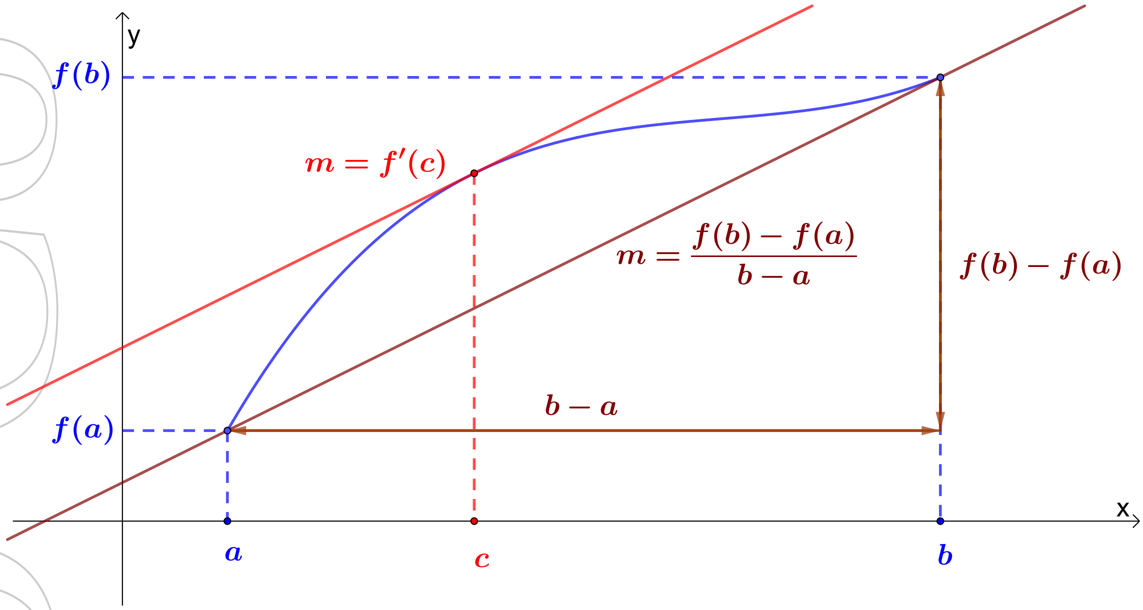
- La expresión $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ equivale a escribir $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.
- La pendiente de la recta secante a la curva $y = f(x)$, que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, es $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
- En virtud del teorema de Lagrange, existe un punto c intermedio entre a y b en el cual $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$, es decir, en el que la derivada de la función f coincide con la pendiente de dicha secante.
- Por otra parte, $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = c$, por tanto, existe un $c \in (a,b)$ en el cual la recta tangente a la función es paralela a la secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Interpretación física

La tasa de variación media de la función en $[a,b]$ es el cociente $TVM\, f_{[a,b]} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, y la tasa de variación instantánea en $c \in (a,b)$ es el límite $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c)$.

Por tanto, en algún $c \in (a,b)$ la tasa de variación instantánea coincide con la tasa de variación media en el intervalo $[a,b]$

Cuando y es el espacio recorrido por un móvil en función del tiempo x, las tasas de variación reciben el nombre de velocidad, con lo cual, la velocidad instantánea del móvil en algún momento c del intervalo (a,b) coincide con la velocidad media del móvil en el intervalo de tiempo $[a,b]$



2.8. Regla de L'Hôpital

2.8.1. Teorema (Resolución de indeterminaciones de tipo $\frac{0}{0}$)

Dado $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo de la recta real, y a un punto interior al intervalo I, sean $f, g : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en I salvo quizá en $x = a$, con $f(a) = g(a) = 0$ y $g'(x) \neq 0\ \forall x \in I \setminus \{a\}$. Entonces, si existe $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (con L real o infinito), también existe $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y ambos límites coinciden. (Es decir, $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$)

Observaciones

1. Si alguna de las funciones f o g no está definida en $x = a$ (sean solo continuas en $I \setminus \{a\}$), pero $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, definiendo adicionalmente las funciones f y g en el punto $x = a$ como $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$, ya se verificarían las hipótesis. (El límite de las funciones no depende del valor de las mismas en $x = a$)

2. Si f y g son derivables en $(K, +\infty)$, y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, entonces:

$$\exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ (con } L \text{ real o infinito)} \implies \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

   Análogamente tendríamos el mismo resultado si $x \to -\infty$, solo que la derivabilidad de las funciones se exigiría en $(-\infty, K)$

3. La regla de L'Hôpital nos permite calcular el límite de $\dfrac{f}{g}$ si existe el límite de $\dfrac{f'}{g'}$. Pero si el límite de $\dfrac{f'}{g'}$ no existe, nada puede inferirse del límite de $\dfrac{f}{g}$.

   Por ejemplo, si $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ y $g(x) = x$, el límite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f}{g}$ existe y vale 0, pero el límite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'}{g'}$ no existe.

2.8.2. Teorema (Resolución de indeterminaciones de tipo $\frac{\infty}{\infty}$)

Dado $I \subset \mathbb{R}$, y un punto a interior al intervalo I, sean $f, g : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables en I salvo quizá en $x = a$, con $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in I \setminus \{a\}$, y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$. Entonces, si existe $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (con L real o infinito), también existe $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, y ambos coinciden. (Es decir, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$)

Observación:

Si f y g son derivables en $(K, +\infty)$, y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \infty$, entonces:

$$\exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ (con } L \text{ real o infinito)} \implies \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Análogamente tendríamos el mismo resultado si $x \to -\infty$, solo que la derivabilidad de las funciones se exigiría en $(-\infty, K)$

2.8.3. Aplicación a las indeterminaciones $0 \cdot \infty$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ (con a real o infinto), basta tener en cuenta que

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{o} \quad f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Así $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x)$ se reduce a la resolución de una indeterminación de tipo $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$

2.8.4. Aplicación a las indeterminaciones $+\infty - \infty$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ (con a real o infinto), basta tener en cuenta que

$$f(x) - g(x) = \frac{[(f(x) - g(x)]\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$$

Así: $\lim\limits_{x\to a} f(x) - g(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}} = \dfrac{0}{0}$

2.8.5. Aplicación a las indeterminaciones ∞^0, 0^0, y 1^∞

Cuando el límite $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ es indeterminado (siendo a real o infinito), el procedimiento consiste en plantear:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = L \implies \lim_{x\to a} \ln\left([f(x)]^{g(x)}\right) = \ln\, L \implies \lim_{x\to a} g(x)\, \ln\left(f(x)\right) = \ln\, L$$

El se resuelve el último límite volviendo a transformar la expresión $g(x)\, \ln(f(x))$ para reducirla a una indeterminación de tipo $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$, y así, si

$$\lim_{x\to a} g(x)\, \ln\left(f(x)\right) = K \overset{K=\ln\, L}{\Longrightarrow} L = e^K$$

2.9. Aplicación de la Regla de L'Hôpital al estudio de la derivabilidad en un punto

Teorema: Condición suficiente de derivabilidad en $x = c$

Sea I un intervalo, y c un punto interior a I. Si $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en I y derivable en $I \setminus \{c\}$, entonces:

- Si existe $\lim\limits_{x\to c} f'(x) = L \in \mathbb{R}$, entonces f también es derivable en $x = c$, y $f'(c) = L$
- Si existe y es infinito el límite $\lim\limits_{x\to c} f'(x)$, entonces f no es derivable en $x = c$.
- Si existen los límites laterales de f' cuando $x \to c$, pero son distintos, f no es derivable en $x = c$

3. Representación gráfica de funciones

3.1. Cálculo del dominio.

El dominio de una función f es el conjunto $Dom\, f \subset \mathbb{R}$, formado por todos los números reales para los cuales puede calcularse el valor $f(x)$.

Ejemplos

1. Dada $f(x) = \ln(x^2 - 1)$:

$$Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 1 > 0\} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

2. Dada $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$:

$$Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 4x - x^2 \geq 0\} = [0, 4]$$

3.2. Cálculo de los puntos de corte con los ejes de coordendas.

- Puntos de corte con el eje OX: Son las soluciones del sistema $\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$

- Punto de corte con el eje OY: Son las soluciones del sistema $\begin{cases} x = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$

Ejemplos

1. Dada $f(x) = \ln(x^2 - 1)$:

   - Puntos de corte con el eje OX:

     $$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \ln(x^2 - 1) \end{array}\right\} \Longrightarrow \ln(x^2-1) = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 1 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2} \in Dom\, f$$

     Los puntos de corte con el eje OX son $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$

   - Punto de corte con el eje OY:

     $$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \ln(x^2 - 1) \end{array}\right\} \Longrightarrow y = \ln(-1) \not\in \mathbb{R} \Longrightarrow$$

     No hay punto de corte con OY (porque x=0 $\not\in Dom\, f$)

2. Dada $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$:

   - Puntos de corte con el eje OX:

     $$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \sqrt{4x - x^2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sqrt{4x - x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 4 \in Dom\, f$$

     Los puntos de corte con el eje OX son $(0, 0)$ y $(4, 0)$

   - Punto de corte con el eje OY:

     $$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \sqrt{4x - x^2} \end{array}\right\} \Longrightarrow y = \sqrt{0} = 0$$

     El punto de corte con el eje OY es $(0, 0)$

3.3. Obtención de las ecuaciones de las asíntotas.

- Asíntotas horizontales.
  - La recta de ecuación $y = k_1$ es una asíntota horizontal situada a la derecha de la gráfica si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = k_1$
  - La recta de ecuación $y = k_2$ es una asíntota horizontal situada a la izquierda de la gráfica si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = k_2$

Las funciones típicas con asíntotas horizontales suelen ser las funciones exponenciales, la función arcotangente, y las funciones racionales en las que el grado del polinomio del numerador es menor o igual que el grado del polinomio del denominador.

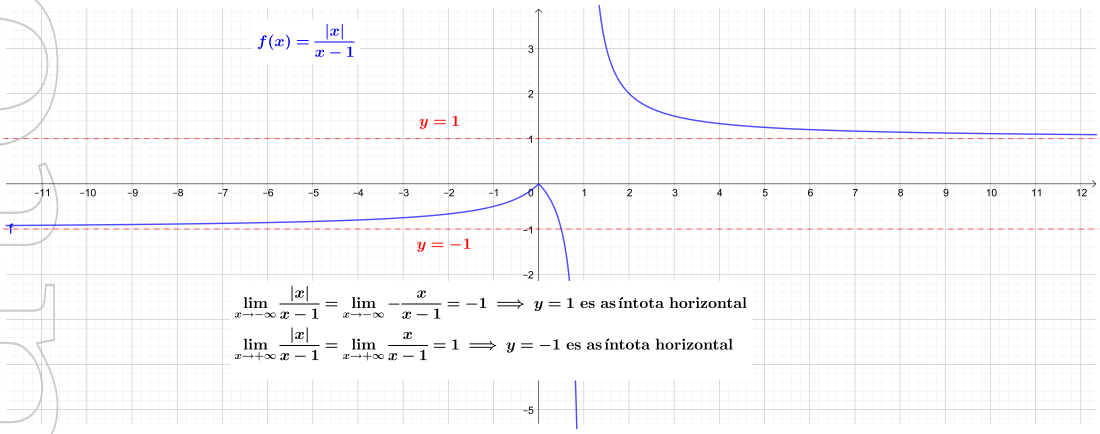


Figura 5: Ejemplo de asíntotas horizontales

- Asíntotas verticales.

  La recta de ecuación $x = a$ es una asíntota vertical si se cumple al menos una de las dos siguientes condiciones:

  I) El límite $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existe, y es un infinito.

  II) El límite $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ existe, y es un infinito.

  Las típicas funciones con asíntotas verticales suelen ser las funciones racionales en las raíces del denominador, las funciones logarítmicas, y la función tangente (así como la cotangente, la cosecante, y la secante).

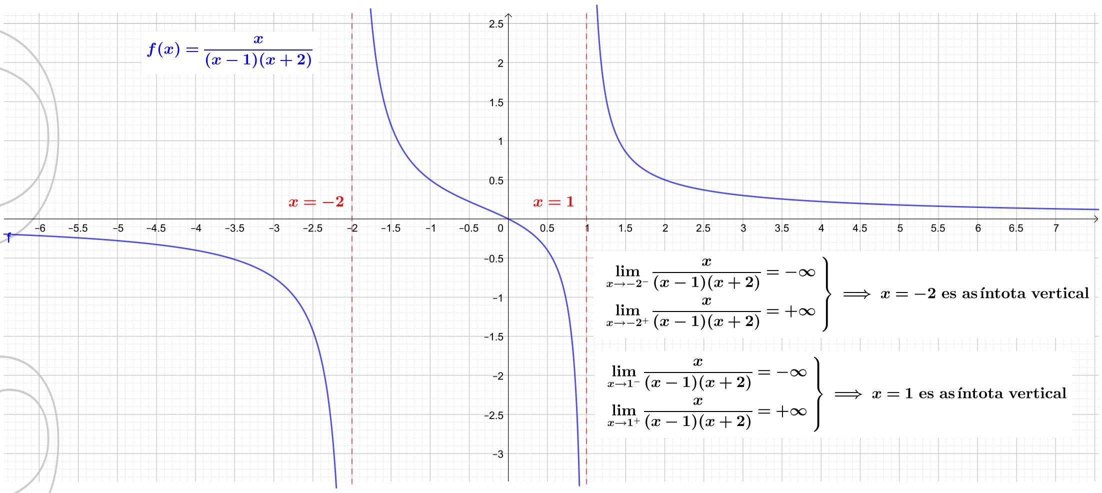


Figura 6: Ejemplo de asíntotas verticales

- Asíntotas oblícuas.

  - Para que la recta $y = m_1x + n_1$ sea una asíntota oblicua de la función a la derecha de la gráfica, deben cumplirse simultáneamente las dos siguientes condiciones:

    I) Existe, y es un número real el límite $m_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

II) Existe, y es un número real el límite $n_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - m_1\, x)$

- Para que la recta $y = m_2 x + n_2$ sea una asíntota oblicua de la función a la izquierda de la gráfica, deben cumplirse simultáneamente las dos siguientes condiciones:

  I) Existe, y es un número real el límite $m_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

  II) Existe, y es un número real el límite $n_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - m_2 x)$

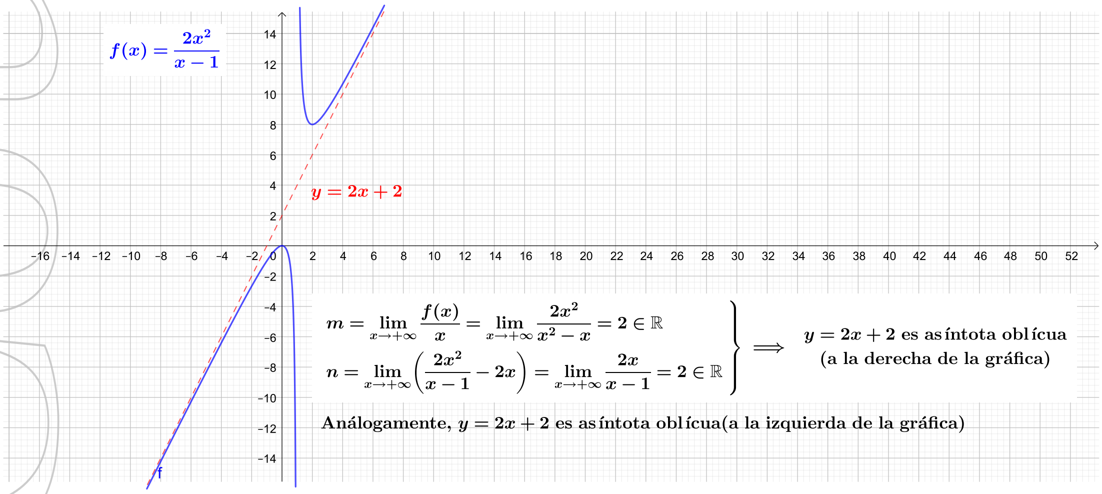


Figura 7: Ejemplo de asíntotas oblícuas

Las típicas funciones con asíntotas oblícuas son funciones racionales en las que el grado del polinomio del numerador es una unidad mayor que el grado del polinomio del denominador.

Una función no puede tener al mismo tiempo una asíntota horizontal y una asíntota oblicua a la derecha de la gráfica.

Análogamente, una función no puede tener al mismo tiempo una asíntota horizontal y una asíntota oblicua a la izquierda de la gráfica.

3.4. Estudio de la continuidad y derivabilidad.

Las funciones elementales, y sus operaciones (suma, diferencia, producto, cociente, y composición) son continuas y derivables en todo su dominio de definición.

En el caso de las funciones a trozos, conviene tener en cuenta que en los puntos en donde cambia la definición de la función, es posible que haya discontinuidades de salto infinito (asíntotas), o no sea derivable (lo que puede afectar a la búsqueda de máximos y mínimos relativos)

3.5. Monotonía: Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Definición de función creciente y función decreciente

- f es creciente en un intervalo I cuando $\forall\, x, y \in I,\ x < y \implies f(x) \leq f(y)$

  (Si $\forall\, x, y \in I,\ x < y \implies f(x) < f(y)$, f se dice estrictamente creciente).

- f es decreciente en un intervalo I cuando $\forall\, x, y \in I,\ x < y \implies f(x) \geq f(y)$.
  (Si $\forall\, x, y \in I,\ x < y \implies f(x) > f(y)$, f se dice estrictamente decreciente).
- f es constante en un intervalo I cuando $\exists\, c \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = c \quad \forall\, x \in I$

Teorema: Caracterización de la monotonía en funciones derivables

Sea f es una función derivable, e I un intervalo contenido en el dominio de definición de f. Entonces:

I) f es constante en $I \iff f'(x) = 0 \quad \forall\, x \in I$

II) f es creciente en $I \iff f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in I$

III) f es decreciente en $I \iff f'(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in I$

IV) $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in I \implies f$ es estrictamente creciente en I

V) $f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in I \implies f$ es estrictamente decreciente en I

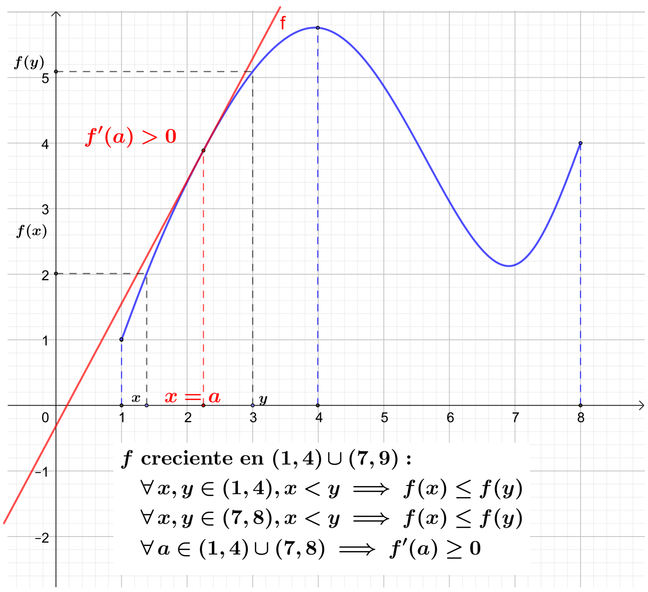


Figura 8: Ejemplo de intervalos de crecimiento

3.6. Extremos relativos: Máximos y mínimos relativos

Definición de máximo y mínimo relativo

Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, y a un punto interior al intervalo I.

- Se dice que f tiene un máximo relativo en $x = a$ cuando en un entorno de $x = a$, la función toma valores menores que $f(a)$:

$$f \text{ tiene un máximo relativo en } x = a \iff \exists\, \delta > 0 \,/\, f(x) < f(a)\ \forall\, x \in (a - \delta, a + \delta)$$

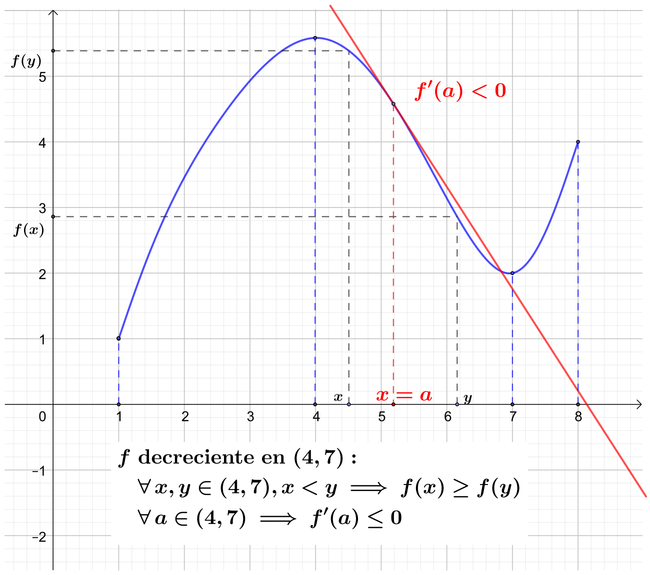


Figura 9: Ejemplo de intervalos de decrecimiento

- Se dice que f tiene un mínimo relativo en $x = a$ cuando en un entorno de $x = a$, la función toma valores mayores que $f(a)$:

  $$f \text{ tiene un mínimo relativo en } x = a \Longleftrightarrow \exists\, \delta > 0 \,/\, f(a) < f(x)\ \forall\, x \in (a - \delta, a + \delta)$$

Extremos relativos en puntos donde la función no es derivable

Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, a un punto interior al intervalo I, $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en I, y derivable en todo I salvo en el punto $x = a$. Si existe un $\delta > 0$ tal que en los intervalos $(a - \delta, a)$ y $(a, a + \delta)$ la derivada f' cambia de signo, entonces:

I) $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in (a - \delta, a)$, y $f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in (a, a + \delta) \implies f$ tiene un máximo relativo en $x = a$

II) $f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in (a - \delta, a)$, y $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in (a, a + \delta) \implies f$ tiene un mínimo relativo en $x = a$

Extremos relativos en puntos donde la función es derivable

- **Teorema: Condición necesaria para la existencia de un extremo relativo en $x = a$**

  Sea $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en I, y a un punto interior de I. Entonces, si f alcanza un extremo relativo en $x = a$ se cumple que $f'(a) = 0$

  Observación: El recíproco no es cierto. Si $f'(a) = 0$ solo puede deducirse que en $x = a$ la recta tangente a la función es horizontal o paralela al eje OX, no implica que en $x = a$ tenga que haber un extremo relativo.

- **Teorema: Condición suficiente para la existencia de extremo relativo en $x = a$ (cambio de signo de f')**

  Sea $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en I, y a un punto interior de I en el que $f'(a) = 0$. Entonces:

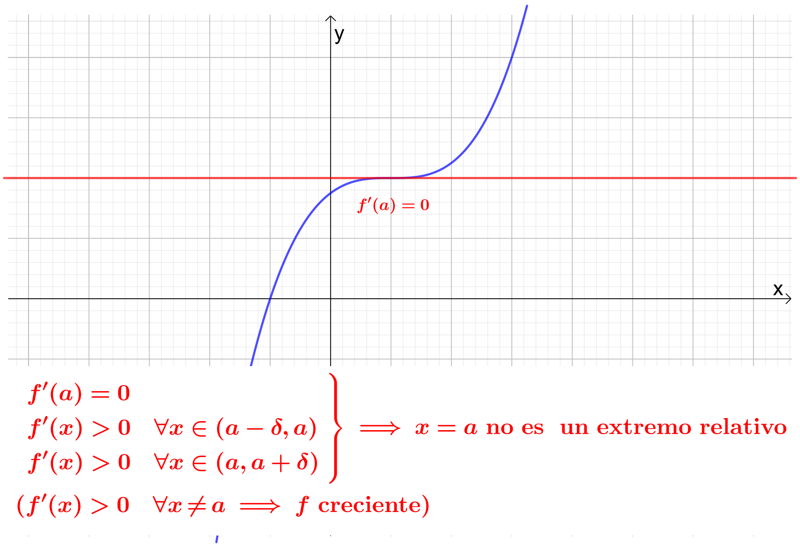


Figura 10: Ejemplo de punto crítico donde no hay extremo relativo

I) Si $\exists\, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \,/\, f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in (a-\delta, a)$, y $f'(x) < 0 \,\forall\, x \in (a, a+\delta)$, entonces la función f alcanza un máximo relativo en $x = a$.

II) Si $\exists\, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \,/\, f'(x) < 0 \,\forall\, x \in (a-\delta, a)$, y $f'(x) > 0 \,\forall\, x \in (a, a+\delta)$, la función f alcanza un mínimo relativo en $x = a$.

- **Teorema: Condición suficiente para la existencia de extremo relativo en $x = a$ (estudio de f'')**

  Sea $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en I, y a un punto interior de I en el que $f'(a) = 0$. Si existe $f''(a)$, entonces:

  I) $f''(a) > 0 \implies f$ tiene un mínimo relativo en $x = a$.

  II) $f''(a) < 0 \implies f$ tiene un máximo relativo en $x = a$.

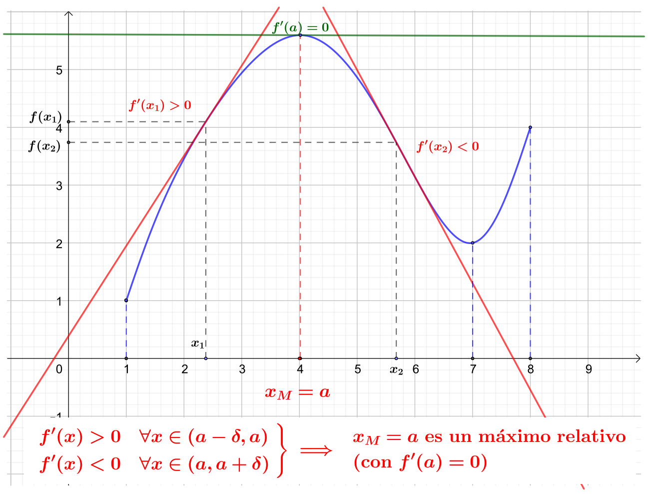


Figura 11: Ejemplo de máximo relativo en un punto donde f es derivable

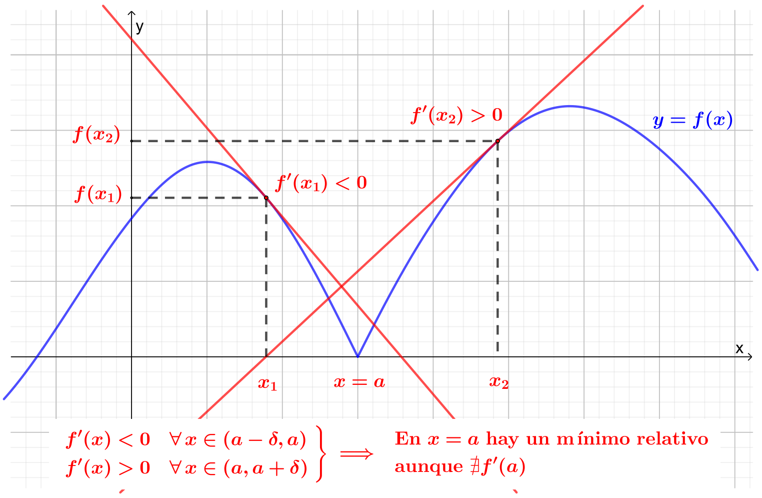


Figura 12: Ejemplo de mínimo relativo en un punto donde f no es derivable

3.7. Extremos absolutos: Máximo y mínimos absoluto

Definición de máximo y mínimo absoluto

- Una función f con dominio $Dom\, f$ alcanza su máximo absoluto en $x = a$ cuando $f(a) \geq f(x) \quad \forall\, x \in Dom\, f$
- Una función f con dominio $Dom\, f$ alcanza su mínimo absoluto en $x = a$ cuando $f(a) \leq f(x) \quad \forall\, x \in Dom\, f$

Cálculo de extremos absolutos

- Si $Dom\, f = [a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$, y f es continua en $[a, b]$, por el Teorema de Weierstrass alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto en $[a, b]$
- Si f no satisface las hipótesis del Teorema de Weierstrass, la localización de extremos absolutos supone analizar la monotonía de la función, y la existencia de asíntotas o ramas infinitas.

3.8. Curvatura: intervalos de convexidad y de concavidad

Definición de función cóncava y función convexa

Sea I un intervalo de la recta real, y una función $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

- f es convexa en I si para cualesquiera $a, b \in I$, la recta secante a la función que une los puntos $(a, f(a)$ y $b, f(b)$ queda por encima de la gráfica de la función en el intervalo de extremos a y b.
- f es cóncava en I si para cualesquiera $a, b \in I$, la recta secante a la función que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ queda por debajo de la gráfica de la función en el intervalo de extremos a y b.

Teoremas de caracterización de la curvatura de una función

Sean I un intervalo de la recta real, y $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en I.

- f es convexa en $I \iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

  Geométricamente, esto significa que f es convexa en I si y solo si para cualquier $a \in I$, la recta tangente a la función en $x = a$ queda por debajo de la gráfica de la función $\forall x \in I$.

- f es cóncava en $I \iff f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$

  Geométricamente, esto significa que f es convexa en I si y solo si para cualquier $a \in I$, la recta tangente a la función en $x = a$ queda por encima de la gráfica de la función $\forall x \in I$

- $f''(x) > 0 \quad \forall x \in I \implies f$ convexa en I.

  Si $f''(x) > 0$ en I, $f'(x)$ es una función creciente en I. Geométricamente, esto significa que la tangente del ángulo que forma la recta tangente a la función f con el eje OX va en aumento a medida que aumenta x.

- $f''(x) < 0 \quad \forall x \in I \implies f$ cóncava en I.

  Si $f''(x) < 0$ en I, $f'(x)$ es una función decreciente en I. Geométricamente, esto significa que la tangente del ángulo que forma la recta tangente a la función f con el eje OX va disminuyendo a medida que aumenta x.

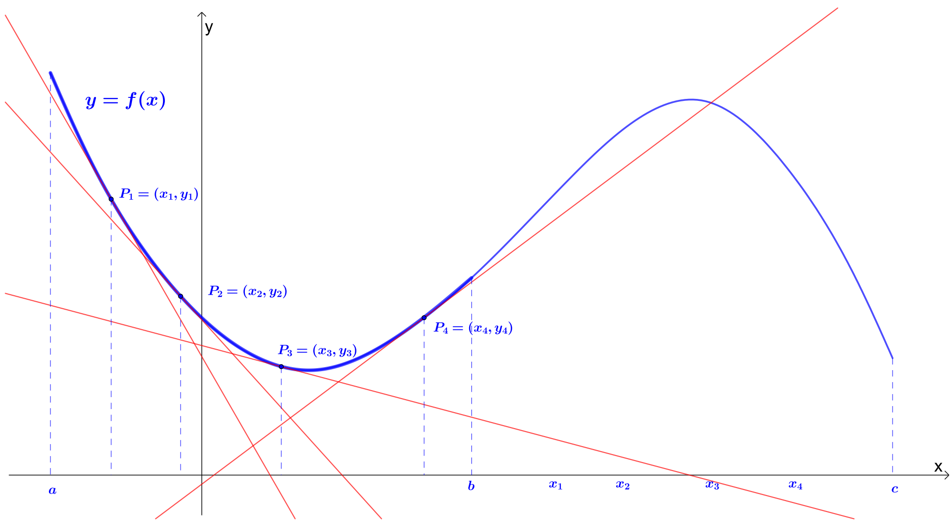


Figura 13: Ejemplo de función convexa en (a, b)

3.9. Puntos de inflexión

Definición: Punto de inflexión

Sea f una función, con dominio $Dom\, f$, y a un punto interior a $Dom\, f$. Se dice que f tiene un punto de inflexión en $x = a$ si existe un $\delta > 0$ para el que se cumple alguna de las dos siguientes condiciones:

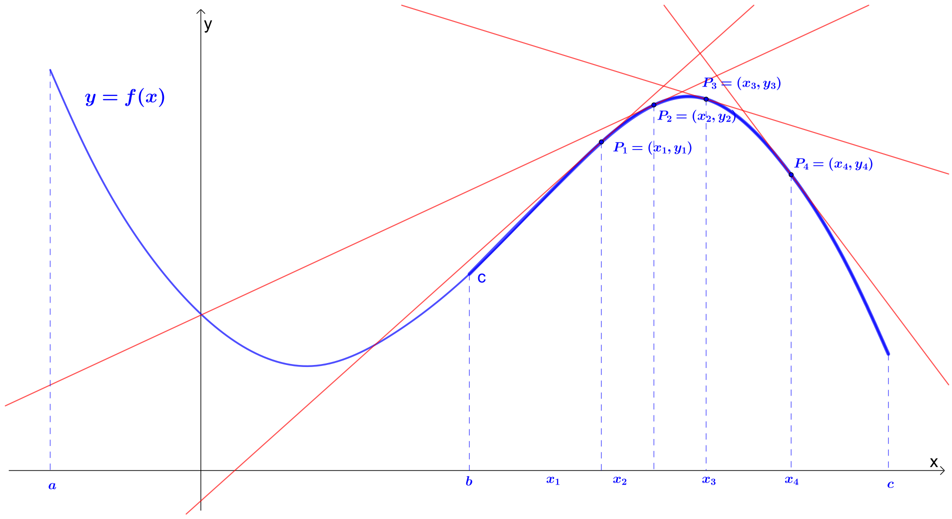


Figura 14: Ejemplo de función cóncava en (b, c)

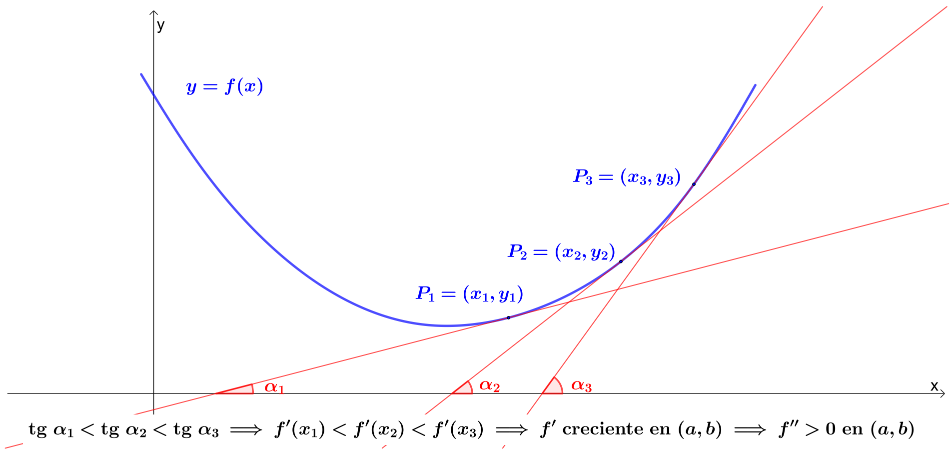


Figura 15: $f'' > 0$ en $(a, b) \implies f$ convexa en (a, b)

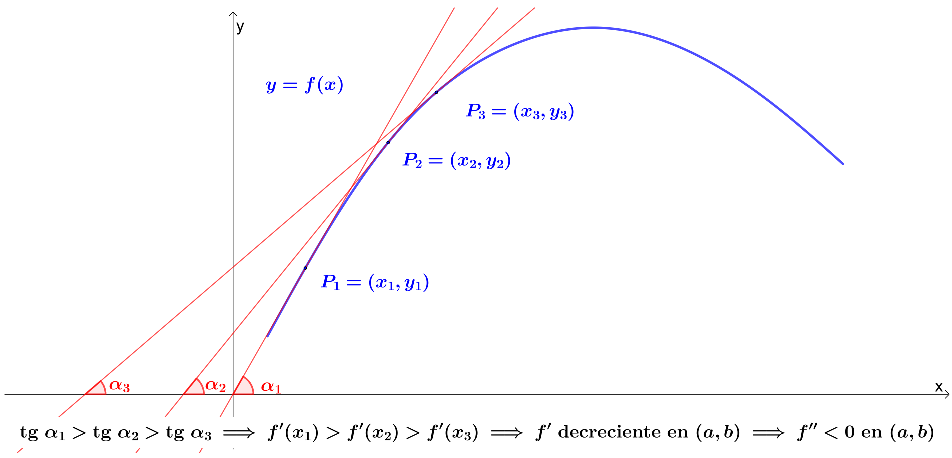


Figura 16: $f'' < 0$ en $(a, b) \implies f$ cóncava en (a, b)

- f es cóncava en $(a - \delta, a)$ y convexa en $(a, a + \delta)$
- f es convexa en $(a - \delta, a)$ y cóncava en $(a, a + \delta)$

Cálculo de puntos de inflexión

Sean I un intervalo de la recta real, $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos veces derivable en I, y a un punto interior al intervalo I. Entonces, f tiene un punto de inflexión en $x = a$ si y solo si se satisfacen simultáneamente las dos siguientes condiciones:

I) $f''(a) = 0$

II) La derivada segunda cambia de signo en $x = a$. Es decir, existe un número real $\delta > 0$ tal que:

- O bien $\forall\, x \in (a, a+\delta)\ f''(x) > 0$ y $\forall\, x \in (a-\delta, a)\ f''(x) < 0$
- O bien $\forall\, x \in (a, a+\delta)\ f''(x) < 0$ y $\forall\, x \in (a-\delta, a)\ f''(x) > 0$

Observación: Si $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en I, y dos veces derivable en I salvo en $x = a$, pero la derivada segunda cambia de signo en un entorno de $x = a$, entonces f tiene un punto de inflexión en $x = a$.

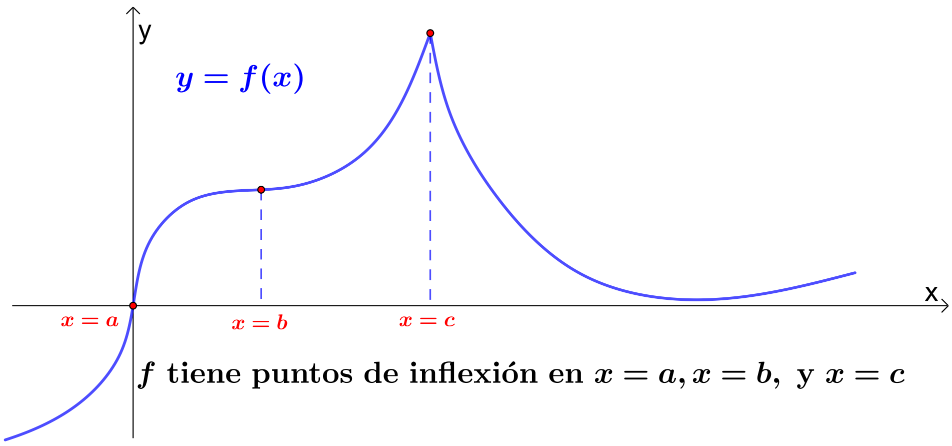


Figura 17: Ejemplo de función con puntos de inflexión

3.10. Clasificación general de puntos críticos

Dada una función derivable $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, y a un punto interior a I. Si $f'(a) = 0$, se dice que $x = a$ es un punto crítico.

Para poder decidir si en $x = a$ hay un extremo relativo o un punto de inflexión, si existen las n derivadas sucesivas de f en x=a, con $f'(a) = \ldots = f^{(n-1}(a) = 0$, y $f^{(n}(a) \neq 0$ se tiene el siguiente resultado:

- n par $\implies$ f tiene un extremo relativo en $x = a$.
  - $f^{(n}(a) > 0 \implies f$ tiene un mínimo relativo.
  - $f^{(n}(a) < 0 \implies f$ tiene un máximo relativo.
- n impar $(n > 1) \implies f$ tiene un punto de inflexión en $x = a$.
  - $f^{(n}(a) > 0 \implies f$ cambia de cóncava a convexa.
  - $f^{(n}(a) < 0 \implies f$ cambia de convexa a cóncava.

3.11. Simetrías

- Una función f con dominio el conjunto $Dom\, f$ es par cuando

$$\forall\, x \in Dom\, f,\ f(-x) = f(x)$$

De la definición se deduce que la gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje OY.

- Una función f con dominio el conjunto $Dom\, f$ es impar cuando

$$\forall\, x \in Dom\, f,\ f(-x) = -f(x)$$

De la definición se deduce que la gráfica de una función par presenta una simetría central con respecto al origen de coordenadas.

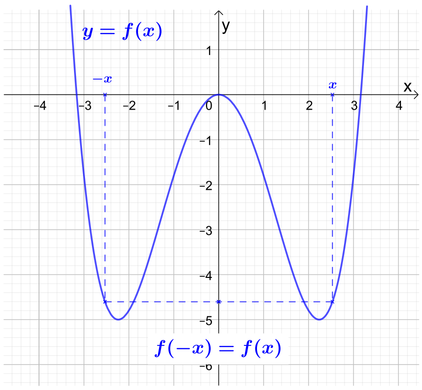


Figura 18: Ejemplo de función par

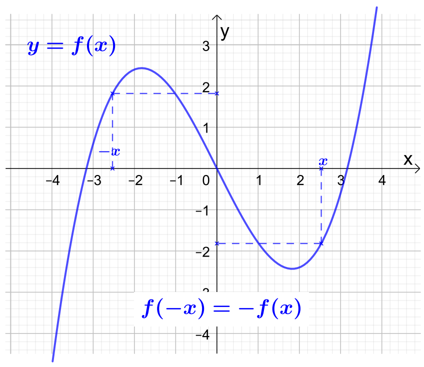


Figura 19: Ejemplo de función impar

3.12. Periodicidad

Una función es T-periódica cuando $\exists\, T \in \mathbb{R} \,/\, f(x+T) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
Las funciones periódicas típicas son las funciones trigonométricas seno, coseno, y tangente (y también cosecante, secante, y cotangente)

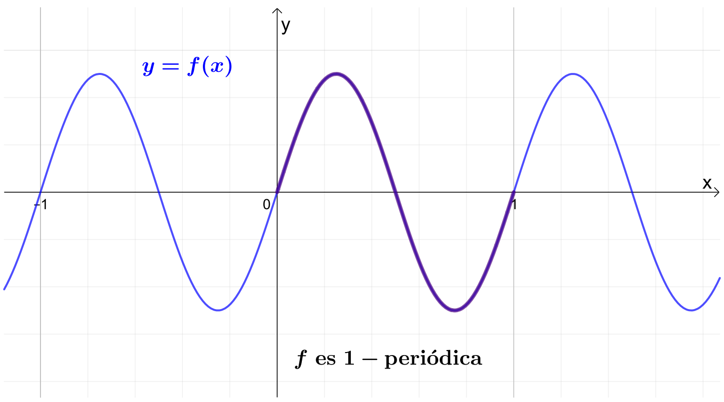


Figura 20: Ejemplo de función periódica