Bloque de Análisis

Ejercicio 1 *(Junio 2019. Opción A)*
Da respuesta a los apartados siguientes:

a) *Mediante integración por partes, demuestra que* $\int \ln x\, dx = x(\ln x - 1) + C$. *Luego, demuestra la misma igualdad mediante derivación.*

b) *Si* $f(x) = \begin{cases} \ln x & si \quad x \in (0, e] \\ ax + b & si \quad x \in (e, +\infty) \end{cases}$, *di qué relación tiene que existir entre los parámetros* a *y* b *para que* f *sea continua, y cuáles tienen que ser sus valores para que* f *sea derivable.*

c) *Calcula el área de la región encerrada por el eje* OX, *la recta* $x = 4$, *y la gráfica de* $f(x) = \begin{cases} \ln x & si \quad x \in (0, e] \\ \frac{x}{e} & si \quad x \in (e, +\infty) \end{cases}$

Ejercicio 2 *(Junio 2019. Opción B)*
Considérese la función $f(x) = x^2\, e^{-x}$. *Se pide:*

a) *Calcular los límites* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) *Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, y puntos de inflexión.*

c) *Calcular* $\int f(x)\, dx$

Ejercicio 3 *(Julio 2019. Opción A)*
Da respuesta a los apartados siguientes:

a) *Estudia los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos de la función* $f(x) = x^2 \ln x$

b) *Considérese un triángulo tal que dos de sus vértices son el origen* $O = (0, 0)$ *y el punto* $P = (1, 3)$, *uno de sus lados está sobre el eje OX, y otro sobre la tangente en* $P = (1, 3)$ *a la gráfica de la parábola* $y = 4 - x^2$. *Se pide calcular las coordenadas del tercer vértice, dibujar el triángulo y calcular, por separado, el área de las dos regiones en las que el triángulo queda dividido por la parábola* $y = 4 - x^2$

Ejercicio 4 *(Julio 2019. Opción B)*
Da respuesta a los apartados siguientes:

a) *De entre todos los triángulos rectángulos contenidos en el primer cuadrante que tienen un vértice en el origen, otro sobre la parábola* $y = 4 - x^2$, *un cateto sobre el eje* X *y el otro paralelo al eje* Y, *obtén los catetos y la hipotenusa de aquel cuya área es máxima.*

b) *Enuncia los teoremas de Bolzano y de Rolle.*

Ejercicio 5 *(Junio 2018. Opción A)*

a) *Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y los mínimos relativos de* $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2}$

b) *Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola $y = x^2 - 4x$ y la recta $y = x - 4$. (Para el dibujo de la parábola indica los puntos de corte con los ejes, el vértice, y la concavidad o convexidad)*

Ejercicio 6 *(Junio 2018. Opción B)*

a) *Calcula a y b para que la función* $f(x) = \begin{cases} e^{2x} + ax + b & si \quad x < 0 \\ \frac{1}{2}(x^2+2) & si \quad x \geq 0 \end{cases}$ *sea continua y derivable en $x = 0$.*

b) *Calcula los vértices del rectángulo de área máxima que se puede construir si uno de los vértices es $(0, 0)$, el otro está sobre el eje OX, el otro sobre el eje OY, y el otro sobre la recta $2x + 3y = 8$.*

c) *Calcula* $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$

Ejercicio 7 *(Septiembre 2018. Opción A)*

a) *Enuncia el Teorema de Rolle. Calcula a, b, y c para que* $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax & si \quad x < 1 \\ bx + c & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ *cumpla las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $[0, 2]$, y calcula el punto en el que se cumple el teorema.*

b) *Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola $y = x^2 - 2x$ y la recta $y = x$. (Para el dibujo de la parábola indica los puntos de corte con los ejes de coordenadas, el vértice, y la concavidad o convexidad)*

Ejercicio 8 *(Septiembre 2018. Opción B)*

a) *Calcula, si existe, el valor de m para que* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) + mx^2 - 1}{\operatorname{sen}(x^2)} = 3$

b) *Calcula los valores de a, b, c y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un punto de inflexión en el punto $(0, 5)$, y la tangente a su gráfica en el punto $(1, 1)$ sea paralela al eje OX.*

c) *Calcula* $\displaystyle\int_1^e \sqrt{x}\,\ln x\,dx$

Ejercicio 9 *(Junio 2017. Opción A)*

a) *Calcula* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x - 3x^2}{e^{x^2} - \cos(2x)}$

b) *Se desea construir una caja de base cuadrada, con tapa y una capacidad de $80\,dm^3$. Para la tapa y la superficie lateral se quiere utilizar un material que cuesta $2\,€/dm^2$, y para la base otro que cuesta $3\,€/dm^2$. Calcula las dimensiones de la caja para que el coste sea mínimo.*

c) *Calcula* $\displaystyle\int_0^1 x\,\ln(1+x)\,dx$

Ejercicio 10 *(Junio 2017. Opción B)* *a)* *Calcula los valores de a y b para que la función* $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & si \quad x < 3 \\ \ln(x-2) & si \quad x \geq 3 \end{cases}$ *sea derivable en $x = 3$, y determina el punto en el que la tangente a la gráfica de $y = f(x)$ es paralela a la recta $x + 3y = 0$*

b) *Si $p(x)$ es un polinomio de tercer grado, con un punto de inflexión en el punto $(0, 5)$, y un extremo relativo en el punto $(1, 1)$, calcula* $\int_0^1 p(x)\, dx$

Ejercicio 11 *(Septiembre 2017. Opción A)*

a) *Calcula:*

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + 3e^{2x}}{x + e^{2x}}$ ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 3e^{2x}}{x + e^{2x}}$

b) *La derivada de una función $f(x)$, que tiene por dominio $(0, +\infty)$, es $f'(x) = 1 + \ln x$. Determina la función $f(x)$ teniendo en cuenta que su gráfica pasa por el punto $(1, 4)$.*

c) *Determina, si existen, los máximos y los mínimos relativos de $f(x)$*

Ejercicio 12 *(Septiembre 2017. Opción B)*
Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$

a) *Estudia, en $x = 0$, la continuidad y la derivabilidad.*

b) *Determina los puntos de la gráfica de $y = f(x)$ en los que la recta tangente es paralela a la recta $x - 4y = 0$, y determina las ecuaciones de esas rectas tangentes.*

c) *Calcula* $\int_{-1}^0 f(x)\, dx$

Ejercicio 13 *(Junio 2016. Opción A)*

a) *Definición e interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial.*

b) *Calcula los límites siguientes:*

i) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x - \sqrt{2 - x}}$ ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \ln(1 + x)}{x \ln(1 + x)}$

Ejercicio 14 *(Junio 2016. Opción A)*
La derivada de una función $f(x)$, cuyo dominio es $(0, +\infty)$, es $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$*:*

a) *Determina la función $f(x)$ sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1, 0)$*

b) *Determina los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)$*

Ejercicio 15 *(Junio 2016. Opción B)*

a) *Enunciado e interpretación geométrica del Teorema de Rolle.*

b) *Sea* $f(x) = 2x + \frac{5}{2}\ln(1+x^2)$. *Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de* $f(x)$ *en el punto correspondiente a* $x = 0$. *Determina, si existen, los máximos y los mínimos relativos de* $f(x)$

Ejercicio 16 *(Junio 2016. Opción B)*

Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax+2 & si \quad x < 1 \\ 3(x-2)^2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

a) *¿Es* $f(x)$ *derivable en* $x = 1$ *para algún valor de* a*?*

b) *Para* $a = 1$, *calcula el área de la región limitada por la gráfica de* $y = f(x)$ *y el eje* OX.

Ejercicio 17 *(Septiembre 2016. Opción A)*

a) *Definición e interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.*

b) *De una función* $f(x)$ *sabemos que* $f(-1) = 1$, *y que su función derivada es la función* $f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & si \quad x < 0 \\ e^{2x}-2 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$. *Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de* $f(x)$ *en los puntos de abscisa* $x = -2$, *y* $x = \frac{\ln 2}{2}$

Ejercicio 18 *(Septiembre 2016. Opción A)*

Calcula y dibuja el área de la región limitada por la gráfica de la parábola $y = x(x-2)$, *el eje de abscisas, y la recta* $y = x$ *(Para el dibujo de la gráfica de la parábola indica los puntos de corte con los ejes de coordenadas, el vértice, y la concavidad o convexidad)*

Ejercicio 19 *(Septiembre 2016. Opción B)*

a) *Dibuja la gráfica de* $f(x) = 1 + \dfrac{2}{(x-2)^2}$ *estudiando: dominio, simetrías, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión, e intervalos de concavidad y convexidad.*

Ejercicio 20 *(Septiembre 2016. Opción B)*

a) *Enuncia el Teorema Fundamental del Cálculo Integral. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función* $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^2+6}{2+e^t}\,dt$ *en el punto de abscisa* $x = 0$.

b) *Calcula* $\displaystyle\int_0^1 x\,\ln(1+x)\,dx$

Ejercicio 21 *(Junio 2015. Opción A)*

Dibuja la gráfica de $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$ *estudiando: dominio, simetrías, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión, e intervalos de concavidad y convexidad.*

Ejercicio 22 *(Junio 2015. Opción A)*

a) *Define primitiva de una función, y enuncia la Regla de Barrow.*

b) *Dada la función* $f(x) = ax^3 + bx + c$, *determina* a, b *y* c *sabiendo que* $y = 2x + 1$ *es la recta tangente a la gráfica de* $f(x)$ *en el punto correspondiente a la abscisa* $x = 0$, *y que* $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$

Ejercicio 23 *(Junio 2015. Opción B)*

a) *Definición e interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.*

b) *Calcula los valores de* b *y* c *para que la función* $f(x) = \begin{cases} \ln(e + x^2) & si \quad x < 0 \\ x^2 + bx + c & si \quad x \geq 0 \end{cases}$ *sea derivable en* $x = 0$

Ejercicio 24 *(Junio 2015. Opción B)*
La gráfica de una función $f(x)$ *pasa por el origen de coordenadas, y su función derivada es* $f'(x) = (2 - x)e^{3x}$. *Determina la función* $f(x)$ *y calcula los intervalos de concavidad y convexidad de* $f(x)$

Ejercicio 25 *(Septiembre 2015. Opción A)*

a) *Calcula los valores de* a *y* b *para que la función* $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & si \quad x \leq 1 \\ \frac{2\ \ln\ x + 2}{x^2} & si \quad x > 1 \end{cases}$ *sea derivable en* $x = 1$.

b) *Para los valores* $a = -4$ *y* $b = 6$, *determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de* $f(x)$

Ejercicio 26 *(Septiembre 2015. Opción A)*
Dibuja y calcula el área de la región limitada por las gráficas de la parábola $f(x) = 4x - x^2$, *y las rectas tangentes a la gráfica de* $f(x)$ *en los puntos correspondientes a* $x = 0$ *y* $x = 2$ *(Para el dibujo de la parábola indicar los puntos de corte con los ejes de coordenadas, el vértice, y la concavidad o convexidad)*

Ejercicio 27 *(Septiembre 2015. Opción B)*

a) *Define derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica.*

b) *Dada la función* $f(x) = 2e^{-x}(x + 1)$, *calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos.*

Ejercicio 28 *(Septiembre 2015. Opción B)*

a) *Calcula* $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4 + x} - 2 - \frac{x}{4}}{x^2}$

b) *Calcula una primitiva de la función* $f(x) = x \operatorname{sen} x$, *que pase por el punto* $(\pi, 0)$

Ejercicio 29 *(Junio 2014. Opción A)*

a) *Define función continua en un punto. ¿Qué tipo de discontinuidad tiene* $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$ *en los puntos* $x = 0$ *y* $x = 2$?

b) *Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de* $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1$ *en su punto de inflexión.*

Ejercicio 30 *(Junio 2014. Opción A)*

a) *Calcula* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2x-1)}{x^2-\sqrt{2}}$

b) *Calcula* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$

Ejercicio 31 *(Junio 2014. Opción B)*

a) *Dada la función* $f(x) = \frac{ax+b}{cx-1}$, *calcula los valores de* a, b, *y* c *sabiendo que* $x = \frac{1}{2}$ *es una asíntota vertical, y que* $y = 5x-6$ *es la recta tangente a su gráfica en el punto correspondiente a* $x = 1$.

Para los valores de a, b, *y* c *calculados, ¿tiene* $f(x)$ *más asíntotas?*

b) *Enuncia el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial. ¿Se puede aplicar este teorema a la función* $f(x) = \frac{1}{2-x}$ *en el intervalo* $[0,1]$*?. En caso afirmativo, calcula el punto al que hace referencia el teorema.*

Ejercicio 32 *(Junio 2014. Opción B)*
Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola $f(x) = -x^2$ *y la recta normal a la gráfica de* $f(x)$ *en el punto correspondiente a* $x = 1$ *(Para el dibujo de las gráficas, indicar los puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola, y la concavidad o convexidad)*

Ejercicio 33 *(Septiembre 2014. Opción A)*

a) *Calcula* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-2x} - 2x}{\operatorname{sen}^2 x}$

b) *Queremos dividir un hilo metálico de* 70 *metros de longitud en tres partes, de manera que una de ellas tenga el doble de longitud que la otra, y además, que al construir con cada parte un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Calcula la longitud de cada parte.*

Ejercicio 34 *(Septiembre 2014. Opción A)*

a) *La segunda derivada de una función* $f(x)$ *es* $f''(x) = 4e^{2x} - 2x$. *Ademas la tangente a la gráfica de* $f(x)$ *en el punto* $(0,1)$ *es paralela a la recta* $x - y + 3 = 0$. *Calcula* $f(x)$.

b) *Calcula* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\operatorname{sen}(2x+\pi)\,dx$

Ejercicio 35 *(Septiembre 2014. Opción B)*
Dada la función $f(x) = \begin{cases} mx & si \quad x < 1 \\ ax^2+bx+1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

a) *Calcula los valores de* a, b *y* m *para que* $f(x)$ *sea derivable en* $x = 1$, *y tenga un extremo relativo en* $x = 3$.

b) *Enuncia el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial. Para los valores* $a = 1$, $b = -6$, *y* $m = -4$, *calcula, si existe, un punto* $c \in (0,5)$ *tal que la tangente a la gráfica de* $f(x)$ *en* $x = c$ *sea paralela al segmento que une los puntos* $(0,0)$ *y* $(5,-4)$

Ejercicio 36 *(Septiembre 2014. Opción B)*

a) *Calcula* $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{3+3e^x}\,dx$

b) *Enuncia el Teorema Fundamental del Cálculo Integral. Si* $F(x)=\int_0^x \frac{2}{3+3e^t}\,dt$*, calcula el límite* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}$

Ejercicio 37 *(Junio 2013. Opción A)*

a) *Enuncia el Teorema de Bolzano. ¿Tiene la ecuación* $x^3+2x-2=0$ *alguna solución en el intervalo* $(0,1)$*?¿Tiene esta ecuación más de una solución real?*

b) *Calcula los valores de a y b para que* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-e^{2x}}{\operatorname{sen}(x^2)}=1$

Ejercicio 38 *(Junio 2013. Opción A)*

a) *Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los intervalos de concavidad y convexidad de la función* $f(x)=x^3-4x^2+4x$

b) *Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de* $f(x)=x^3-4x^2+4x$*, y la bisectriz del primer cuadrante. (Para el dibujo de la gráfica de* $f(x)$ *es suficiente utilizar el apartado anterior, y calcular los puntos de corte con los ejes)*

Ejercicio 39 *(Junio 2013. Opción B)* *En una circunferencia de centro O y radio* 10 *cm se traza un diámetro AB, y una cuerda CD perpendicular a ese diámetro. ¿A qué distancia del centro O de la circunferencia debe estar la cuerda CD, para que la diferencia entre las áreas de los triángulos* $\Delta\, ADC$ *y* $\Delta\, BCD$ *sea máxima?*

Ejercicio 40 *(Junio 2013. Opción B)*

a) *Enuncia el Teorema de Rolle. Determina el valor de a para que sea aplicable dicho teorema a la función* $f(x)=x^3+ax-1$ *en el intervalo* $[0,1]$*. Para este valor de a, calcula un punto* $c\in(0,1)$ *en el que la recta tangente a la gráfica de* $f(x)$ *sea paralela al eje OX*

b) *Calcula* $\displaystyle\int \frac{x^3+3}{x^2-x}\,dx$

Ejercicio 41 *(Septiembre 2013. Opción A)*

a) *Calcula* $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}+1}{xe^x}$

b) *Si* $f(x)$ *es una función continua en el intervalo* $[1,4]$ *tal que* $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx=2$*, y* $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx=-4$*, ¿cuál es el valor de* $\displaystyle\int_2^4 5\,f(x)\,dx$*? Enuncia las propiedades de la integral definida que utilices.*

Ejercicio 42 *(Septiembre 2013. Opción A)*
Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola $f(x) = -x^2+9x$, *y las rectas* $y = 20$, $x - y + 15 = 0$ *(Para el dibujo de la gráfica de la parábola, indicar los puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola, y la concavidad o convexidad)*

Ejercicio 43 *(Septiembre 2013. Opción B)*
Calcula el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos de $f(x) = \frac{2x+1}{e^{x^2}}$

Ejercicio 44 *(Septiembre 2013. Opción B)*

a) *Define primitiva de una función, y enuncia la Regla de Barrow.*

b) *Calcula* $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^3+2}{x^2-1}\,dx$

Ejercicio 45 *(Junio 2012. Opción A)*

a) *Enuncia el Teorema de Bolzano. Probar que la función* $f(x) = x^3 + 2x - 4$ *corta al eje* OX *en algún punto del intervalo* $[1, 2]$. *¿Puede cortarlo en más de un punto?*

b) *Calcula* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x^2+x+2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Ejercicio 46 *(Junio 2012. Opción A)*
Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola $y = 3x - x^2$ *y su recta normal en el punto* $(3, 0)$. *(Para el dibujo de las gráficas, indicar los puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola, y la concavidad o convexidad)*

Ejercicio 47 *(Junio 2012. Opción B)*

a) *Determina los valores de* a *para que la función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} a - x^2 & si \quad x \leq 1 \\ \frac{2}{ax} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

sea continua. ¿Es derivable en $x = 1$ *para algún valor de* a*?*

b) *Enunciado e interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial.*

Ejercicio 48 *(Junio 2012. Opción B)*
Calcula $\displaystyle\int_2^3 \frac{5x^3-3x+1}{x^3-x}\,dx$

Ejercicio 49 *(Septiembre 2012. Opción A)*

a) *Calcula las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de* $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

b) *Calcula* $\displaystyle\int_1^e \frac{(x-1)^2}{x^2+1}\,dx$

Ejercicio 50 *(Septiembre 2012. Opción A)*

a) *De una función derivable $f(x)$ sabemos que pasa por el punto $(0,1)$, y que su derivada es $f'(x) = xe^{2x}$. Calcula $f(x)$ y la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto correspondiente a $x = 0$.*

b) *Enuncia el Teorema Fundamental del Cálculo Integral.*

Ejercicio 51 *(Septiembre 2012. Opción B)*

a) *Enunciado e interpretación geométrica del Teorema de Rolle.*

b) *Si $c > 2$, calcula los valores de a, b y c para que la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & si \quad x < 2 \\ x + 1 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $[0, c]$

Ejercicio 52 *(Septiembre 2012. Opción B)*
Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$, y la recta tangente en el punto donde la parábola tiene un extremo, la tangente a la parábola en el punto en el que la tangente es paralela a la recta $y = 4x$. (Para el dibujo de las gráficas, indicar los puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola, y la concavidad o convexidad)

Ejercicio 53 *(Junio 2011. Opción A)*

a) *Enuncia el Teorema de Rolle. Calcula el valor de k para que $f(x) = x^3 - kx + 10$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-2, 0]$, y para ese valor determina un punto del intervalo en el que se anule la derivada de $f(x)$.*

b) *Calcula el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $g(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$*

Ejercicio 54 *(Junio 2011. Opción A)*
Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola $f(x) = x^2-2x+1$, su recta tangente en el punto $(3, 4)$, y el eje OX (Para el dibujo de la parábola, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice, y la concavidad o convexidad)

Ejercicio 55 *(Junio 2011. Opción B)*
En una circunferencia de radio 10 cm, se divide uno de sus diámetros en dos partes, que se toman como diámetros de dos circunferencias tangentes interiores a la primera. ¿Qué longitud debe tener cada uno de estos dos diámetros para que sea máxima el área delimitada por las tres circunferencias?

Ejercicio 56 *(Junio 2011. Opción B)*

a) *Define función derivable en un punto. Calcula, si existen, los valores de a y b para que sea derivable la función* $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{e^x} & si \quad x < 0 \\ x^2 + ax + b & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

b) *Define integral indefinida de una función. Calcula* $\displaystyle\int x^2 \cos x \, dx$

Ejercicio 57 *(Septiembre 2011. Opción A)*

a) *Enuncia el Teorema de Bolzano. ¿Podemos asegurar que la gráfica de la función* $f(x) = 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(x^2)$ *corta al eje OX en algún punto del intervalo* $(0, \pi)$*?. Razona la respuesta.*

b) *Descompón el número 40 en dos sumandos iguales tales que el producto del cubo de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo. ¿Cuánto vale ese producto?*

Ejercicio 58 *(Septiembre 2011. Opción A)*

a) *Calcula los valores a, b y c sabiendo que* $y = ax^2 + bx + 1$ *e* $y = x^3 + c$*, tienen la misma recta tangente en el punto* $(1, 2)$

b) *Enuncia la Regla de Barrow. Calcula* $\displaystyle\int_1^e \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) dx$

Ejercicio 59 *(Septiembre 2011. Opción B)*

a) *Calcula los extremos relativos de la función* $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$*. Calcula también el máximo y el mínimo absolutos de esta función en el intervalo* $[-3, 3]$

b) *Calcula los valores de a y b para que la función* $f(x) = ax^2 + bx \ln x$ *tenga un punto de inflexión en el punto* $(1, 2)$*. Para estos valores de a y b, calcula el dominio y los intervalos de concavidad y convexidad de* $f(x)$

Ejercicio 60 *(Septiembre 2011. Opción B)*

a) *Define primitiva e integral definida de una función.*

b) *Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola* $f(x) = -3x^2 + 3$ *y la recta* $y = -9$ *(Para el dibujo de las gráficas, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola, y la concavidad y convexidad)*

Ejercicio 61 *(Junio 2010. Opción A)*
Dibuja la gráfica de $f(x) = \frac{x^2+3x}{x+1}$ *estudiando: dominio, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, mínimos y máximos relativos, puntos de inflexión, e intervalos de concavidad y convexidad*

Ejercicio 62 *(Junio 2010. Opción A)*

a) *Enuncia el Teorema Fundamental del Cálculo Integral.*

Sabiendo que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = x^2(1 + x)$*, con f una función continua en todos los puntos de la recta real, calcula* $f(2)$*.*

b) *Calcula* $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2 + 1}{x^2 + x}\,dx$

Ejercicio 63 *(Junio 2010. Opción B)*

a) *Define función continua en un punto. ¿Cuándo se dice que una discontinuidad es evitable?¿Para qué valores de k la función* $f(x) = \frac{e^x}{x^2+k}$ *es continua en todos los puntos de la recta real?*

b) Determina los valores de a, b, c y d para que la función $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo relativo en el punto $(0,4)$ y un mínimo relativo en el punto $(2,0)$?

Ejercicio 64 *(Junio 2010. Opción B)*
Dibuja y calcula el área de la región limitada por la recta $x + y = 7$ y la gráfica de la parábola $f(x) = x^2 + 5$. (Para el dibujo de las gráficas, indicar los puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola, y la concavidad o convexidad)

Ejercicio 65 *(Septiembre 2010. Opción A)*

a) Definición e interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto.

b) Calcula $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{\operatorname{sen}(x^2)}$

Ejercicio 66 *(Septiembre 2010. Opción A)*
Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de $y = -x^2 + 1$ y las rectas tangentes a esta parábola en los puntos de corte de la parábola con el eje OX. (Para el dibujo de las gráficas indicar los puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola, y la concavidad o convexidad)

Ejercicio 67 *(Septiembre 2010. Opción B)*
Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ estudiando: dominio, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión, e intervalos de concavidad y convexidad.

Ejercicio 68 *(Septiembre 2010. Opción B)*

a) Calcula $\displaystyle\int x \ln(1 + x^2)\, dx$

b) Enuncia e interpreta geométricamente el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

Ejercicio 69 *(Junio 2009. Opción 1)*

a) Define función continua en un punto. ¿Qué tipo de discontinuidad presenta la función $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ en $x = 0$?

b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, y los puntos de inflexión de la función $g(x) = 2x^3 - 3x^2$

c) Calcula el área del recinto limitada por la gráfica de $g(x) = 2x^3 - 3x^2$ y la recta $y = 2x$

Ejercicio 70 *(Junio 2009. Opción 2)*

a) Enuncia e interpreta geométricamente el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial.

b) Calcula un punto de la gráfica de la función $g(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ en el que la recta tangente sea paralela al eje OX, y escribe la ecuación de esa tangente. Calcula las asíntotas, si las tiene, de la función $g(x)$.

c) *Calcula* $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$

Ejercicio 71 *(Septiembre 2009. Opción 1)*

a) *Enuncia e interpreta geométricamente el Teorema de Bolzano. Dada la función* $f(x) = e^x + 3x\ \ln(1+x^2)$*, justifica si se puede asegurar que su gráfica corta al eje OX en algún punto del intervalo* $[-1, 0]$

b) *Calcula los valores de a y b para que la función* $f(x) = \begin{cases} ax+b & si \quad x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(2x)+1 & si \quad x > 0 \end{cases}$ *sea continua y derivable en* $x = 0$.

c) *Calcula el área del recinto limitado por el eje OX y la parábola* $y = \frac{x^2}{4} - x$

Ejercicio 72 *(Septiembre 2009. Opción 2)*

a) *Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica* $f(x) = (1+x^2)e^{-x}$ *en el punto de abscisa* $x = 0$.

b) *Calcula el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos de la función* $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

c) *Enuncia e interpreta geométricamente el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.*

Ejercicio 73 *(Junio 2008. Opción 1)*

a) *Definición e interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.*

b) *Calcula los valores de a y b para que la función* $f(x) = \begin{cases} ax+b & si \quad x < -1 \\ x^2-4x & si \quad x \geq -1 \end{cases}$ *sea derivable en* $x = -1$

c) *Calcula el área del recinto limitado por las parábolas* $y = x^2 - 4x$, $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$

Ejercicio 74 *(Junio 2008. Opción 2)*

a) *Enunciado del Teorema de Weierstrass. Si una función* $f(x)$ *es continua en* $[a, b]$ *y estrictamente decreciente en ese intervalo, ¿dónde alcanza su máximo y su mínimo absoluto?*

b) *Calcula el valor de m para que* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{mx^2 - 1 + \cos x}{\operatorname{sen}(x^2)} = 0$

c) *Calcula* $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+4x+3}\,dx$

Ejercicio 75 *(Septiembre 2008. Opción 1)*

a) *Enunciado e interpretación geométrica del Teorema de Rolle.*

b) *Sea* $f(x) = e^x(2x-1)$*. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de* $f(x)$ *en el punto de abscisa* $x = 0$.

c) *Calcula* $\int e^x(2x-1)\,dx$

Ejercicio 76 *(Septiembre 2008. Opción 2)*

a) *Calcula a, b y c para que* $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & si \quad x\le 0 \\ x+\ln(1+x^2) & si \quad x>0 \end{cases}$ *sea derivable en* $\mathbb{R}$, *y tenga un extremo relativo en* $x=-2$

b) *Sea* $g(x)=x(x-1)$, $0\le x\le 2$. *Razona si* $g(x)$ *tiene un máximo y un mínimo absolutos en el intervalo* $[0,2]$. *En caso afirmativo, calcúlalos.*

c) *Definición de primitiva de una función. Enunciado de la Regla de Barrow.*

Ejercicio 77 *(Junio 2007. Opción 1)*

a) *Dada la función* $f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & si \quad x<2 \\ e^{2-x} & si \quad x\ge 2 \end{cases}$, *calcula a para que* $f(x)$ *sea continua en* $x=2$. *Para el valor obtenido de a, ¿es* $f(x)$ *derivable en* $x=2$*?*

b) *Dada* $g(x)=ax^4+bx+c$, *calcula los valores de a, b y c para que* $g(x)$ *tenga en el punto* $(1,-1)$ *un mínimo relativo, y la recta tangente a la gráfica de* $g(x)$ *en* $x=0$ *sea paralela a la recta* $y=4x$.

c) *Enunciado del Teorema Fundamental del Cálculo Integral.*

Dada la función $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$, *¿tiene* $F(x)$ *puntos de inflexión?. Justifica la respuesta.*

Ejercicio 78 *(Junio 2007. Opción 2)*

a) *Enunciado e interpretación geométrica del Teorema de Rolle.*

b) *Dada* $f(x)=x^3-9x$, *calcula para* $f(x)$*: puntos de corte con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad, y puntos de inflexión.*

c) *Calcula el área de la región del plano limitada por el eje OX y la curva* $y=x^3-9x$

Ejercicio 79 *(Septiembre 2007. Opción 1)*

a) *Calcula* $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x \operatorname{sen} x - x}{2x^2+x^4}$

b) *Calcula los vértices y el área del rectángulo de área máxima que se puede construir de modo que su base esté sobre le eje OX, y los vértices del lado opuesto están sobre la parábola* $y=-x^2+12$

c) *Enunciado del Teorema Fundamental del Cálculo Integral. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de* $F(x)=\int_0^x 2+\cos(t^2)\,dt$ *en el punto de abscisa* $x=0$.

Ejercicio 80 *(Septiembre 2007. Opción 2)* *a)* *Enunciado del Teorema de Bolzano. ¿Podemos asegurar que la gráfica de* $f(x) = x^5 + 2x^4 - 4$ *corta al eje OX en algún punto del intervalo* $(1, 2)$*?*

b) *Dada la función* $g(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq -\sqrt{2} \\ -x^2 + 2 & si \quad x > -\sqrt{2} \end{cases}$. *¿Es* $g(x)$ *continua en* $x = -\sqrt{2}$*?¿Y derivable en* $x = -\sqrt{2}$*?*

c) *Calcula el área de la región del plano limitada por las gráficas de* $g(x)$ *y* $h(x) = |x|$.

Ejercicio 81 *(Junio 2006. Opción 1)*

a) *Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de* $f(x) = (x+1)e^{-x}$ *en el punto de corte de* $f(x)$ *con el eje OX.*

b) *Calcula, para que* $f(x) = (x+1)e^{-x}$*: intervalos de crecimiento y de decrecimiento, extremos relativos, puntos de inflexión, concavidad y convexidad.*

c) *Enunciado e interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.*

Ejercicio 82 *(Junio 2006. Opción 2)*

a) *Enunciado e interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial.*

b) *De entre todos los triángulos rectángulos con hipotenusa* 10 *cm, calcula las longitudes de los catetos que corresponden al de área máxima.*

c) *Calcula el valor de* m*, para que el área del recinto limitado por la recta* $y = mx$ *y la curva* $y = x^3$ *sea* 2 *unidades cuadradas.*

Ejercicio 83 *(Septiembre 2006. Opción 1)*

a) *Calcula los valores de* a *y* b *para que la gráfica de* $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ *tenga un mínimo relativo en el punto* $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$*. Para esos valores de* a *y* b*, calcula: asíntotas e intervalos de crecimiento y decrecimiento de* $f(x)$.

b) *Calcula* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 e^x}{\cos^2 x - 1}$

c) *Definición de primitiva e integral definida de una función. Enunciado de la Regla de Barrow*

Ejercicio 84 *(Septiembre 2006. Opción 2)*

a) *Definición de función continua en un punto. ¿Qué tipo de discontinuidad tiene en* $x = 0$ *la función en* $f(x) = \frac{x^2}{x}$*?*

b) *Un alambre de* 170 *cm de longitud se divide en dos partes. Con una de las partes se quiere formar un cuadrado, y con la otra un rectángulo de modo que la base mida el doble que la altura. Calcula las longitudes de las partes en que hay que dividir el alambre para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.*

c) *Calcula el área del recinto limitado por la recta $y = 2 - x$, y la curva $y = x^2$.*

Ejercicio 85 *(Junio 2005. Opción 1)*

a) *Enunciado e interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral para funciones continuas.*

b) *Sea $f : [-2, 2] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continua en $[-2, 2]$ tal que $\int_{-2}^{-1} f(t)\,dt = \int_{1}^{2} f(t)\,dt$. ¿Se puede asegurar que existen b y c en $[-2, 2]$ tales que $b < -1$, $c > -1$ y $f(b) = f(c)$? Justifica su respuesta.*

Ejercicio 86 *(Junio 2005. Opción 2)*

a) *Enunciado de la Regla de L'Hôpital.*

b) *Calcula la relación entre a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax}-1}{2x} & si \quad x \neq 0 \\ b & si \quad x = 0 \end{cases}$ sea continua.*

c) *Calcula* $\displaystyle\int \frac{2x - 1}{x(x+1)^2}\,dx$

Ejercicio 87 *(Septiembre 2005. Opción 1)*

a) *Continuidad lateral de una función en un punto.*

b) *Analiza la continuidad en $x = 0$ de la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^x - 1}{x} & si \quad x < 0 \\ \dfrac{\cos x}{x^2 + 1} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

Ejercicio 88 *(Septiembre 2005. Opción 2)*

a) *Enunciado e interpretación geométrica del Teorema Fundamental del Cálculo Integral para funciones continuas.*

b) *Sea $F(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt$. Calcular sin intentar resolver la integral la segunda derivada de la función F*

Ejercicio 89 *(Junio 2004) Un barco B, y dos ciudades A y C de la costa forman un triángulo rectángulo en C. Las distancias del barco a las ciudades A y C son 13 km y 5 km respectivamente. Un hombre situado en A quiere llegar hasta el barco B. Sabiendo que puede nadar a 3 km/h, y nadar a 5 km/h, ¿a qué distancia de A debe abandonar la costa para nadar hasta B si quiere llegar lo antes posible?*

Ejercicio 90 *(Junio 2004) Demostrar que la función dada por $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + x - 2}$ es estrictamente positiva en $(2, +\infty)$, y calcular el área de la región determinada por la gráfica de f, el eje de abscisas, y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.*

Ejercicio 91 *(Septiembre 2004)*

a) *Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.*

b) *Determina las abscisas de los puntos de la curva* $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$ *en los que la recta tangente forma un ángulo de* $135°$ *con el sentido positivo del eje de abscisas.*

c) *Estudiar la continuidad en toda la recta real de la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & si \quad x > 0 \\ x+1 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$

Ejercicio 92 *(Junio 2003)*

a) *Define punto de inflexión de una función.*

b) *Determina la condición que debe cumplir* λ *para que el polinomio* $x^4 + x^3 + \lambda x^2$ *sea cóncavo en algún intervalo. Determinar el intervalo de concavidad en función de* λ

Ejercicio 93 *(Junio 2003)*

1. *Enunciado e interpretación geométrica del Teorema de Bolzano.*

2. *¿Se puede asegurar, empleando el Teorema de Bolzano, que la función* $f(x) = \operatorname{tg} x$ *tiene una raíz en el intervalo* $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$. *Justificar la respuesta, y esbozar la gráfica de* f *en ese intervalo.*

Ejercicio 94 *(Septiembre 2003)*

a) *Dada la parábola* $f(x) = ax^2 + bx + c$, *determine los valores de* a, b, *y* c *sabiendo que* f *tiene un máximo en el punto de abscisa* $x = \frac{1}{2}$, *y la recta tangente a* f *en el punto* $(1, 3)$ *es la recta* $y = -3x + 6$.

b) *Determine el área de la región limitada por la gráfica de la función* $f(x) = x^2 + x + 5$, *el eje OX, y las rectas* $x = -\dfrac{1}{2}$ *e* $y = x + 6$

Ejercicio 95 *(Junio 2002)*

a) *Dibujar la gráfica de* $f(x) = |x^2 - 4|$ *en el intervalo* $[-3, 3]$, *y calcular su integral en ese intervalo.*

b) *Dada* $F(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 4}$, *escriba la ecuación de la secante a* F *que une los puntos* $(-2, F(-2))$ *y* $(2, F(2))$. *¿Existe un punto* c *en el intervalo* $[-2, 2]$ *verificando que la tangente a la gráfica de* F *en* $(c, F(c))$ *es paralela a la secante obtenida?. Justificar la respuesta, y en caso afirmativo, encontrar* c

Ejercicio 96 *(Septiembre 2002)*

a) *Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto* $(3, 1)$, *y tal que el área del triángulo formado por esta recta y los semiejes positivos coordenados sea mínima.*

b) *Calcular el número positivo* α *tal que el valor del área de la región limitada por la recta* $y = \alpha$, *y la parábola* $y = (x - 2)^2$ *sea 36.*

Ejercicio 97 *(Junio 2001)*

a) *Sabiendo que $P(x)$ es un polinomio de tercer grado, con punto de inflexión en $(1,0)$, y con $P'''(1)=24$, donde además, la tangente al polinomio en ese punto es horizontal, calcular* $\displaystyle\int_{-1}^{0} P(x)\,dx$

b) *Dadas* $f(x)=\dfrac{x-|x|}{2}$, *y* $g(x)=\begin{cases} 3x & si \quad x\le 0 \\ x^2 & si \quad x>0 \end{cases}$, *calcular* $\displaystyle\int_{-1}^{0} x^2\cdot(g\circ f)(x)\,dx$

Ejercicio 98 *(Septiembre 2001)*

a) *¿Puede haber dos funciones distintas que tengan igual función derivada?. Si la respuesta es afirmativa, pon un ejemplo. Si por el contrario, la respuesta es negativa, justifícalo.*

b) *Calcula la derivada de la función $f(x)=|x-2|$ en $x=2$, si fuese posible. Representa la función gráficamente, y sobre la gráfica, razónese la respuesta.*

c) *Sean f y g dos funciones continuas, definidas en el intervalo $[a,b]$, que verifican que* $\displaystyle\int_a^b f=\int_a^b g$. *Demostrar que existen α, $\beta\in[a,\,b]$ tales que $f(\alpha)=g(\beta)$*