**IES O COUTO. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**
**Matemáticas II**
**07-02-2020. Tiempo estimado: 90 minutos**

---

**RESOLUCIÓN DEL EXAMEN**

## Solución del ejercicio 1

*a)* $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1-x} & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{2x^2}{1+x} & si \quad 0<x\le 1 \\ 1+\dfrac{1}{2}e^{-x^2+5x-4} & si \quad x>1 \end{cases}$$

- *Estudio en $x=0$:*

$$\left.\begin{array}{l} \exists f(0)=0 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^2}{1-x}=0\in\mathbb{R} \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{2x^2}{1+x}=0\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow f(0)=\lim_{x\to 0}f(x) \Longrightarrow f \text{ continua en } x=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{2x^2}{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{x(1-x)}=0\in\mathbb{R} \\ f'(0^+)=\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2x^2}{1+x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{x(1+x)}=0\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f'(0^-)=f'(0^+) \Longrightarrow f \text{ derivable en } x=0$$

- *Estudio en $x=1$:*

$$\left.\begin{array}{l} \exists f(1)=1 \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2}{1+x}=1\in\mathbb{R} \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^-}\left(1+\frac{1}{2}e^{-x^2+5x-4}\right)=\frac{3}{2}\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 1^-}f(x)\neq\lim_{x\to 1^+}f(x) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f \text{ no es continua en } x=1 \Longrightarrow f \text{ no derivable en } x=1$$

*b)* *Asíntotas verticales: No hay*

*Asíntotas horizontales:*

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}e^{-x^2+5x-4}\right)=1\in\mathbb{R}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{1-x}=-\infty\end{array}\right\}\Longrightarrow y=1 \text{ es asíntota horizontal}$$

*Asíntotas oblícuas: Solo se buscan cuando* $x\to-\infty$

$$\left.\begin{array}{l}m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x(1-x)}=-2\in\mathbb{R}\\ \\ n=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(-2x))=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2}{1-x}+2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{1-x}=-2\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y=-2x-2 \text{ es asíntota oblícua}$$

**Solución del ejercicio 2**

*La función* $f(x)=\cos x-x$ *es continua en* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, *con* $f(0)=1>0$, *y* $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}<0$. *Por tanto, por el Teorema de Bolzano, existe* $c\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ *tal que* $f(c)=0$.

*Supongamos que existiese un* $d\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $c<d$, *en el que* $f(c)=f(d)$. *Tendríamos entonces que* $f$ *es continua en* $[c,d]$, *derivable en* $(c,d)$, *con* $f(c)=f(d)$, *y por el Teorema de Rolle, existiría un* $\alpha\in(c,d)\subset\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ *tal que* $f'(\alpha)=0$.

*Pero* $f'(x)=-\operatorname{sen}x-1<0\quad\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. *Por tanto,* $d$ *no puede existir.*

*Es decir, la solución es única.*

**Solución del ejercicio 3**

*a)* *Como la función es continua en* $[1,4]$, *y derivable en* $(1,4)$, *por el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial (o de Lagrange) existe* $c\in(1,4)$ *tal que*

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(c)$$

*Es decir, existe* $c\in(1,4)$ *cumpliendo que* $f'(c)=\dfrac{0-3}{4-1}=-1$.

*Demostrada su existencia, resolvemos la ecuación* $f'(c)=-1$*:*

$$2c-6=-1\implies c=\frac{5}{2}$$

*Por tanto, la ecuación de la recta tangente buscada es:*

$$y-f\left(\frac{5}{2}\right)=-1\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)\implies y+\frac{3}{4}=-\left(x-\frac{5}{2}\right)\implies y=-x+\frac{7}{4}$$

*b)* *En* $x=4$, $f'(4)=2\cdot4-6=2$, *por tanto, la pendiente de la recta normal a la parábola es* $m=-\frac{1}{2}$, *y la ecuación de dicha recta es* $y-0=-\frac{1}{2}(x-4)$. *O equivalentemente* $2y+x=4$.

*Los límites de integración vendrán determinados por los puntos de corte entre la recta y la parábola:*

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 6x + 8 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow x^2 - 6x + 8 = -\frac{1}{2}x + 2 \Longrightarrow 2x^2 - 11x + 12 = 0$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{4} = \frac{11 \pm 5}{4} = \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ x = \frac{3}{2} \end{array}\right.$$

*Dado que la parábola es convexa, la recta queda por encima de $y = f(x)$ en el intervalo $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$, por tanto, el área pedida es:*

$$\int_{\frac{3}{2}}^{4} -\frac{1}{2}x + 2 - (x^2 - 6x + 8)\, dx = \int_{\frac{3}{2}}^{4} -x^2 + \frac{11}{2}x - 6\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{11}{4}x^2 - 6x\right]_{\frac{3}{2}}^{4} =$$

$$= -\frac{64}{3} + \frac{11}{4}4^2 - 24 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \frac{11}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6 \cdot \frac{3}{2} = \frac{125}{48}$$

**Solución del ejercicio 4**

$$\frac{x^4}{x^2 - 1} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 - 1} \Longrightarrow \int \frac{x^4}{x^2 - 1}\, dx = \int x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 - 1}\, dx = \frac{x^3}{3} + x + \int \frac{dx}{x^2 - 1}$$

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} \Longrightarrow 1 = A(x + 1) + B(x - 1) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \Longrightarrow 1 = 2A \Longrightarrow A = \frac{1}{2} \\ x = -1 \Longrightarrow 1 = -2B \Longrightarrow B = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x + 1} = \frac{1}{2}\ln|x - 1| - \frac{1}{2}\ln|x + 1| + C$$

*Por tanto:*

$$\int \frac{x^4}{x^2 - 1}\, dx = \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2}\ln|x - 1| - \frac{1}{2}\ln|x + 1| + C$$

**Solución del ejercicio 5**

*a) Hay que analizar los cambios de signo de $f''$:*

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow (x^2 - 2x)e^x = 0 \Longleftrightarrow x(x - 2) = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

*Por tanto:*

| **Signo de $(x^2 - 2x)e^x$** | $+$ | $\boldsymbol{x = 0}$ | $-$ | $\boldsymbol{x = 2}$ | $+$ |
|---|---|---|---|---|---|

- $f'' > 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \Longrightarrow f$ *convexa en* $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.
- $f'' < 0 \quad \forall x \in (0, 2) \Longrightarrow f$ *cóncava en* $(0, 2)$.
- *Hay dos puntos de inflexión: en $x = 0$ y en $x = 2$.*

*b)* *La función $f'$ es la primitiva de $f''$ que satisface $f'(0)=4$, por tanto, hay que resolver la integral indefinida* $\displaystyle\int (x^2-2x)e^x\,dx$.

*Integrando por partes:*

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2-2x \implies du = (2x-2)\,dx \\ dv = e^x\,dx \implies v = e^x \end{array}\right\} \implies \int (x^2-2x)e^x\,dx =$$

$$= (x^2-2x)e^x - \int (2x-2)e^x\,dx = (x^2-2x)e^x - 2\int xe^x\,dx + 2\int e^x\,dx =$$

$$= (x^2-2x)e^x - 2\int xe^x\,dx + 2e^x = (x^2-2x+2)e^x - 2\int xe^x\,dx$$

*Integrando* $\displaystyle\int xe^x\,dx$, *nuevamente por partes:*

$$\left.\begin{array}{l} u = x \implies du = dx \\ dv = e^x\,dx \implies v = e^x \end{array}\right\} \implies \int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

*Por tanto:*

$$f'(x) = (x^2-2x+2)e^x - 2(xe^x - e^x + C) = (x^2-4x+4)e^x + C$$

*Para determinar el valor de $C$, utilizamos que $f'(0)=4$. Por tanto:*

$$(0^2 - 4\cdot 0 + 4)e^0 + C = 4 \implies 4 + C = 4 \implies C = 0$$

*Es decir,* $f'(x) = (x^2-4x+4)e^x$

*Para estudiar la monotonía y la existencia de puntos extremos, hay que analizar el signo de $f'$:*

$$f'(x) = 0 \iff (x^2-4x+4)e^x = 0 \iff x^2-4x+4 = 0 \iff (x-2)^2 = 0 \iff x = 2$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Signo de $(x^2-4x+4)e^x$** | $+$ | $\times$ | $+$ |
| | | $x = 2$ | |

- *Como la función $f$ es derivable en todo número real, si existen extremos relativos necesariamente la función $f'$ se anulará en dichos puntos.*
  *El único valor para el cual se anula $f'$ es $x=2$, pero en $x=2$ la función $f'$ no cambia de signo. Por tanto, se concluye que no existen extremos relativos.*
- *Como* $f' \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, *entonces $f$ es creciente en* $\mathbb{R}$

**Solución del ejercicio 6**

*a)* *Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (con $a,b \in \mathbb{R}$) una función continua. Entonces, la función* $x \in [a,b] \longrightarrow F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ *es derivable $\forall x \in (a,b)$, verificándose además que* $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$.

*b)* *Como la función* $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x+2}$ *es continua en* $[0,1]$*, por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral (TFCI), la función* $x \in [0,1] \longrightarrow F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ *es derivable en* $(0,1)$*. Además,* $F(0) = \displaystyle\int_0^0 f(t)\,dt = 0$*, por tanto:*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x^3} = \frac{0}{0} = IND \overset{L'H\hat{o}p.}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0^+} \frac{F'(x)}{3x^2} \overset{TFCI}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\ln(x^2+1)}{x+2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^2+1)}{3x^2(x+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^2+1)}{3x^3+6x^2} = \frac{0}{0} = IND \overset{L'H\hat{o}p.}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{9x^2+12x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{3x(3x+4)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3(3x+4)(x^2+1)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$