



RESOLUCIÓN DEL EXAMEN

Solución del ejercicio 1

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2}{1-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2x^2}{1+x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 + \frac{1}{2}e^{-x^2+5x-4} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

■ Estudio en $x = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \exists f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2}{1-x} = 0 \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2}{1+x} = 0 \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Rightarrow f \text{ continua en } x = 0$$

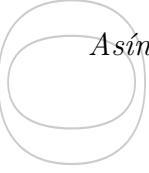
$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{2x^2}{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{x(1-x)} = 0 \in \mathbb{R} \\ f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2x^2}{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x(1+x)} = 0 \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow f \text{ derivable en } x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

■ Estudio en $x = 1$:

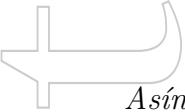
$$\left. \begin{array}{l} \exists f(1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2}{1+x} = 1 \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(1 + \frac{1}{2}e^{-x^2+5x-4} \right) = \frac{3}{2} \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \text{ no es continua en } x = 1 \Rightarrow f \text{ no derivable en } x = 1$$

b) Asíntotas verticales: No hay

 Asíntotas horizontales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} e^{-x^2+5x-4} \right) = 1 \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{1-x} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow y = 1 \text{ es asíntota horizontal}$$

 Asíntotas oblícuas: Solo se buscan cuando $x \rightarrow -\infty$

$$\left. \begin{array}{l} m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x(1-x)} = -2 \in \mathbb{R} \\ n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-2x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2}{1-x} + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{1-x} = -2 \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = -2x - 2 \text{ es asíntota oblícua}$

Solución del ejercicio 2

 La función $f(x) = \cos x - x$ es continua en $[0, \frac{\pi}{2}]$, con $f(0) = 1 > 0$, y $f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0$.

Por tanto, por el Teorema de Bolzano, existe $c \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $f(c) = 0$.

Supongamos que existiese un $d \in (0, \frac{\pi}{2})$, $c < d$, en el que $f(c) = f(d)$. Tendríamos entonces que f es continua en $[c, d]$, derivable en (c, d) , con $f(c) = f(d)$, y por el Teorema de Rolle, existiría un $\alpha \in (c, d) \subset (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

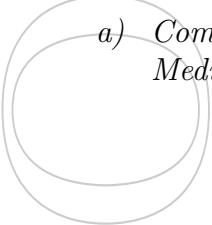
Pero $f'(x) = -\sin x - 1 < 0 \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Por tanto, d no puede existir.

Es decir, la solución es única.

Solución del ejercicio 3

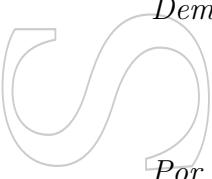
- a) Como la función es continua en $[1, 4]$, y derivable en $(1, 4)$, por el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial (o de Lagrange) existe $c \in (1, 4)$ tal que

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = f'(c)$$

 Es decir, existe $c \in (1, 4)$ cumpliendo que $f'(c) = \frac{0 - 3}{4 - 1} = -1$.

Demostrada su existencia, resolvemos la ecuación $f'(c) = -1$:

$$2c - 6 = -1 \Rightarrow c = \frac{5}{2}$$

 Por tanto, la ecuación de la recta tangente buscada es:

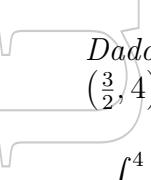
$$y - f\left(\frac{5}{2}\right) = -1 \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right) \Rightarrow y + \frac{3}{4} = -\left(x - \frac{5}{2}\right) \Rightarrow y = -x + \frac{7}{4}$$

- b) En $x = 4$, $f'(4) = 2 \cdot 4 - 6 = 2$, por tanto, la pendiente de la recta normal a la parábola es $m = -\frac{1}{2}$, y la ecuación de dicha recta es $y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 4)$. O equivalentemente $2y + x = 4$.

 Los límites de integración vendrán determinados por los puntos de corte entre la recta y la parábola:

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 - 6x + 8 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = -\frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow 2x^2 - 11x + 12 = 0$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{4} = \frac{11 \pm 5}{4} = \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

 Dado que la parábola es convexa, la recta queda por encima de $y = f(x)$ en el intervalo $(\frac{3}{2}, 4)$, por tanto, el área pedida es:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{3}{2}}^4 -\frac{1}{2}x + 2 - (x^2 - 6x + 8) dx &= \int_{\frac{3}{2}}^4 -x^2 + \frac{11}{2}x - 6 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{11}{4}x^2 - 6x \right]_{\frac{3}{2}}^4 = \\ &= -\frac{64}{3} + \frac{11}{4}4^2 - 24 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \frac{11}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6 \cdot \frac{3}{2} = \frac{125}{48} \end{aligned}$$

Solución del ejercicio 4

$$\frac{x^4}{x^2 - 1} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 - 1} \Rightarrow \int \frac{x^4}{x^2 - 1} dx = \int x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{x^3}{3} + x + \int \frac{dx}{x^2 - 1}$$

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} \Rightarrow 1 = A(x + 1) + B(x - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2} \\ x = -1 \Rightarrow 1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x + 1} = \frac{1}{2} \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \ln|x + 1| + C$$

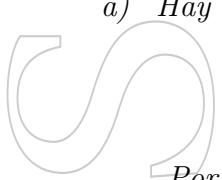
 Por tanto:

$$\int \frac{x^4}{x^2 - 1} dx = \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2} \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \ln|x + 1| + C$$

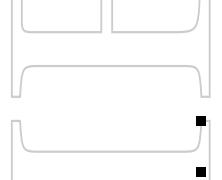
Solución del ejercicio 5

a) Hay que analizar los cambios de signo de f'' :

$$f''(x) = 0 \iff (x^2 - 2x)e^x = 0 \iff x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

 Por tanto:

Signo de	+	-	+
$\cdot (x^2 - 2x)e^x$	$x = 0$	$x = 2$	

 ■ $f'' > 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \Rightarrow f$ convexa en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

■ $f'' < 0 \quad \forall x \in (0, 2) \Rightarrow f$ cóncava en $(0, 2)$.

■ Hay dos puntos de inflexión: en $x = 0$ y en $x = 2$.

b) La función f' es la primitiva de f'' que satisface $f'(0) = 4$, por tanto, hay que resolver la integral indefinida $\int(x^2 - 2x)e^x dx$.

Integrando por partes:

$$\left. \begin{array}{l} u = x^2 - 2x \implies du = (2x - 2)dx \\ dv = e^x dx \implies v = e^x \end{array} \right\} \implies \int(x^2 - 2x)e^x dx =$$

$$\begin{aligned} &= (x^2 - 2x)e^x - \int(2x - 2)e^x dx = (x^2 - 2x)e^x - 2 \int xe^x dx + 2 \int e^x dx = \\ &= (x^2 - 2x)e^x - 2 \int xe^x dx + 2e^x = (x^2 - 2x + 2)e^x - 2 \int xe^x dx \end{aligned}$$

Integrando $\int xe^x dx$, nuevamente por partes:

$$\left. \begin{array}{l} u = x \implies du = dx \\ dv = e^x dx \implies v = e^x \end{array} \right\} \implies \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

Por tanto:

$$f'(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x - 2(xe^x - e^x + C) = (x^2 - 4x + 4)e^x + C$$

Para determinar el valor de C , utilizamos que $f'(0) = 4$. Por tanto:

$$(0^2 - 4 \cdot 0 + 4)e^0 + C = 4 \implies 4 + C = 4 \implies C = 0$$

Es decir, $f'(x) = (x^2 - 4x + 4)e^x$

Para estudiar la monotonía y la existencia de puntos extremos, hay que analizar el signo de f' :

$$f'(x) = 0 \iff (x^2 - 4x + 4)e^x = 0 \iff x^2 - 4x + 4 = 0 \iff (x - 2)^2 = 0 \iff x = 2$$

Signo de
 $\cdot (x^2 - 4x + 4)e^x$ $\frac{+}{x=2} +$

- Como la función f es derivable en todo número real, si existen extremos relativos necesariamente la función f' se anulará en dichos puntos.

El único valor para el cual se anula f' es $x = 2$, pero en $x = 2$ la función f' no cambia de signo. Por tanto, se concluye que no existen extremos relativos.

- Como $f' \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, entonces f es creciente en \mathbb{R}

Solución del ejercicio 6

a) Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (con $a, b \in \mathbb{R}$) una función continua. Entonces, la función $x \in [a, b] \rightarrow F(x) = \int_a^x f(t) dt$ es derivable $\forall x \in (a, b)$, verificándose además que $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$.

b) Como la función $f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x + 2}$ es continua en $[0, 1]$, por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral (TFCI), la función $x \in [0, 1] \rightarrow F(x) = \int_0^x f(t) dt$ es derivable en $(0, 1)$. Además, $F(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0$, por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{x^3} = \frac{0}{0} = IND \xrightarrow{L'Hôp.} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F'(x)}{3x^2} \stackrel{TFCI}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\ln(x^2 + 1)}{x + 2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x^2 + 1)}{3x^2(x + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x^2 + 1)}{3x^3 + 6x^2} = \frac{0}{0} = IND \xrightarrow{L'Hôp.} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2x}{x^2 + 1}}{9x^2 + 12x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{3x(3x + 4)(x^2 + 1)} = \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{3(3x + 4)(x^2 + 1)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$