IES O COUTO. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Matemáticas II
Fecha: 25-10-2019. Tiempo estimado: 90 minutos

RESOLUCIÓN DEL EXAMEN

Solución del ejercicio 1

a) $\exists A \cdot B \cdot C \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \implies A \in \mathcal{M}_{2\times p}(\mathbb{R}),\ B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R}),\ C \in \mathcal{M}_{q\times 3}(\mathbb{R})$

$A \in \mathcal{M}_{2\times p}(\mathbb{R}),\ C^t \in \mathcal{M}_{3\times q}(\mathbb{R}) \overset{\exists A\cdot C^t \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})}{\Longrightarrow} p = 3,\ q = 4$

Por tanto:

$$A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}),\ B \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}),\ C \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

b) *Por las propiedades de los determinantes:*

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \implies |2A| = 2^n|A| \implies 48 = 2^n \cdot 3 \implies 2^n = 16 \implies n = 4$$

c) *Por las propiedades de los determinantes:*

$det(F_2 + 3F_3, F_1 + 2F_2, 5F_1) = det(F_2, F_1 + 2F_2, 5F_1) + det(3F_3, F_1 + 2F_2, 5F_1) \overset{(*)}{=}$
$det(3F_3, F_1+2F_2, 5F_1) = det(3F_3, F_1, 5F_1)+det(3F_3, 2F_2, 5F_1) \overset{(*)}{=} det(3F_3, 2F_2, 5F_1) =$
$3 \cdot 2 \cdot 5det(F_3, F_2, F_1) = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot (-1)det(F_1, F_2, F_3) = -30|A| = 60$

(*) Si una fila es combinación lineal de otras, el determinante es nulo.

d) *Por las propiedades de los determinantes* $|AB| = |A||B|$, *por tanto:*

$$|AB| = 3 \cdot 0 = 0 \implies AB \text{ singular}$$

e) A *simétrica* $\implies A = A^t \implies A + A^t = 2A.$

Es decir:

$$|A + A^t| = |2A| \overset{A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}{\Longrightarrow} |2A| = 2^3|A| = 8 \cdot (-1) = -8$$

f)
- $|A| \neq 0 \implies \exists\, A^{-1},\ \ con\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t \implies (Adj(A))^t = |A| \cdot A^{-1}$
  Por tanto:
  $$|Adj(A)| = |(Adj(A))^t| \overset{A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}{=} |A|^3 \cdot |A^{-1}| \overset{|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}}{\Longrightarrow} |Adj(A)| = |A|^2 = 2^2 = 4$$
- $A + I = (-1) \cdot A^3 \implies |A + I| = (-1)^3|A|^3 = -8$
  Por las propiedades de los determinantes:
  $|2(A^{-1}A^t)^{10}(A + I)| = 2^3 \cdot |A^{-1}|^{10} \cdot |A^t|^{10} \cdot |A + I| = 2^3 \cdot \frac{1}{|A|^{10}} \cdot |A|^{10} \cdot (-8) = -64$

g) *Teorema de Rouché-Fröbenius:*

Sea el sistema de m *ecuaciones y* n *incógnitas*

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

que en forma matricial se expresa

$$AX = B$$

con $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *matriz del sistema,* $X = (x_j)_{1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ *matriz columna de incógnitas, y* $B = (b_i)_{1\leq i\leq m} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$ *matriz columna de términos independientes.*

Si $A^* = (A|B) \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}(\mathbb{R})$ *es la matriz ampliada del sistema (formada al añadir a la matriz* A *la columna dada por la matriz* B*), entonces:*

- *El sistema es compatible determinado si y solo si* $rango(A) = rango(A^*) = n$.
- *El sistema es compatible indeterminado si y solo si* $rango(A) = rango(A^*) < n$.
- *El sistema es incompatible si y solo si* $rango(A) < rango(A^*)$.

Si tenemos un sistema homogéneo con dos ecuaciones y tres incógnitas su expresión matricial es $AX = 0$*, con* $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ *y matriz ampliada* $A^* = (A|0) \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$

Como obviamente $rango(A) = rango(A^*)$*, el sistema es compatible, pero como el rango máximo de este sistema es* $2 < 3$*, por el Teorema de Rouché-Fröbenius podemos asegurar que es un sistema compatible indeterminado. Es decir, que tiene infinitas soluciones.*

Solución del ejercicio 2

Sea $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *una matriz tal que* $AB = BA$*:*

$$\left.\begin{array}{l} AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \\ \\ BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 2a+b \\ c+d & 2c+d \end{pmatrix} \end{array}\right\} \overset{AB=BA}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 2a+b \\ c+d & 2c+d \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} a+2c = a+b \\ b+2d = 2a+b \\ a+c = c+d \\ b+d = 2c+d \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} 2c = b \\ d = a \end{array}\right\} \Longrightarrow B = \begin{pmatrix} a & 2c \\ c & a \end{pmatrix},\ \forall\, a,\, c \in \mathbb{R}$$

Solución del ejercicio 3

a) $|A| = 0 \implies$ *A no es regular* ($\nexists A^{-1}$)

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies |B| = 1 \implies$ *B es regular* ($\exists B^{-1}$).

b) $XA = 3BA^t - X \implies XA + X = 3BA^t \implies X(A+I) = 3BA^t \overset{A+I=B}{\implies} XB = 3BA^t$

Como B *es regular:*

$$XB = 3BA^t \implies XB \cdot B^{-1} = 3BA^tB^{-1} \implies X = 3BA^tB^{-1}$$

Necesitamos calcular $B^{-1} = \frac{1}{|B|}(Adj(B))^t \overset{|B|=1}{=} (Adj(B))^t$*:*

$B_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ B_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ B_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$B_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ B_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ B_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$B_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ B_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ B_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$Adj(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \implies B^{-1} = \frac{1}{|B|}(Adj(B))^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto:

$$X = 3BA^tB^{-1} = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -9 & -21 \\ 9 & -6 & -12 \\ 6 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

Solución del ejercicio 4

Desarrollando el determinante por los elementos de la segunda fila:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & x & -1 \\ 0 & x & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}(x-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = -1(x-1)(-3+2x) = (2x-3)(1-x)$$

Por tanto:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & x & -1 \\ 0 & x & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \iff (2x-3)(1-x) = -1 \iff 2x^2-5x+2 = 0 \iff \begin{cases} x = 2 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Solución del ejercicio 5

a) *Las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 \\ m & -1 & 1 \\ m+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $A^* = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 & m \\ m & -1 & 1 & m \\ m+1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *son, respectivamente, la matriz y la matriz ampliada del sistema.*

Para determinar la compatibilidad del sistema necesitamos comparar los rangos de las matrices A *y* A^**.*

Como $rango(A) = 3 \iff |A| \neq 0$*, comenzamos estudiando el determinante de* A*:*

$$|A| = 0 - m + m(m+1) - (m+1) - 1 = m^2 - m - 2 = 0 \iff m = -1,\ m = 2$$

Por tanto

- *Si* $m \neq -1$ *y* $m \neq 2$, $rango(A) = rango(A^*) = 3$, *y por el Teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible determinado (tiene solución única).*
- *Si* $m = -1$:
  $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad con \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies rango(A) = 2$$
  $$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad con\ C_4 = C_2 \implies rango(A^*) = rango(A) = 2$$
  Por el Teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).
- *Si* $m = 2$:
  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad con \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies rango(A) = 2$$
  $$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad con \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies rango(A^*) = 3$$
  Por el Teorema de Rouché-Fröbenius, cuando $rango(A^*) > rango(A)$ *sabemos que el sistema es incompatible (no tiene solución).*

b) *En ambos casos puede resolverse. Como vimos en el apartado a), para* $m = -1$ *hay infinitas soluciones, y para* $m = 3$ *existe solución única.*

- *Si* $m = -1$, *por ser las dos primeras ecuaciones proporcionales, podemos prescindir de una de ellas, y reescribir el sistema como* $\begin{cases} x - y = -1 + z \\ \quad\ \ y = 1 \end{cases}$
  Por tanto, las soluciones del sistema son los puntos $(t, 1, t)$, *con* $t \in \mathbb{R}$
- *Si* $m = 3$, *el sistema resulta* $\begin{cases} x + 3y - z = 3 \\ 3x - y + z = 3 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$
  Resolviendo por la Regla de Cramer, como $|A| = 4$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{20}{4} = 5$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{44}{4} = 11$$

Por tanto, la solución única del sistema es $(-1, 5, 11)$