Matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}).$$ Abreviadamente $A = (a_{ij})_{m\times n}$

Matriz o vector fila: $A \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$; **Matriz o vector columna:** $A \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$
Matriz cuadrada: $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Matriz triangular superior: Todos los elementos bajo la diagonal principal son nulos.
- Matriz triangular inferior: Todos los elementos sobre la diagonal principal son nulos.
- Matriz diagonal: Todos los elementos fuera de la diagonal principal son nulos.
  - Matriz escalar: Todos los elementos de la diagonal principal son iguales.
  - Matriz identidad, o unitaria, I: Todos los elementos de la diagonal principal son 1.

Operaciones con matrices

Suma: $A,\, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \quad A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$
Resta: $A,\, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \quad A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}$
Producto por un escalar: $k \in \mathbb{R},\, A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \quad k \cdot A = (ka_{ij})_{m\times n}$
Producto de matrices: $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$

$$A \cdot B = (c_{ij})_{m\times n}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Propiedades de las operaciones con matrices

Siempre que las operaciones indicadas sean posibles:

$A + B = B + A$ $\qquad k(A + B) = kA + kB$
$A + (B + C) = (A + B) + C$ $\qquad k(\lambda)A = (k\lambda)A$
$A(BC) = (AB)C$ $\qquad (k + \lambda)A = kA + \lambda A$
$A(B + C) = AB + AC$ $\qquad AB \neq BA$

Matriz Nula $\mathcal{O} = (0)_{m\times n}$: $A + \mathcal{O} = \mathcal{O} + A = A,\ \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
Matriz opuesta de A, $-A = (-a_{ij})_{m\times n}$: $A + (-A) = -A + A = \mathcal{O}$
Matriz identidad o unitaria I: $AI = IA = A$
Matriz inversa de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: Si existe, es una matriz A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$
Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\begin{cases} \exists A^{-1} \implies A \text{ se dice } \textbf{regular o inversible} \\ \nexists A^{-1} \implies A \text{ se dice } \textbf{singular} \end{cases}$
Propiedades de las matrices inversibles
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $(A^{-1})^{-1} = A$
$A,\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Potencias de expresiones con matrices

Como consecuencia de la no conmutatividad del producto:
$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$
$(A - B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$
$(A - B)(A + B) = A^2 + AB - BA - B^2$

Como la matriz I conmuta con cualquier otra para el producto: $(A + I)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k$

Matriz idempotente: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ idempotente $\iff A^2 = A$

Matriz Traspuesta

Dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, su **matriz traspuesta** A^t es la matriz $A^t = (a_{ji})_{n\times m} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ que se obtiene al intercambiar las filas de A por sus columnas.
Matriz simétrica: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica $\iff A^t = A$
Matriz antisimétrica: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisimétrica $\iff A^t = -A$
Matriz ortogonal: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal $\iff \exists A^{-1}$, y $A^{-1} = A^t$

Propiedades de la trasposición de matrices

$(A^t)^t = A \qquad (A + B)^t = A^t + B^t \qquad (AB)^t = B^tA^t \qquad (kA)^t = kA^t$

Determinantes

Determinantes de orden 2

$$A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinantes de orden 3 (Regla de Sarrus)

$$A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Determinantes de orden n (desarrollo por una fila, o columna)

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $det(A) = |A| = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$ (desarrollo por la fila k)

Análogamente $det(A) = |A| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$ (desarrollo por la columna k)

Donde A_{ij} es el **Adjunto de** a_{ij}, con $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$

(M_{ij} es el **Menor complementario de** a_{ij}, es decir, el determinante de la submatriz de A obtenida al eliminar la fila i y la columna j)

Propiedades de los determinantes

1) $|A| = |A^t|, \quad |AB| = |A| \cdot |B|, \quad |A+B| \neq |A| + |B|$
2) Si una fila (o columna) puede descomponerse en sumandos, se cumple:
$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a & b+b' \\ c & d+d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix}$$
3) Si una fila (o columna) es múltiplo de un escalar, se cumple:
$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$
Por tanto: $|kA| = k^n |A|$
4) El determinante cambia de signo cuando se intercambian entre sí dos filas (o dos columnas)
5) Si dos filas (o dos columnas) son iguales, el determinante vale 0
6) Si alguna fila (o columna) tiene nulos todos sus elementos, el determinante vale 0
7) Si una fila (o columna) es combinación lineal de otras, el determinante vale 0
8) Si a una fila (o columna) le sumamos una combinación lineal de otras filas (o columnas), el determinante no varía
9) El determinante de una matriz diagonal coincide con el producto de los elementos de la diagonal principal (En particular, el determinante de la matriz identidad es 1)
10) El determinante de una matriz triangular (superior o inferior) coincide con el producto de los elementos de la diagonal principal

Cálculo de la matriz inversa

Matriz Adjunta de A, $Adj(A)$: $Adj(A) = (A_{ij})_n$

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ regular $\iff |A| \neq 0$ (y por tanto, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ singular $\iff |A| = 0$)
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ regular $\implies A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(Adj(A))^t$
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ regular $\implies |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$, y $|Adj(A)| = |A|^{n-1}$

Rango de una matriz

Definición Dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, el rango es el número máximo de filas o columnas linealmente independientes. (En cualquier matriz el número máximo de columnas linealmente independientes coincide con el máximo número de filas linealmente independientes)

Teorema El rango de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ coincide con el orden del mayor menor no nulo (un menor es el determinante de una submatriz cuadrada de A)

Teorema Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: A es regular $\iff rango(A) = n$.

Teorema: El rango de una matriz no cambia si se efectúan transformaciones elementales entre sus filas y/o columnas

Transformaciones elementales en filas y/o columnas

- Intercambiar filas o columnas.
- Multiplicar filas o columnas por un escalar no nulo.
- Sumar a una fila (o columna) una combinación lineal de otras filas (o columnas).

Sistemas

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ o equivalentemente } AX = B$$

Con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ **matriz de coeficientes del sistema**, y $A^* = (A|B) \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}(\mathbb{R})$ **matriz ampliada**

Si $B = \mathcal{O}$, el sistema se dice **homogéneo**

Teorema de Rouché-Fröbenius

Dado el sistema expresado en forma matricial $AX = B$, con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

- $rango(A) = rango(A^*) = n \iff$ Sistema Compatible Determinado (única solución)
- $rango(A) = rango(A^*) = r < n \iff$ Sistema Compatible Ineterminado (infinitas soluciones)
- $rango(A) < rango(A^*) \iff$ Sistema Incompatible (sin solución)

Regla de Cramer

Si un sistema es compatible determinado, de $X = A^{-1}B$ se deduce que

$$x_k = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,k-1} & b_1 & a_{1\,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,k-1} & b_n & a_{n\,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \forall k = 1, \dots n$$

Métodos de Gauss, y de Gauss-Jordan

Los sistemas pueden resolverse efectuando transformaciones elementales en las filas de A^* para reducirla a una matriz triangular (método de Gauss).

El método de Gauss-Jordan se utiliza para calcular A^{-1} efectuando transformaciones elementales en las filas de $(A|I)$, para obtener la matriz $(I|A^{-1})$