

Operaciones con matrices

Ejercicio 1 Halla el valor del coeficiente a para que la matriz A sea simétrica.

$$A = \begin{pmatrix} a & a+1 & -3 \\ a^2-1 & 2 & 4a \\ -3 & a^2+4 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Comprueba que $A + A^t$ es una matriz simétrica.
- Comprueba que $A - A^t$ es una matriz antisimétrica.
- Comprueba que $A \cdot A^t$ es una matriz simétrica.

Ejercicio 3 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

- Comprueba que $(A^t)^t = A$
- Comprueba que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
- Construye una matriz C que pueda sumarse con la matriz A , y comprueba que

$$(A + C)^t = A^t + C^t$$

Ejercicio 4 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula $A \cdot B$, $A \cdot C$, $A \cdot (3B - 2C)$, A^2 , $A \cdot B^t$, $B \cdot A^t$

Ejercicio 5 Halla las matrices que conmutan con

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6 Sea A una matriz de dimensión 3×4 , y C una matriz de dimensión 2×3

- ¿Cuál es la dimensión de B sabiendo que existe la matriz $A \cdot B \cdot C$?
- ¿En qué caso se cumple para dos matrices A y B que $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$?

Ejercicio 7 Sea A una matriz para la cual $A \cdot A^t \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, y $A^t \cdot A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Determina la dimensión de A .

Ejercicio 8 Resuelve el sistema matricial

$$A + 2B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 6 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A - 3B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ -9 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

Resuelve el sistema matricial

$$\begin{cases} 5X + 3Y = A \\ 3X + 2Y = B \end{cases}$$

Ejercicio 10 Hallar la matriz M que satisface la igualdad

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} + M$$

Ejercicio 11 Determina el valor del coeficiente a para que $A^2 + 2A + I = O$, siendo I la matriz identidad de orden 3, O la matriz nula de orden 3, y A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 12 Sea A una matriz cuadrada idempotente ($A^2 = A$). Demuestra que si $B = 2A - I$, entonces $B^2 = I$

Ejercicio 13 Siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Demostrar que $A^3 + I = O$

b) Calcular A^{10} y A^{100}

Ejercicio 14 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $A^3 - I = O$

b) Calcula A^{13}

Ejercicio 15 Calcular las potencias sucesivas de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices: Operaciones, determinantes, y rango

Ejercicio 16 Dada $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

a) Demuestra que $A + A^t$ es simétrica, y que $A - A^t$ es antisimétrica.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, exprésala como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

Ejercicio 17 Demuestra que la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$ es ortogonal.

Ejercicio 18 Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 0$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 0$

a) Determina los valores m para que AB tenga inversa.

b) Determina los valores m para que BA tenga inversa.

Ejercicio 19 Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de m tiene solución la ecuación matricial $AX + 2B = 3C$?

b) Resuelve dicha ecuación para $m = 1$

Ejercicio 20 Estudia el rango de $A = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$ en función de t , y di para qué valores A tiene inversa.

Ejercicio 21 Sea $ABCD$ una matriz de dimensión 5×4 . Se sabe que la matriz CB^t es una matriz 3×2 . Halla las dimensiones de A , B , C , y D .

Ejercicio 22 De una matriz cuadrada A se sabe que $|A| = -1$, y que $|2A| = -8$. Determinar el orden de la matriz A .

Ejercicio 23 Dada una matriz cuadrada A :

a) Si $A^3 + I = 0$, calcula el determinante de A^{30} y de A^{31} .

b) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^{22} y A^{17}

Ejercicio 24 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Demuestra que $A + I$ es regular, y calcula $(A + I)^n$.

Ejercicio 25 Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular A^n

Ejercicio 26 Dada $A = \begin{pmatrix} m & 0 & m \\ m+1 & m & 0 \\ 0 & m+1 & m+1 \end{pmatrix}$

- a) Estudiar el rango de A en función de los valores de m .
 b) Para $m = 1$, hallar el valor del determinante de la matriz $5(A^t \cdot A^{-1})^{2020}$

Ejercicio 27 Dada $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ con $|M| = 5$, calcula razonadamente:

- a) El rango de M^3 b) $|(M^{-1})^2|$ c) $|2 \cdot M^t|$ d) $|\text{Adj}(M)|$

Ejercicio 28 Contesta razonadamente:

a) Sea A una matriz cuadrada de orden 3, y tal que $|A| = 2$. ¿Tiene inversa la matriz A^5 ? Calcula $|6 \cdot A^{-1}|$ y $|(6A)^{-1}|$

b) ¿Para qué valores de k el rango de $A = \begin{pmatrix} k+1 & 6 \\ 2 & k \end{pmatrix}$ vale 1?

c) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente, C_1 , C_2 y C_3 . Si $\det(A) = 1$, calcula $\det(C_1 + C_2, 2C_1 + 3C_2, -C_2)$

Ejercicio 29 Responde si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifica tu respuesta.

- a) Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se cumple que $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$
 b) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se cumple que si $A^2 = 0$ entonces $A = 0$.
 c) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se cumple que $(A + I)(A - I) = A^2 - I$

Ejercicio 30 Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m-1 \\ 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & -1 & 2-m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- a) Determina los valores de m para los cuales A no tiene inversa.
 b) Para $m = 1$, hallar la matriz X que verifica la ecuación matricial $A^{-1} \cdot X \cdot A + I = B$

Ejercicio 31 Dada $B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & 3 \end{pmatrix}$, calcula B^{2019}

Ejercicio 32 Halla X simétrica, de rango 1, y tal que $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 33 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula el rango de $AB^t + \lambda I$ según los valores de λ .

b) Calcula la matriz X tal que $CX - X = 2I$

Ejercicio 34 Sea A una matriz cuadrada de orden 3, cuyas primera, segunda y tercera columna son, respectivamente, C_1 , C_2 , y C_3 . Sabiendo que $\det(A) = 4$, calcula $\det(-C_2, 2C_1 - C_3, C_2 + C_3)$ y $|2 \cdot (A \cdot A^t)^{-1}|$

Ejercicio 35 Dada $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, halla todos los valores de a y b para los cuales A es ortogonal (es decir, para que $A^{-1} = A^t$)

Ejercicio 36 Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$:

a) Determina para qué valores de m la matriz M es singular.

b) Para $m = 1$, despeja X en la ecuación $XM - 2I = 0$

c) Calcula el valor del determinante de la matriz $-2 \cdot M^t \cdot M^{-1}$

Ejercicio 37 Halla, según los valores de k , el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k^2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 38 Halla todas las matrices que conmutan con $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 39 Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, con $|A| = -1$, tal que $A^5 + 2A - I = 0$. Calcula los determinantes $|4A - 2I|$ y $|-2A + I|$

Ejercicio 40 Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, encontrar dos matrices X e Y tales que $\begin{cases} X + Y^{-1} = A \\ X - Y^{-1} = A^t \end{cases}$

Ejercicio 41 Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, calcular los valores de x para que la matriz $A - xI$ sea singular.

Ejercicio 42 Sea M una matriz cuadrada de orden 3, cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente, F_1 , F_2 , y F_3 . Sabiendo que $\det(M) = -1$, calcula el determinante $\det(F_1 - F_2, 3F_1, 5F_2 + F_3)$

Ejercicio 43 Sea $A = \begin{pmatrix} m+2 & -1 & m+1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ -1 & -2 & m+1 \end{pmatrix}$.

a) Estudia el rango de A en función de m

b) Para $m = 20$, calcular el determinante de la matriz $-2(A^t \cdot A^{-1})^{20}$

Ejercicio 44 Sea A una matriz cuadrada de orden 3, tal que $|A| = -3$. ¿Es inversible la matriz A^3 ? Justifica la respuesta, y calcula los determinantes de las matrices $-3A^{-1}$, y $(-3A)^{-1}$

Ejercicio 45 Sea M una matriz de orden 3, con $\det(M) = -1$, y tal que $M^6 - 2M + I = 0$. Calcula el determinante de la matriz $I - 2M$

Ejercicio 46 Sea $\begin{pmatrix} 1 & 0 & m-1 \\ 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & -1 & 2-m \end{pmatrix}$. Calcula los valores de m para los cuales existe su inversa.

Ejercicio 47 Dadas $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Resuelve la ecuación matricial $XA + B = X$

b) Calcula el determinante de $(A - I)^{1000}$

Ejercicio 48 Halla una matriz cuadrada de orden 2, simétrica, con determinante -28 , y que verifique

$$A \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 49 Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcula el rango, según los valores de λ , de la matriz $A - \lambda I$.

b) Calcula la matriz X que verifica $XA - 2A = 3X$

Ejercicio 50 Sea M una matriz cuadrada de orden 3, cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente F_1 , F_2 , y F_3 , y de la que sabemos que $|M| = -1$.

a) Calcular $\det(F_1 - F_2, 2F_1, F_2 + F_3)$, $\det(F_2 - 3F_3, F_1, -F_3)$ y $\det(-2M^t M^{-1})$

b) Si $M^5 - M + I = 0$, calcular $\det(I - M)$, y $\det(2I - 2M)$

Ejercicio 51 Resuelve las siguientes ecuaciones

a)
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & x \\ 9 & -4 & x-1 \end{vmatrix} = 0$$

b)
$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$