Matrices

IES O Couto

curso 2019-2020

Definición de matriz

Una **matriz** A de coeficientes reales, y de dimensión $m \times n$, es un conjunto de números reales dispuestos en m filas y n columnas.

- Cada uno de dichos números se denomina coeficiente.
- El elemento que ocupa la fila i-ésima y la columna j-ésima se denomina a_{ij}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

De forma abreviada se escribe:

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

Otras definiciones

- **Igualdad de matrices** : Las matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{m\times n}$ de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ son iguales si tienen los mismos coeficientes y en las mismas posiciones. Es decir:

Dadas A, $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$,

$$A = B \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall\, i = 1, \ldots m,\ j = 1, \ldots n$$

- **Matriz opuesta** : Dada $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, se define su matriz opuesta como la matriz $-A$, cuyos coeficientes son los opuestos de los coeficientes de A. Es decir:

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \implies -A = (-a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

Matriz traspuesta

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, se llama **matriz traspuesta de A** a la matriz $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ cuyas filas son las columnas de A.

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \implies A^t = (a_{ji})_{n\times m} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies A^t = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices: Matriz fila y matriz columna

- **Matriz fila (o vector fila)** : Es una matriz de dimensión $1 \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$$

- **Matriz columna (o vector columna)** : Es una matriz de dimensión $m \times 1$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$$

Tipos de matrices: Matriz cuadrada

- **Matriz cuadrada de orden n** : Es una matriz con el mismo número de filas que de columnas.
  A dicho número n se le llama **orden** de la matriz.
  Abreviadamente se expresa que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

En la matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

- Los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33} y a_{44}, constituyen la diagonal principal.
- Los elementos los elementos a_{14}, a_{23}, a_{32} y a_{41}, constituyen la diagonal secundaria.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & -3 \\ 9 & -3 & 7 & -3 \\ 10 & 8 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices: Matrices triangulares

- **Matriz triangular superior** : Es una matriz cuadrada en la que todos los elementos situados bajo la diagonal principal son nulos ($a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matriz triangular inferior** : Es una matriz cuadrada en la que todos los elementos situados sobre la diagonal principal son nulos ($a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices: Matrices diagonales

- **Matriz diagonal** : Es una matriz cuadrada en la que todos los elementos situados fuera de la diagonal principal son nulos (como la matriz D).
- **Matriz escalar** : Es una matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales (como la matriz E).
- **Matriz unidad o identidad** : Es la matriz escalar en la que todos los elementos de la diagonal principal valen 1 (como la matriz I_3).

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices: Matrices simétricas y antisimétricas

- **Matriz simétrica** : Una matriz cuadrada A es simétrica cuando coincide con su traspuesta. Es decir, cuando $A = A^t$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & -3 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \ A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & -3 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = A^t$$

- **Matriz antisimétrica** : Una matriz cuadrada A es antisimétrica cuando su matriz traspuesta coincide con su opuesta, es decir, cuando $A^t = -A$. Necesariamente, para que una matriz sea antisimétrica todos los elementos de la diagonal principal deben ser nulos.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \ A^t = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t = -A$$

Suma de matrices

Sean dos matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{m\times n}$ de dimensión $m \times n$. Se define la **matriz suma** $A + B$ como la matriz de dimensión $m \times n$ cuyos coeficientes se obtienen al sumar los correspondientes de A y B. Es decir:

Dadas $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$$

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -9 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$:

$$A + B = \begin{pmatrix} -8 & 10 & -5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma de matrices

- Conmutativa:

$$\forall A,\, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \quad A+B=B+A$$

- Asociativa:

$$\forall A,\, B,\, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \quad (A+B)+C=A+(B+C)$$

- Elemento neutro (matriz nula):

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \exists \mathcal{O} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \quad / \quad A+\mathcal{O}=A$$

  La **matriz nula $\mathcal{O}$** es la que tiene todos sus coeficientes nulos.

- Elemento opuesto:

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}),\, A+(-A)=\mathcal{O}$$

Producto de un escalar por una matriz

Sea la matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y α un número real. Se define la matriz $\alpha \cdot A$ como la matriz de dimensión $m \times n$ cuyos coeficientes se obtienen multiplicando los de la matriz A por el escalar α. Es decir:

Dados $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, y $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})_{m\times n}$$

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $\alpha = 3$:

$$3 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 18 & -9 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de una matriz por un escalar

- Distributiva respecto a la suma de matrices:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \quad \alpha \cdot (A+B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$$

- Distributiva respecto a la suma de escalares:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \quad (\alpha+\beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$

- Asociativa respecto al producto de los escalares:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \quad (\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$$

- Elemento neutro:

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \quad 1 \cdot A = A$$

Producto de matrices

Sean $A = (a_{ij})_{m\times p} \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$, y $B = (b_{ij})_{p\times n} \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$. Se define la **matriz producto** $A \cdot B = (c_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ como la matriz cuyos coeficientes se obtienen de la forma:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -14 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

Propiedades del producto de matrices

Siempre que el producto sea posible, se cumplen las siguientes

- Asociativa:
$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$
- Distributiva respecto a la suma:
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$
- Asociativa respecto a la multiplicación por un escalar:
$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B$$

- Para las matrices cuadradas de orden n existe elemento neutro (la matriz identidad de orden n)
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$$

Potencias de matrices

Se llama **potencia enésima de una matriz cuadrada** A al producto de dicha matriz n veces por sí misma. Es decir:

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad A^n = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ veces}}$$

Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es **idempotente** si verifica que $A^2 = A$

El producto de matrices no es conmutativo

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Como consecuencia de la no conmutatividad del producto de matrices:

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

Matriz Inversa

- Dada una matriz cuadrada A de orden n, se dice que es **invertible o regular** si existe una matriz cuadrada de orden n, que se denotará A^{-1}, tal que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

- Si una matriz cuadrada no tiene inversa, se dice que es **singular**.
- Si $A^{-1} = A^t$, se dice que la matriz A es **ortogonal**.

Propiedades

- Si A es inversible, entonces $(A^{-1})^{-1} = A$
- Si A y B son inversibles, entonces $A \cdot B$ también es inversible, y

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

En efecto:

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

Propiedades de las operaciones con matrices traspuestas

Estas propiedades son de trivial comprobación aplicando las definiciones de matriz traspuesta, y las definiciones de las operaciones con matrices.

- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Aplicando las propiedades anteriores, es fácil demostrar también las siguientes.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- $A + A^t$ es una matriz simétrica.
- $A - A^t$ es una matriz antisimétrica.
- $A \cdot A^t$ es una matriz simétrica.
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Ejercicio 1

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcula:

1. $D \cdot B \cdot D^t$
2. $A \cdot C^t \cdot D - 2 \cdot B$
3. *Comprobar que* $E = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *es la inversa de* B.

1. $DBD^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -3$

2. $AC^tD - 2B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 6 & -24 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$

3. $B \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$
$\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$
$E \cdot B = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$
Por tanto, $B^{-1} = E$

Ejercicio 2

Efectuar y simplificar las expresiones matriciales siguientes:

1. $(2A+3B)^2$
2. $(2A-B)^2$
3. $(A-3B)(A+3B)$
4. $A^2-A(I+2A)$

Hay que tener en cuenta que el producto de matrices no es conmutativo.

1. $(2A+3B)^2=(2A+3B)\cdot(2A+3B)=4A^2+6AB+6BA+9B^2$
2. $(2A-B)^2=(2A-B)\cdot(2A-B)=4A^2-2AB-2BA+B^2$
3. $(A-3B)(A+3B)=A^2+3AB-3BA-9B^2$
4. $A^2-A(I+2A)=A^2-A-2A^2=-A^2-A$

Ejercicio 3

Demuestra que la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ *es ortogonal.*

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I \implies A^{-1} = A^t \implies A \text{ ortogonal}$$

Ejercicio 4

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz idempotente.

1. *Encuentra la expresión general de $(A+I)^4$*
2. *Calcula el valor de $(A+I)^4$ si $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$*

En este ejercicio podremos agilizar los cálculos porque la matriz identidad conmuta con cualquier otra.

1. $(A+I)^4 = \sum_{i=1}^{4} \binom{4}{i} A^i = I + 4A + 6A^2 + 4A^3 + A^4$

   Como A es idempotente:
   $A^2 = A$
   $A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A \implies A^3 = A$
   $A^4 = A^2 \cdot A^2 = A \cdot A = A^2 = A \implies A^4 = A$

Por tanto:

$$I + 4A + 6A^2 + 4A^3 + A^4 = I + 4A + 6A + 4A + A = I + 15A \Longrightarrow$$

$$(A+I)^4 = I + 15A$$

2. Primero comprobamos que A es idempotente:

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = A$$

Utilizando el resultado del apartado anterior:

$$(A+I)^4 = I + 15A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 15 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5

Calcula la expresión de A^n *para la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Obtenemos las primeras potencias de la matriz A:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Supongamos (hipótesis de inducción) que para cierto $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 & n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos que la expresión también se verificará para el siguiente número natural $n+1$:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 & n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

Ejercicio 6

Sabiendo que A, B, y $A-B$ son una matrices inversibles, despeja X en las siguientes ecuaciones matriciales:

1. $AX + C = B$
2. $AXB = BA$
3. $XA + C = XB$

1. $AX + C = B \implies AX = B - C \implies A^{-1}A \cdot X = A^{-1}(B-C) \implies IX = A^{-1}(B-C) \implies X = A^{-1}(B-C)$
2. $AXB = BA \implies A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}BAB^{-1} \implies X = A^{-1}BAB^{-1}$
3. $XA + C = XB \implies XA - XB = -C \implies X(A-B) = -C \implies X(A-B)(A-B)^{-1} = -C \implies X = -C(A-B)^{-1}$

Ejercicio 7

Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, *resuelve el sistema:*

$$\begin{cases} 4X - Y = A \\ -3x + 4Y = B \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4X - Y = A \\ -3X + 4Y = B \end{cases} \overset{4\cdot Ec_1 + Ec_2}{\Longrightarrow} 13X = 4A + B \Longrightarrow X = \frac{1}{13}(4A + B)$$

Sustituyendo X en la primera ecuación:

$$Y = 4X - A \Longrightarrow Y = \frac{4}{13}A + \frac{1}{13}B - A = -\frac{9}{13}A + \frac{1}{13}B$$

$$X = \frac{4}{13}A + \frac{1}{13}B = \frac{4}{13}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{13} & \frac{1}{13} \\ -\frac{14}{13} & \frac{17}{13} \end{pmatrix}$$

$$Y = -\frac{9}{13}A + \frac{1}{13}B = -\frac{9}{13}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{18}{13} & \frac{14}{13} \\ \frac{25}{13} & -\frac{35}{13} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8

Expresar la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ *como la suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.*

Usaremos que

$$\begin{cases} A + A^t & \text{es simétrica} \\ A - A^t & \text{es antisimétrica} \end{cases}$$

Sean S y T las matrices siguientes:

$$S = A + A^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 16 \end{pmatrix}$$

$$T = A - A^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$$

Por otra parte:

$$\left.\begin{array}{l} S = A + A^t \\ T = A - A^t \end{array}\right\} \xRightarrow{Ec_1 + Ec_2} S + T = 2A \implies A = \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}T$$

Es decir:

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 16 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9

Usando las propiedades de la trasposición de matrices suma, matrices producto, y matrices multiplicadas por un escalar, demuestra que dadas $A,\ C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*:*

1. $A + A^t$ *es simétrica.*
2. $A - A^t$ *es antisimétrica.*
3. A *simétrica* $\implies$ $C^t \cdot A \cdot C$ *simétrica.*

1. $(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t \implies (A + A^t)^t = A + A^t \implies$ $A + A^t$ simétrica.
2. $(A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -A + A^t = -(A - A^t) \implies$ $(A - A^t)^t = -(A - A^t) \implies A - A^t$ antisimétrica.
3. $(C^t \cdot A \cdot C)^t = C^t \cdot A^t \cdot (C^t)^t = C^t \cdot A \cdot C \implies (C^t \cdot A \cdot C)^t = C^t \cdot A \cdot C \implies$ $C^t \cdot A \cdot C$ simétrica.

Ejercicio 10

Dadas $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y regulares, demuestra que:

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Hay que utilizar la definición de matriz inversa (M es la matriz inversa de A si y solo si $M \cdot A = A \cdot M = I$)

1. $AB \cdot B^{-1}A^{-1} = A \cdot (B \cdot B^{-1})A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$
   $B^{-1}A^{-1} \cdot AB = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = B^{-1} \cdot I \cdot B = B^{-1} \cdot B = I$
   Por tanto, $B^{-1}A^{-1}$ es la matriz inversa de AB
2. $A^t \cdot (A^{-1})^t = (A^{-1} \cdot A)^t = I^t = I$
   $(A^{-1})^t \cdot A^t = (A \cdot A^{-1})^t = I^t = I$
   Por tanto, la inversa de la traspuesta de una matriz A coincide con la traspuesta de la inversa de A.