

Bloque de Análisis: Límites, continuidad, y derivabilidad de funciones

Ejercicio 1 *Calcula los siguientes límites:*

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x} - \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}{x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x}(x - \sqrt{x^2 + x + 1})}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x+1} \right)^{3x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{x^2 + 1} \right)^{3x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + 1}{3x - 1} \right)^{\frac{x+2}{x-2}}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\operatorname{sen} x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x})$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \operatorname{sen} x}{x^3}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \operatorname{sen} x}{x^3}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - x)^{\frac{1}{x}}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$$

$$\tilde{n}) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x)^{1 - \cos x}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x \ln \left(\frac{x}{x+1} \right)$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x}$$

$$q) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$$

$$r) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

$$s) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x^2))^{\frac{2}{x^2}}$$

$$t) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$$

$$u) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{arc} \operatorname{sen} x}$$

$$v) \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x^2 + x - 5}{x^2 - 3} \right)^{\frac{1}{2x-4}}$$

$$w) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$$

$$x) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2)^{\frac{2x}{x+10}}$$

$$y) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x^2)^{2x}$$

$$z) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^3 + x} \right)$$

Ejercicio 2 *Calcular los siguientes límites.*

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{|x|} - x}{x^2 - 2x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$$

Ejercicio 3 *Calcula el valor del parámetro k para que los límites siguientes tengan el valor indicado:*

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 3x}{2x^2 + 1} \right)^{kx-1} = e^3$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{sen}(kx)}{\sqrt{1 - \cos x}} = 6$$

Ejercicio 4 Calcular según los valores del parámetro α : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{x+1}$

Ejercicio 5 Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1}{x}$

Ejercicio 6 La función $f(x) = \frac{x^2 - 2x + n}{x^3 + mx^2 - 14x}$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$. Calcular m , n , y clasificar el resto de las discontinuidades.

Ejercicio 7 Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$

Ejercicio 8 ¿Qué condición debe cumplir m para que la ecuación $x^3 + x^2 + mx - 6 = 0$ tenga alguna solución en $(0, 2)$?

Ejercicio 9 Demuestra que la ecuación $x \ln x = 2$ tiene alguna solución real, y encuéntrala con una cifra decimal exacta.

Ejercicio 10 Demostrar que las gráficas de $y = \ln x$ e $y = e^{-x}$ se cortan en algún punto.

Ejercicio 11 Sean $f, g : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$ verificando $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$. Demostrar que existe un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$

Ejercicio 12 Demostrar que la función $y = \frac{x^2 + 1}{3 - \cos x}$ alcanza el valor 2 en algún punto de su dominio.

Ejercicio 13 Dada la ecuación $x^3 + \lambda x^2 - 2x = 1$:

- Demstrar que si $\lambda > 2$, la ecuación tiene una solución menor que 1.
- Demstrar que si $\lambda < 2$, la ecuación tiene una solución mayor que 1.

Ejercicio 14 Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

Ejercicio 15 Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} + 2 & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$:

- ¿Existe algún valor de k para el cual f es continua?
- ¿Existe algún valor de k para el cual f es derivable?

Ejercicio 16 Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $f(x) = 2x \cdot |4 - x|$

Ejercicio 17 Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{ax} & \text{si } x > 1 \end{cases}$, determina a para que sea derivable en \mathbb{R}

Ejercicio 18 Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde m es una constante mayor que cero. Para cada valor de m , hallar el valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas.

Hallar también el valor de m para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$

Ejercicio 19 Dadas las funciones $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = \sqrt{x^2 - 3}$, hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a cada una de ellas en el punto de corte de las gráficas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, y demostrar que dichas tangentes son perpendiculares.

Ejercicio 20 Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = ax^2 + b$, encontrar los valores de a y b para que sus gráficas sean tangentes en el punto $x = 2$, y para dichos valores, hallar la ecuación de la recta tangente común a ambas curvas.

Ejercicio 21 Sea $f(x) = x^2 + ax + b$. Hallar los valores de a y b para que la recta $y = 2x$ sea tangente a la gráfica en el punto $P = (2, 4)$

Ejercicio 22 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 3 \\ \ln(x - 2) & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

- Calcula los valores de a y b para que sea derivable en \mathbb{R}
- Calcula su función derivada.
- Encuentra la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = 3$.

Ejercicio 23 Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + 8 & \text{si } x \leq -1 \\ ax^3 + b & \text{si } -1 < x < 2 \\ 12x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- Determinar el valor de a y b para que sea derivable en $x = -1$.
- Para los valores de a y b encontrados en el apartado anterior, estudiar la derivabilidad de la función, y obtener la expresión de la función derivada.

Ejercicio 24 Para la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + b & \text{si } 1 < x < 3 \\ x^2 - 5x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

- Calcula los valores de a y b para que sea derivable en $x = 1$.
- Para los valores de a y b encontrados en el apartado anterior, estudia la derivabilidad en $x = 3$.
- Encuentra las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la función en $x = 4$.
- Encuentra los puntos de la gráfica cuya recta tangente es paralela a la recta de ecuación $y = 2x - 1$

Ejercicio 25 Determina el valor de a para que $f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ a(1 - e^{1-x}) & \text{si } 1 < x \end{cases}$ sea derivable en todo su dominio.

Ejercicio 26 Utilizando la definición de función derivada, calcula $f'(1)$ para las funciones $f(x) = \ln(x^2 + e)$ y $f(x) = \sqrt{x+1}$

Ejercicio 27 Resuelve las siguientes cuestiones:

a) ¿En qué punto de la curva de la función $f(x) = x \ln x - x$ la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante?

b) Determina el ángulo que forma la recta tangente a $y = -x^2 + 3$ con el eje OX en el punto de abscisa $x = 3$

c) Determina las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \frac{x}{2x+3}$ paralelas a la recta $3x - 2y + 15 = 0$

d) Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 6x + 8$ y que pasa por el punto $(6, 4)$

e) Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = -x^2 + 4$ y que pasa por el punto $(0, 5)$

f) Determina la ecuación de la recta tangente a $y = x^2 + x$ que forma 60° con la dirección positiva el eje OX .

g) Determina la ecuación de la recta tangente a $y = -x^2 + 2x + 1$ que forma 30° con la dirección positiva el eje OX .

Ejercicio 28 Resuelve las siguientes cuestiones:

a) ¿Es aplicable el Teorema de Rolle a $f(x) = |x - 2|$ en el intervalo $[0, 2]$?

b) Estudiar si la función $f(x) = x - x^3$ satisface el Teorema de Rolle en $[0, 1]$, y en caso afirmativo, determinar el valor de c .

c) Demostrar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ solo tiene una raíz real.

d) Determinar el número de raíces reales de la ecuación $x^3 + 6x^2 + 15x = 25$

e) Dada la curva $y = x^3 - x^2 + 2$, ¿existe alguna recta tangente a la misma paralela a la recta que une los puntos $A = (1, 2)$ y $B = (3, 20)$? Justifica la respuesta, y determina la ecuación de dicha tangente en caso afirmativo.

f) Demostrar que $f(x) = x^3 + x - 1$ verifica las hipótesis del Teorema de Lagrange en el intervalo $[0, 2]$, y encuentra todos los puntos c en los cuales lo satisface.

g) Determinar a , b y c para que $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq 3 \\ bx + c & \text{si } x > 3 \end{cases}$ cumpla el Teorema de Rolle en $[-1, 7]$

h) Demuestra razonadamente que la ecuación $x^2 = x \sin x + \cos x$ tiene exactamente dos raíces en el intervalo $[-\pi, \pi]$.