Soluciones a los ejercicios de Sistemas de Ecuaciones

1
1774

2
1786

3
87

$$\begin{cases} t^2x+t^3y+tz=1 \\ x+t^2y+z=0 \end{cases}$$

$$M\text{'}=\left(\underbrace{\begin{matrix} t^2 & t^3 & t \\ 1 & t^2 & 1 \end{matrix}}_{M}\left|\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right.\right)$$

$$\begin{vmatrix} t^2 & t^3 \\ 1 & t^2 \end{vmatrix}=t^4-t^3=t^3\,(t-1)$$

Así pues, cualquiera que sea $t\neq 0,1$ , rango $M=$ rango $M\text{'}=2$, y el sistema es compatible e indeterminado, con infinitas soluciones. [4 p]

¿Y para $t=0$ y $t=1$?

Para $t=0$ :

$$M\text{'}=\left(\underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}}_{M}\left|\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right.\right)$$ la primera ecuación es incompatible $(0=1)$ , por lo que el sistema también lo es y no hay solución. [3 p]

Para $t=1$ :

$$M\text{'}=\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{M}\left|\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right.\right)$$ rango $M=1$ y rango $M\text{'}=2$ por lo que también el sistema es incompatible y no hay solución. [3 p]

4
171

$$\begin{cases} ax+z+t=1 \\ ay+z-t=1 \\ ay+z-2t=2 \\ az-t=0 \end{cases}$$

Es un sistema que invita a emplear el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & a & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3:f_3-f_2]{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3\leftrightarrow f_4]{} \left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Queda, así, un sistema escalonado en el que, si $\boxed{a\neq 0\text{, resulta ser compatible determinado}}$ [2 pt]

¿Qué ocurre si $a=0$?

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_4:f_4-f_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),\ 0=1\,,\ \boxed{a=0\ \text{sistema incompatible}}$$ [3 pt]

Solución para $a\neq 0$ : $\boxed{\left(\frac{2a+1}{a^2},\ \frac{1}{a^2},\ \frac{-1}{a},\ -1\right)}$ [5 pt]

5
89

a.

$$\begin{cases} 2x+3y-2z=b \\ ax-y+z=2 \\ 6x+5y-3z=a \end{cases}$$

$$M'=\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & b \\ a & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & -3 & a \end{array}\right)}_{M} \; ; \; \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \,; \text{ rango } M \geq 2$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ a & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 2-a$$

Por tanto, para $\boxed{a \neq 2 \,,\ |M| \neq 0 \,, \text{rango } M = \text{rango } M' = 3 \,: \ \text{ compatible determinado}}$

Caso $a=2$

$$M'=\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & b \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & -3 & 2 \end{array}\right)}_{M} \; ; \; \text{rango } M = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & b \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -2b$$

Por tanto, para $\boxed{a=2 \,, b \neq 0 \,, \text{ rango } M = 2 \neq 3 = \text{rango } M' \ : \ \text{ incompatible}}$

Y, por último, para $\boxed{a=2 \,, b=0 \,, \text{ rango } M = \text{rango } M' = 2 \ : \ \text{ compatible indeterminado}}$

b.

Resolución para $a=b=0$

$$M'=\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right)}_{M} \; ; \; |M| = 2$$

$$x = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -1 \; ; \; y = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6 \; ; \; z = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

$\boxed{x=-1 \,, y=6 \,, z=8}$

6

188

$$M'=\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & b & 1 \\ 1 & a & b & 1 \\ 1 & 1 & ab & b \end{array}\right)}_{M}$$

$\det M = b\,(a+2)\,(a-1)^2$

Por tanto, $\boxed{\text{siempre que } \ b \neq 0 \ \text{ y } \ a \neq -2 \ \text{ y } \ a \neq 1 \ \text{ el sistema es compatible determinado}}$

Si $b=0$

$$M'=\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{M} \; ; \; \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\,(a-1) \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Así pues, para $b=0$ y $a=1$ : rango $M'=2$ y rango $M=1$ (tres columnas iguales)

$\boxed{b=0 \ \text{ y } \ a=1 \ \text{ sistema incompatible}}$

Además, si $b=0$ y $a \neq 1$ : rango $M'=3$ y rango $M=2$ , $\left(\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-a \neq 0\right)$

$\boxed{b=0 \ \text{ y } \ a \neq 1 \ \text{ sistema incompatible}}$

Si $b \neq 0$ y $a = 1$

$$M' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}}_{M}\left|\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ b \end{matrix}\right) \text{ ; rango } M = 1 \text{ ; rango } M' = 2 \text{ , } \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = b - 1 \neq 0\right)$$

o bien rango $M' = 1$ si $b = 1$

$\boxed{b \neq 1 \text{ y } a = 1 \text{ sistema incompatible}}$

$\boxed{b = 1 \text{ y } a = 1 \text{ sistema compatible indeterminado}}$

Si $b \neq 0$ y $a = -2$

$$M' = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & b \\ 1 & -2 & b \\ 1 & 1 & -2b \end{pmatrix}}_{M}\left|\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ b \end{matrix}\right) \text{ ; rango } M = 2 \text{, } \left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0\right)$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = 3(b+2) \text{ ; rango } M' = 3 \text{ con } b \neq -2 \text{ y rango } M' = 2 \text{ con } b = -2$$

$\boxed{b \neq -2 \text{ y } a = -2 \text{ sistema incompatible}}$

$\boxed{b = -2 \text{ y } a = -2 \text{ sistema compatible indeterminado}}$

7

190

$x$ : nº de kilogramos de fertilizante del tipo I

$y$ : nº de kilogramos de fertilizante del tipo II

$z$ : nº de kilogramos de fertilizante del tipo III

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 0{,}06x + 0{,}08y + 0{,}12z = 8 \\ 0{,}06x + 0{,}12y + 0{,}08z = 8 \\ 0{,}08x + 0{,}04y + 0{,}12z = 8 \end{cases}$$

En forma matricial y empleando el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 6 & 8 & 12 & 800 \\ 6 & 12 & 8 & 800 \\ 8 & 4 & 12 & 800 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 2 & 6 & 200 \\ 0 & 6 & 2 & 200 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 2 & 6 & 200 \\ 0 & 0 & -16 & -400 \\ 0 & 0 & 16 & 400 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 2 & 6 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 25 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 3 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 25 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 75 \\ 0 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 25 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 25 \end{pmatrix} \to \boxed{\begin{matrix} x = 50 \\ y = 25 \\ z = 25 \end{matrix}}$$

8

199

$$M' = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -a & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -(a-1) \end{pmatrix}}_{M}\left|\begin{matrix} a-1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right) \text{ ; } \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } M \geq 2$$

$$|M| = -2a^2 + 14a - 20 = -2(a-2)(a-5)$$

$\boxed{\forall a \neq 2\,,\,5 \text{ ; rango } M = \text{rango } M' = 3 \text{ : sistema compatible determinado}}$ [2 p]

solución:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{-2(a-2)(a-5)}\begin{vmatrix} a-1 & -a & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -(a-1) \end{vmatrix} = \boxed{\frac{2a-5}{5-a}} \\ y &= \frac{1}{-2(a-2)(a-5)}\begin{vmatrix} 3 & a-1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -(a-1) \end{vmatrix} = \boxed{\frac{a}{5-a}} \\ z &= \frac{1}{-2(a-2)(a-5)}\begin{vmatrix} 3 & -a & a-1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{\frac{5}{5-a}} \end{aligned}\right\} \text{[2 p]}$$

$\boxed{a=2}$

$$M' = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}}_{M} \left|\begin{matrix}1\\1\\0\end{matrix}\right) \; ; \; \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \,; \text{ rango } M' = 2$$

$\boxed{\text{en conclusión: } a=2\,;\ \text{rango } M = \text{rango } M' = 2\,;\ \text{sistema compatible indeterminado}}$ [2 p]

solución:

eliminando la tercera ecuación y pasando "$y$" al segundo miembro como parámetro:

$$\left.\begin{array}{l} y=t\,;\ \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1+2t \\ 2 & 3 & 1+5t \end{array}\right) \\ x = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1+2t & 2 \\ 1+5t & 3 \end{vmatrix} = \frac{1-4t}{5} \\ z = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 3 & 1+2t \\ 2 & 1+5t \end{vmatrix} = \frac{1+11t}{5} \end{array}\right\} \boxed{\left(\frac{1-4t}{5}, t, \frac{1+11t}{5}\right),\ t\in\mathbb{R}} \quad [2\text{ p}]$$

$\boxed{a=5}$

$$M' = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}}_{M} \left|\begin{matrix}4\\1\\0\end{matrix}\right) \; ; \; \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -30 \neq 0 \,; \text{ rango } M' = 3$$

$\boxed{\text{en conclusión: } a=5\,;\ \text{rango } M \neq \text{rango } M'\,;\ \text{sistema incompatible}}$ [2 p]

9

226

$$\begin{cases} x+y=2m \\ x+(1+m)y = 3m+5 \\ -mx-my = m^2-2m-1 \end{cases}$$

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+m \\ -m & -m \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} 2m \\ 3m+5 \\ m^2-2m-1 \end{matrix}\right.\right)$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m \\ 1 & 1+m & 3m+5 \\ -m & -m & m^2-2m-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m \\ 0 & m & m+5 \\ 0 & 0 & 3m^2-2m-1 \end{vmatrix} = m\left(3m^2-2m-1\right) = 3m(m-1)\left(m+\frac{1}{3}\right)$$

$\boxed{\text{Para cualquier } m \text{ distinto de } 0, 1 \text{ y } -\frac{1}{3} \text{ el rango de } A' \text{ es 3 y el sistema es incompatible}}$

Para $m=0$

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{matrix}\right.\right) \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \; ; \; \text{rango } A = 1 \text{ (dos columnas iguales)} \; ; \; \text{rango } A' = 2$$

$\boxed{\text{Para } m=0 \text{ el sistema es incompatible}}$

Para $m=1$

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} 2 \\ 8 \\ -2 \end{matrix}\right.\right) \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \; ; \; \text{rango } A = \text{rango } A' = 2$$

$\boxed{\text{Para } m=1 \text{ el sistema es compatible determinado}}$

Para $m=-\frac{1}{3}$

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} -2/3 \\ 4 \\ -2/9 \end{matrix}\right.\right) \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2/3 \end{vmatrix} = -1/3 \neq 0 \; ; \; \text{rango } A = \text{rango } A' = 2$$

$\boxed{\text{Para } m=-1/3 \text{ el sistema es compatible determinado}}$

10

289

$$\begin{cases} x\ \cos a - y\ \text{sen}\ a + 1 = x \\ x\ \text{sen}\ a + y\ \cos a + 2 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\ (\cos a - 1) - y\ \text{sen}\, a = -1 \\ x\ \text{sen}\, a + y\ (\cos a - 1) = -2 \end{cases}$$

$$M' = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} \cos a - 1 & -\text{sen}\, a & -1 \\ \text{sen}\, a & \cos a - 1 & -2 \end{array}\right)}_{M}$$

$$\begin{vmatrix} \cos a - 1 & -\text{sen}\, a \\ \text{sen}\, a & \cos a - 1 \end{vmatrix} = \cos^2 a - 2\cos a + 1 + \text{sen}^2\, a = 2\,(1 - \cos a)$$

Para que el sistema no tenga solución, es condición necesaria que el determinante de la matriz de los coeficientes sea cero, garantizando, de esta forma, que rango $M < 2$.

$1 - \cos a = 0$ ; $\cos a = 1$ ; $\boxed{a = 2k\pi\ \ (k \in \mathbb{Z})}$

Cuando esto ocurre

$M' = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right)}_{M}$ que representa, claramente, un sistema incompatible. [rango $M = 0$ ; rango $M' = 1$]

11
526

a) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 2y = 5 - z \\ 2x - 3y = 4 - z \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 3y = 4 - t \end{cases}$ (1ªec – 2ª ec) $z = t$

$\begin{cases} x + y = 1 \\ -5y = 2 - t \end{cases}$ $y = \frac{2-t}{-5} = \frac{-2+t}{5}$ ; $x = 1 - y = 1 - \frac{-2+t}{5} = \frac{7-t}{5}$

$\boxed{x = \frac{7-t}{5}\ ;\ y = \frac{2-t}{-5}\ ;\ z = t}$ $t \in \mathbb{R}$ (3 p)

b) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ x + y = a \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ x + y = 1 \\ x + y = a \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ x + y = 1 \\ 0 = a - 1 \end{cases}$

$\boxed{a = 1\ \text{ sistema compatible indeterminado}}$ (2 p)

$\boxed{a \neq 1\ \text{ sistema incompatible}}$ (2 p)

c) $\boxed{\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ z = -3 \end{cases}}$ (3 p)

Se puede añadir cualquier ecuación que cumpla con la solución y que no sea combinación lineal de las dos primeras.

(1 punto por el sistema y 2 más por la explicación/justificación/demostración)

12
915

a.

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & b & c \\ a & 0 & c \end{pmatrix}\ ;\ |M| = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & b & c \\ a & 0 & c \end{vmatrix} = 2a \cdot b \cdot c \neq 0 \text{ , pues } a, b, c \neq 0$$

Por tanto, $M$ tiene inversa.

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & b & c \\ a & 0 & c \end{pmatrix} \underset{\alpha_{ij}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} bc & -ac & -ab \\ bc & ac & -ab \\ bc & ac & ab \end{pmatrix} \underset{A_{ij}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} bc & ac & -ab \\ -bc & ac & ab \\ bc & -ac & ab \end{pmatrix} \underset{\text{trasp.}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} bc & -bc & bc \\ ac & ac & -ac \\ -ab & ab & ab \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{2abc} \begin{pmatrix} bc & -bc & bc \\ ac & ac & -ac \\ -ab & ab & ab \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & -\frac{1}{2b} \\ -\frac{1}{2c} & \frac{1}{2c} & \frac{1}{2c} \end{pmatrix}}$$

b.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & -\frac{1}{2b} \\ -\frac{1}{2c} & \frac{1}{2c} & \frac{1}{2c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{a-b+c}{2a} \\ \frac{a+b-c}{2b} \\ \frac{-a+b+c}{2c} \end{pmatrix}}$$

c.

$$\begin{pmatrix} \frac{a-b+c}{2a} \\ \frac{a+b-c}{2b} \\ \frac{-a+b+c}{2c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{cases} \frac{a-b+c}{2a} = 1 \\ \frac{a+b-c}{2b} = 1 \\ \frac{-a+b+c}{2c} = 1 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} -a-b+c=0 \\ a-b-c=0 \\ -a+b-c=0 \end{cases}$$

Resulta ser un sistema homogéneo. El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$ , por lo que la única solución es la trivial $(a,\, b,\, c) = (0,0,0)$

En conclusión, $\boxed{\text{NO existen valores de } a,\ b \text{ y } c \text{ para que aquella terna sea solución}}$

No obstante, en el caso $a = b = c = 0$ (caso no contemplado en el enunciado), la ecuación resultante es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ , cuya solución es todo $\mathbb{R}^3$, incluyendo $(1,1,1)$.

13
2146

$a)\begin{cases} -x+y+z=1 \\ 4y+3z=2 \\ x+2y=1 \\ x+3y+2z=1 \end{cases} \quad M' = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix}}_{M} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } M = 3$

$$|M'| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rango } M' = 3$$

La cuarta ecuación es, así, combinación lineal de las tres primeras.
Con la regla de Cramer se resuelve el subsistema formado por las tres primeras ecuaciones, resultando $\boxed{\left(-\frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ -\frac{2}{5}\right)}$ [4 p]

$b)\ M' = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & 2 \end{matrix}}_{M} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & a \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3a-4$

$|M'| = -2a\,(a-3)$

$\boxed{a \neq 0, 3 : \text{sistema incompatible}}$ (rango $M' = 4$) [3 p]

$\boxed{a = 0, 3 : \text{sistema compatible determinado}}$ (rango $M' =$ rango $M = 3$)

en conclusión, $\boxed{\text{en ningún caso es indeterminado}}$ [3 p]

14
2252

$a)\ \begin{pmatrix} m & 2 & 0 & m \\ 3 & -1 & 0 & m \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_1 \leftrightarrow f_3]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & m \\ m & 2 & 0 & m \end{pmatrix} \xrightarrow[c_x \leftrightarrow c_z]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & m \\ 0 & 2 & m & m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & m \\ 0 & 0 & m+6 & 3m \end{pmatrix}$

la última ecuación queda: $(m+6)\,x = 3m$ ; $x = \frac{3m}{m+6}$

por tanto: $\boxed{\begin{matrix} \forall m \neq -6 \ : \text{ sistema compatible determinado} \\ m = -6 \ : \text{ sistema incompatible} \end{matrix}}$ $[2+2\text{ p}]$

$b)\ m = 0$

$$\left.\begin{matrix} x = \frac{3 \cdot 0}{0+6} = 0 \\ -y+3x=0 \Rightarrow y=0 \\ z-y+x=4 \Rightarrow z=4 \end{matrix}\right\} \text{solución } (0,0,4) \ [2\text{ p}]$$

$c)$ NO es posible [4 p]

ya que para $m = -6$ el sistema formado por las dos primeras ecuaciones es incompatible:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & m \\ m & 2 & 0 & m \end{pmatrix} \xrightarrow{m=-6} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -6 \\ -6 & 2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_2 \to f_2 + 2f_1]{} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}$$

[Para cualquier otro valor de $m$ sí que es posible, bastando con añadir una tercera ecuación que sea combinación lineal de la primera y la segunda.]

15

2436

$$M=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&-1&0\\1&0&m\end{pmatrix}\qquad m\in\mathbb{R}$$

$a)\ |\,M\,|=-m-1+m=-1\neq 0\Rightarrow$ $\boxed{M \text{ es regular}}$ [1 p]

$b)\ m=-1$

$$M=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

$$(M-s\,I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad \text{es homogéneo}\ \Rightarrow\ \boxed{\text{siempre compatible}}$$

$$M-s\,I=\begin{pmatrix}1-s&-1&-1\\1&-1-s&0\\1&0&-1-s\end{pmatrix}\ ;\ |\,M-s\,I\,|=-s^3-s^2-s-1$$

$|\,M-s\,I\,|=0\ \Rightarrow\ s^3+s^2+s+1=0$

factorizando mediante la "regla de Ruffini":

$(s+1)\left(s^2+1\right)=0\ \Rightarrow\ s=-1$ ; y, en conclusión: $\boxed{\begin{cases}\forall s\neq -1: \text{compatible determinado}\\ s=-1: \text{compatible indeterminado}\end{cases}}$ [3 p]

$s\neq -1$ : $\boxed{\text{solución trivial}\ \ (0,0,0)}$ [1,5 p]

$s=-1$

$$M-s\,I=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\ ;\ \begin{vmatrix}2&-1\\1&0\end{vmatrix}=1\neq 0\ ;\ \text{rango}\ (M-s\,I)=2$$

tomando $z=\lambda$ y despejando, queda como solución $\boxed{(0,\,-\lambda,\,\lambda)\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}}$ [1,5 p]

$c)\ M^{-1}\,v=r\,v\ ,\ r\in\mathbb{R}$

$r\neq 0$ ya que, en caso contrario, $M^{-1}\,v=0$ , y, como rango $M^{-1}=3$ ($M$ era regular), la única solución sería $v=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ , en contra de la exigencia, $v\neq 0$,del enunciado.

$M^{-1}\,v=r\,v$ , multiplicando por $M$ a la izquierda en ambos miembros:

$v=M\,(r\,v)=r\,M\,v$ , multiplicando por $r^{-1}$ a la izquierda en ambos miembros:

$r^{-1}\,v=\ M\,v$ , pasando todo al segundo miembro:

$\left(M-r^{-1}\,I\right)\,v=0$ , tomando $r^{-1}=s$: $(M-s\,I)\,v=0$ que resulta ser la ecuación del apartado $b$), que tiene solución distinta de la trivial para $s=-1$, y que resulta ser:

$$\boxed{v=\begin{pmatrix}0\\-\lambda\\\lambda\end{pmatrix}\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}}\quad [3\ \text{p}]$$

16
4511

Incógnitas:

$x$ : nº de helados de una bola (a 1 €/u)
$y$ : nº de helados de dos bolas (a 2 €/u)
$z$ : nº de helados de tres bolas (a 3 €/u)

a.

$$\begin{cases}x+y+z=157\\x+2y+3z=278\\x-k\,z=0\end{cases}\qquad [3\ \text{p}]$$

b.

$$A' = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 157 \\ 1 & 2 & 3 & 278 \\ 1 & 0 & -k & 0 \end{array}\right)}_{A} \;;\; |A| = 1-k$$

Para $k \neq 1$, $|A| \neq 0$, rango $A$ = rango $A'$ =3, por tanto:

$\boxed{k \neq 1 \text{ , sistema compatible determinado; solución única}}$ [1 p]

Para $k = 1$ :

$$\left.\begin{array}{l} A' = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 157 \\ 1 & 2 & 3 & 278 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)}_{A} \;;\; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } A = 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 157 \\ 1 & 2 & 278 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -36 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } A' = 3 \end{array}\right\} \text{rango } A \neq \text{ rango } A' \text{, por tanto:}$$

$\boxed{k = 1 \text{ , sistema incompatible; sin solución}}$ [1 p]

$\boxed{\text{NO es posible}}$ [2 p] que se vendan el mismo número de helados de una y de tres bolas, pues para ello $k = 1$, valor que hace incompatible el sistema.

c.

Resolución para $k = 3$

$$A' = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 157 \\ 1 & 2 & 3 & 278 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)}_{A} \;;\; |A| = 1-k = -2$$

Empleando la regla de Crámer, o bien con el método de Gauss (coeficientes muy propicios para ello), se resuelve el sistema, resultando:

$\boxed{x = 54, y = 85, z = 18}$ [3 p]

17
4889

Sea "$x$" el número de días pasados en Francia.
Sea "$y$" el número de días pasados en Italia.
Los gastos según el número de días se muestran en la siguiente tabla:

| GASTOS POR PERSONA | FRANCIA | ITALIA | SUIZA | TOTALES |
|---|---|---|---|---|
| HOTEL | 80 $x$ | 60 $y$ | 70×2 | 700 |
| RESTAURANTE | 50 $x$ | 40 y | 40×2 | 440 |

Con lo que se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 80\,x + 60\,y + 140 = 700 \\ 50\,x + 40\,y + 80 = 440 \end{cases}$$

cuya solución es $x = 4$ , $y = 4$.

**Pasarán 4 días en Francia y 4 días en Italia**.

18
5381

a.

$$AX = B$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;;\; \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 1 \\ 3\alpha + \gamma = 0 \\ 2\beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma = -3 \\ -6\beta - 8(-3) = -3 \,;\, \beta = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \\ 3\alpha + (-3) = 0 \,;\, \alpha = 1 \end{array}\right\} \boxed{\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \frac{9}{2} \\ \gamma = -3 \end{cases}}$$

b.

$AX = 0$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_1 \leftrightarrow f_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[x \leftrightarrow y]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[x \leftrightarrow y]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha - 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, para que el sistema sea compatible determinado $\boxed{\alpha \neq 1}$ Pues de lo contrario la última fila estaría formada por ceros y el sistema sería indeterminado.

c.

$\alpha = -1 \, , \beta = 1 \, , \gamma = 0$

$AX = B$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2 \leftrightarrow f_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} z = 0 \\ y = 1 \\ -x + 1 = 1 \, , \, x = 0 \end{array}\right\} \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}}$$

19
5448

a.

$$\begin{cases} 2x - \lambda y + z = -\lambda \\ 4x - 2\lambda y + 2z = \lambda - 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -\lambda & 1 & -\lambda \\ 4 & -2\lambda & 2 & \lambda - 3 \end{array}\right) \xrightarrow[y \leftrightarrow z]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -\lambda & -\lambda \\ 4 & 2 & -2\lambda & \lambda - 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 3\lambda - 3 \end{array}\right)$$

$3\lambda - 3 = 0 \, ; \, \lambda = 1$

Por tanto, $\boxed{\text{para } \lambda \neq 1 \text{ el sistema es incompatible}}$

b.

Para $\lambda = 1$ el sistema es compatible indeterminado y se puede eliminar la segunda ecuación.

$$2x - y + z = -1 \, ; \, \boxed{\begin{cases} x = t \\ y = s \qquad\qquad t, \, s \in \mathbb{R} \\ z = -1 - 2t + s \end{cases}}$$

20
6078

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & t & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ t^2 - 3t + 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La sencillez de los coeficientes invita a emplear el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & t & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ t^2 - 3t + 2 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[c_1 \leftrightarrow c_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & t & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & t^2 - 3t + 2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & t & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & t^2 - 3t - 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & t & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 - 3t \end{array}\right)$$

$t^2 - 3t = t \, (t - 3)$

Por tanto, para cualquier valor de $\boxed{t \text{ distinto de 0 y de 3 es sistema es incompatible}}$

Caso $t = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2 = 3f_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) , \boxed{\begin{cases} x = 1/2 \\ y = \lambda \quad , \, \lambda \in \mathbb{R} \text{ sistema compatible indeterminado} \\ z = 1 \end{cases}}$$

Caso $t = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) , \boxed{\begin{cases} x = 1/2 \\ y = 0 \quad , \, \lambda \in \mathbb{R} \text{ sistema compatible determinado} \\ z = 1 \end{cases}}$$

21
6293

a.

$M$ : matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales con $n$ incógnitas

$M'$ : matriz ampliada con la columna de términos independientes

Teorema de Rouché-Fröbenius

$\boxed{\text{El sistema tiene solución} \Leftrightarrow \text{rango } M = \text{rango } M'}$

$$\text{Además, si } \begin{cases} \text{rango } M = \text{rango } M' = n & \text{el sistema es compatible determinado} \\ \text{rango } M = \text{rango } M' < n & \text{el sistema es compatible indeterminado} \end{cases}$$

b. En un sistema de tres ecuaciones el rango máximo de aquellas matrices es 3, que es menor que el número de incógnitas, por lo que nunca puede ser compatible determinado.

c.

$$\begin{cases} 2x+3y-z+2t=2 \\ 5x+y+2z=1 \\ x+8y-5z+6t=a \end{cases}$$

$$M' = \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & -5 & 6 & a \end{array}\right)}_{M} \; ; \; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \text{ por lo que rango } M \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 0 \text{ por lo que rango } M = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -5 & 6 & a \end{vmatrix} = 20-4a = -4(a-5) \begin{cases} \neq 0 \text{ si } a \neq 5 \; ; \text{ rango } M' = 3 \\ = 0 \text{ si } a = 5 \; ; \text{ rango } M' = 2 \end{cases}$$

Por tanto, para que el sistema sea incompatible $\boxed{a \neq 5}$

22
6723

a.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -2 & -1 \\ -1 & a & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[x\leftrightarrow z]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & a & -1 \\ 1 & a & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{reordenar filas}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & a & -1 \\ 1 & a & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Gauss}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & a & 5 \\ 0 & a-1 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2a-9 & 1 \\ 0 & 0 & -3-a^2+a & 2-5a \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2a-9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -9a^2+48a-15 \end{array}\right)$$

$$-9a^2+48a-15=0 \; ; \; 3a^2-16a+5=0 \; ; \; a = \begin{cases} 1/3 \\ 5 \end{cases}$$

Por tanto, $\boxed{\text{cuando } (a \neq 1/3) \wedge (a \neq 5) \text{ el sistema es incompatible}}$

$\boxed{\text{Cuando } (a = 1/3) \vee (a = 5) \,,\; 2a-9 \neq 0, \text{ y el sistema es compatible determinado}}$

b.

Resolución para $a = 1/3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -25/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$-\frac{25}{3}x = 1 \; ; \; x = -\frac{3}{25}$

$2y+3x=3 \; ; \; y = \frac{3-3x}{2} = \frac{3-3\left(-\frac{3}{25}\right)}{2} = \frac{42}{25}$

$z+y=3 \; ; \; z = 3-y = 3-\frac{42}{25} = \frac{33}{25}$

$\boxed{x = -\frac{3}{25} \,,\; y = \frac{42}{25} \,,\; z = \frac{33}{25}}$

Resolución para $a = 5$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x = 1$

$2y+3x=3 \; ; \; y = \frac{3-3x}{2} = \frac{3-3\cdot 1}{2} = 0$

$z+y=3 \; ; \; z = 3-y = 3-0 = 3$

$\boxed{x = 1 \,,\; y = 0 \,,\; z = 3}$

23 $x$ : precio en euros de un pantalón en temporada
6839 $y$ : precio en euros de una camisa en temporada
$z$ : precio en euros de un abrigo en temporada

$$\begin{cases} x+y+z=360 \\ 0{,}9x+0{,}8y=137 \\ 0{,}8x+0{,}7z=212 \end{cases} ; \begin{cases} x+y+z=360 \\ 9x+8y=1370 \\ 8x+7z=2120 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 360 \\ 9 & 8 & 0 & 1370 \\ 8 & 0 & 7 & 2120 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Gauss}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 360 \\ 0 & -1 & -9 & -1870 \\ 0 & -8 & -1 & -760 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 360 \\ 0 & 1 & 9 & 1870 \\ 0 & 0 & 71 & 14200 \end{array}\right)$$

$71z = 14200$ ; $z = 200$

$y + 9z = 1870$ ; $y = 1870 - 9 \cdot 200 = 70$

$x + y + z = 360$ ; $x = 360 - 70 - 200 = 90$

En resumen $\boxed{\begin{cases} x = 90 \text{ € el pantalón} \\ y = 70 \text{ € la camisa} \\ z = 200 \text{ € el abrigo} \end{cases}}$

24
7470

a.

$$\begin{aligned} x+y+mz&=m \\ mx+(m-1)y+z&=2 \\ x+y+z&=1 \end{aligned}$$

$$A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} m \\ 2 \\ 1 \end{array}\right.\right) ; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & m-1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \text{ por lo que rango } A \geq 2$$

$$|A| = m-1 : \begin{cases} \neq 0 \text{ si } m \neq 1 : \text{ rango } A = \text{rango } A' = 3 \\ = 0 \text{ si } m = 1 : \text{ rango } A = 2 \end{cases}$$

Por tanto, $\boxed{\text{si } m \neq 1 \text{ el sistema es compatible determinado}}$

Si $m = 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ por lo que rango } A = \text{rango } A' = 2$$

Por tanto, $\boxed{\text{si } m = 1 \text{ el sistema es compatible indeterminado}}$

b.

Resolución para $m = 1$

Eliminando la tercera fila/ecuación, haciendo $z = \lambda$ y pasando estas incógnitas al segundo miembro (recuerde aquel menor que proporcionó el rango), resulta:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{array}\right)$$

$y = 2 - \lambda$

$x + y = 1 - \lambda$ ; $x = 1 - \lambda - y = 1 - \lambda - (2 - \lambda) = -1$

En resumen $\boxed{\begin{cases} x = -1 \\ y = 2-\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$ , $\lambda \in \mathbb{R}$

c.

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Gauss}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que $\boxed{\text{rango}\,(C \cdot D) = 1}$

25
7569

a.

$$\begin{pmatrix} 2 & b & 0 \\ -1 & 0 & b \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \ M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & b & 0 \\ -1 & 0 & b \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{matrix}}_{M} \left| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right.\right) \ ; \ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \ : \ \text{rango } M \geq 2$$

$$|M'| = b^2 - 4 = (b+2)(b-2) \ : \ \begin{cases} \neq 0 \quad \text{si} \quad (b \neq -2) \wedge (b \neq 2) & : \ \text{rango } M' = 4 \neq 3 = \text{rango } M \\ = 0 \quad \text{si} \quad (b = -2) \wedge (b = 2) & : \ \text{rango } M' \leq 3 \end{cases}$$

Por tanto, $\boxed{\text{cuando } \ (b \neq -2) \wedge (b \neq 2) \ \text{ el sistema es incompatible}}$

Caso $b = -2$

$$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{matrix}}_{M} \left| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right.\right) \ ; \ \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \ : \ \text{rango } M = \text{rango } M' = 3$$

Por tanto, $\boxed{\text{cuando } \ b = -2 \ \text{ el sistema es compatible determinado}}$

Caso $b = 2$

$$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{matrix}}_{M} \left| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right.\right) \ ; \ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \ : \ \text{rango } M = \text{rango } M' = 3$$

Por tanto, $\boxed{\text{cuando } \ b = 2 \ \text{ el sistema es compatible determinado}}$

b.

Resolución para $b = -2$

Partiendo del menor que proporcionó el rango, resulta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Gauss}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} 4z = 0 \ ; \ z = 0 \\ y + 2z = -1 \ ; \ y = -1 - 2z = -1 - 2 \cdot 0 = -1 \\ -x - 3z = 1 \ ; \ x = -1 - 3z = -1 - 3 \cdot 0 = -1 \end{array} \right\} \boxed{(x, y, z) = (-1, -1, 0)}$$

26
7736

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix}$$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 6$. Cálculo de la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_{ij}]{} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{\det} \cdot \text{trasp}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 11/3 & 7/3 \end{pmatrix}}$$

$|X| = 4$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 11/3 & 7/3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\alpha_{ij}]{} \begin{pmatrix} 7 & 14/3 & -23/3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_{ij}]{} \begin{pmatrix} 7 & -14/3 & -23/3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{|X|} \cdot \text{trasp}]{}$$

$$\rightarrow \boxed{X^{-1} = \begin{pmatrix} 7/4 & -1/4 & -3/4 \\ -7/6 & 1/2 & 1/2 \\ -23/12 & -1/4 & 5/4 \end{pmatrix}}$$

27
7813

a.

$x:$ honorarios actor (euros por día)

$y:$ honorarios actriz (euros por día)

$z:$ honorarios intérprete infantil (euros por día)

$$\boxed{\begin{cases} 2x+y+tz=17 \\ 4x+4y+(3t-2)\,z=40 \\ 2x+3y+(2t-1)\,z=27 \end{cases}}$$

b.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & t & 17 \\ 4 & 4 & 3t-2 & 40 \\ 2 & 3 & 2t-1 & 27 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Gauss}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & t & 17 \\ 0 & 2 & t-2 & 6 \\ 0 & 2 & t-1 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & t & 17 \\ 0 & 2 & t-2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$z=4$

$2y+(t-2)\,z=6\ ;\ y=\frac{6-(t-2)z}{2}=\frac{6-(t-2)4}{2}=7-2t$

$2x+y+tz=17\ ;\ x=\frac{17-y-tz}{2}=\frac{17-7+2t-4t}{2}=5-t$

En resumen $\boxed{(x,y,z)=(5-t,\,7-2t,\,4)}$

c.

$5-t=7-2t\ ;\ t=2\ ;$ $\boxed{\text{2 intérpretes infantiles para la película uno}}$

$3t-2=3\cdot 2-2\ ;\ t=4\ ;$ $\boxed{\text{4 intérpretes infantiles para la película dos}}$

$2t-1=2\cdot 2-1\ ;\ t=3\ ;$ $\boxed{\text{3 intérpretes infantiles para la película tres}}$

28

8849

$$A=\begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$$

$X^{\mathrm{t}}A=B^{\mathrm{t}}$

$(X^{\mathrm{t}}A)^{\mathrm{t}}=(B^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}\ ;\ A^{\mathrm{t}}X=B$ (forma matricial del sistema de ecuaciones)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-m & 1 & m & 2m^2-1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 2m-1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\ ;\ |A^{\mathrm{t}}|=-2m^3+6m-4=-2\,(m+2)\,(m-1)^2$$

Por tanto, $\boxed{\text{cuando } (m\neq -2)\wedge(m\neq 1),\ |A^{\mathrm{t}}|\neq 0 \text{ y el sistema es compatible determinado}}$

Caso $m=-2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\ ;\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-1\neq 0,\ \text{rango } A^{\mathrm{t}}=2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & -2 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-54\neq 0,\ \text{rango } (A^{\mathrm{t}}|B)=3$$

Por tanto, $\boxed{\text{cuando } m=-2 \text{ el sistema es incompatible}}$

Caso $m=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\ ;\ \text{rango } A^{\mathrm{t}}=\text{rango } (A^{\mathrm{t}}|B)=1$$

Por tanto, $\boxed{\text{cuando } m=1 \text{ el sistema es compatible indeterminado}}$

29

9036

a.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-4z=0 \\ 3x+ay+2z=2 \end{cases}$$

$$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & a & 2 \end{matrix}}_{M}\left|\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right.\right) \ ; \ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \ \text{ por lo que } \ \text{rango } A \geq 2$$

$$|M| = 6a-19 = 6\left(a-\tfrac{19}{6}\right) \ : \ \begin{cases} \neq 0 \quad \text{si} \quad a \neq \tfrac{19}{6} & : \ \text{rango } A = \text{rango } A' = 3 \\ = 0 \quad \text{si} \quad a = \tfrac{19}{6} & : \ \text{rango } A = 2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \ \text{ por lo que } \ \text{rango } A' = 3$$

En resumen $\boxed{\begin{cases} \text{si} \quad a \neq \tfrac{19}{6} & : \ \text{sistema compatible determinado} \\ \text{si} \quad a = \tfrac{19}{6} & : \ \text{sistema incompatible} \end{cases}}$

b.

Resolución para $a=-1$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right.\right) \underset{\text{Gauss}}{\longrightarrow} \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & -4 & -1 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{matrix}\right.\right) \rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -25 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 2 \\ -4 \\ -20 \end{matrix}\right.\right)$$

$-25z=-20 \ ; \ z=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$

$y-6z=-4 \ ; \ y=-4+6z=-4+6\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$

$x+y+z=2 \ ; \ x=2-y-z=2-\frac{4}{5}-\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$

En resumen $\boxed{(x,y,z)=\left(\frac{2}{5}, \ -\frac{4}{5}, \ \frac{4}{5}\right)}$

30
9044

a.

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y+mz=4 \end{cases}$$

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix}\right.\right) \ ; \ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \ \text{ por lo que } \ \text{rango } A = \text{rango } A' = 2$$

$\boxed{\text{El sistema es siempre compatible indeterminado}}$

b.

Resolución para $m=1$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix}\right.\right) \underset{\text{Gauss}}{\longrightarrow} \left(\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}\right.\right) \xrightarrow[\substack{z=\lambda \text{ al segundo} \\ \text{miembro}}]{} \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 1+\lambda \\ 2-3\lambda \end{matrix}\right.\right)$$

$-y=2-3\lambda \ ; \ y=-2+3\lambda$

$x+y=1+\lambda \ ; \ x=1+\lambda-y=1+\lambda-(-2+3\lambda)=3-2\lambda$

En resumen $\boxed{(x,y,z)=(3-2\lambda, \ -2+3\lambda, \ \lambda)}$ ; $\lambda \in \mathbb{R}$

31
9145