Sistemas de ecuaciones

IES O Couto

curso 2019-2020

Ecuación lineal de n incógnitas

Definición

- Una **ecuación lineal** con n incógnitas x_1, x_2, x_3,...,x_n es una expresión de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \quad \text{con } a_1,\ a_2, \ldots, a_n,\ b \in \mathbb{R}$$

- Una **solución de la ecuación** es una n-tupla de números reales $(\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ que satisfacen la igualdad. Es decir, tales que:

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n = b$$

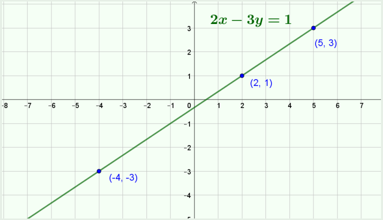
Una ecuación lineal tiene infinitas soluciones.

Interpretación geométrica del concepto de ecuación lineal

Ecuaciones con dos incógnitas

Las soluciones de la ecuación $a_1x + a_2y = b$ pueden representarse en el plano cartesiano, obteniéndose una recta.
Por tanto, una ecuación lineal con dos incógnitas puede identificarse con una recta del plano. Toda solución de la ecuación es un punto de dicha recta, y recíprocamente.

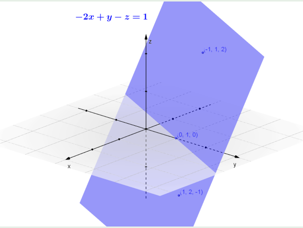
Los pares de valores $(-4, -3)$, $(5, 3)$ y $(2, 1)$ son algunas de las soluciones de la ecuación $2x - 3y = 1$



Ecuaciones con tres incógnitas

Las soluciones de la ecuación $a_1x + a_2y + a_3z = b$ pueden representarse en el espacio cartesiano, obteniéndose un plano.
Por tanto, una ecuación lineal con tres incógnitas puede identificarse con un plano en el espacio euclídeo. Toda solución de la ecuación es un punto de dicho plano, y recíprocamente.

Las ternas $(-1, 1, 2)$, $(1, 2, -1)$ y $(0, 1, 0)$ son algunas de las soluciones de la ecuación $-2x + y - z = 1$



Definición de sistema lineal

Definición

- Un **sistema lineal de m ecuaciones y n incógnitas** es un conjunto de m ecuaciones con las n incógnitas x_1, x_2, ... x_n:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

  Los coeficientes a_{ij} y b_i son números reales.

- Una **solución del sistema** es una n-tupla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ que verifica todas las ecuaciones del sistema.

Clasificación de sistemas lineales

Resolver un sistema lineal es determinar la existencia y el número de soluciones. Los sistemas lineales se clasifican según el número de soluciones.

Sistemas Compatibles

Son sistemas que tienen solución.

- **Sistemas Compatibles Determinados** : Son sistemas que tienen solución única.
- **Sistemas Compatibles Indeterminados** : Son sistemas que tienen una cantidad infinita de soluciones.

Sistemas Incompatibles

- Los sistemas que no tienen solución se llaman **Sistemas Incompatibles** .

Interpretación geométrica de un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas

Cada ecuación del sistema es una recta en el plano. Teniendo en cuenta las distintas posiciones relativas de dos rectas en el plano euclídeo, pueden darse los siguientes casos:

- Sistema Compatible Determinado: Las ecuaciones del sistema corresponden a dos rectas secantes, y la solución es el punto de corte de ambas rectas.
- Sistema Compatible Indeterminado: Las ecuaciones del sistema corresponden a dos rectas coincidentes. La solución es el conjunto de puntos de la recta.
- Sistema Incompatible: Las ecuaciones del sistema corresponden a dos rectas paralelas, que por tanto, no tienen puntos en común, y por eso, el sistema no tiene solución.

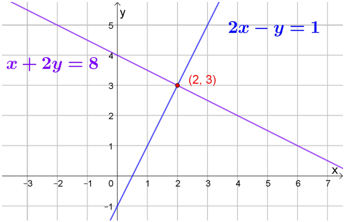


Figura: Sist. Compatible Determinado

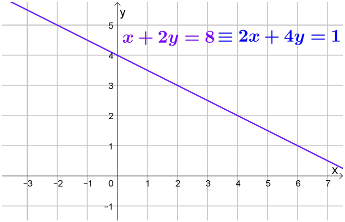


Figura: Sist. Compatible Indeterminado

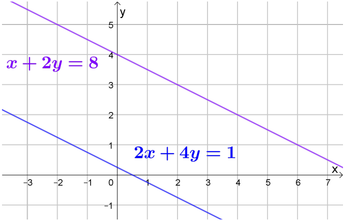


Figura: Sist. Incompatible

Interpretación geométrica de un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas

Cada ecuación del sistema es un plano del espacio afín euclídeo. Teniendo en cuenta las distintas posiciones relativas de tres planos en el espacio, pueden darse las distintas situaciones:

a) Sistema Compatible Determinado: Las ecuaciones del sistema corresponden a tres planos que se intersecan en un único punto.

b) Sistema Compatible Indeterminado:
- Caso 1: Los tres planos se intersecan en una única recta, cuyos puntos son la solución del sistema.
- Caso 2: Los tres planos son coincidentes, y los puntos de dicho plano son la solución del sistema.
- Caso 3: Dos de los planos son coincidentes, y el tercero se interseca con ellos en una recta, cuyos puntos son la solución del sistema.

c) Sistema Incompatible:
- Caso 1: Dos de los planos son paralelos, y el tercero o es también paralelo, o coincidente con uno de ellos, o secante a ambos. En cualquier caso, no existen puntos que pertenezcan a los tres planos a la vez (que verifiquen simultáneamente todas las tres ecuaciones del sistema)
- Caso 2: Los planos se intersecan dos a dos en tres rectas distintas. Tampoco existen puntos que pertenezcan a todos los planos.

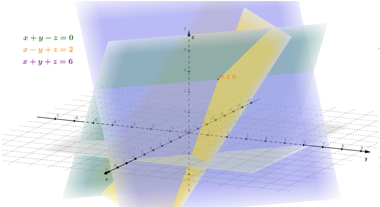


Figura: Sist. Compatible Determinado

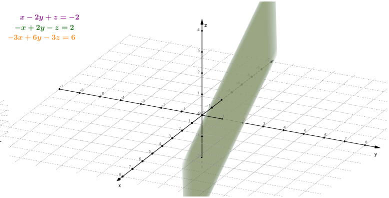


Figura: Sist. Compatible Indeterminado

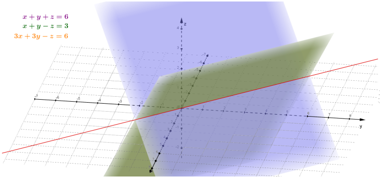


Figura: Sist. Compatible Indeterminado

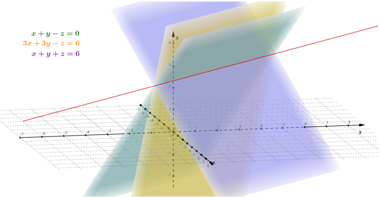


Figura: Sist. Compatible Indeterminado

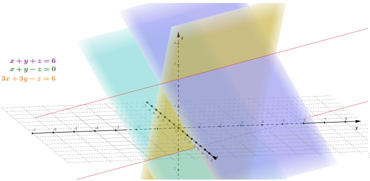


Figura: Sistema Incompatible

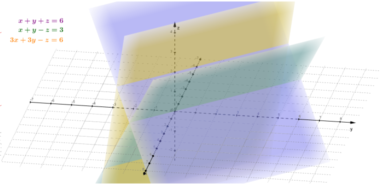


Figura: Sistema Incompatible

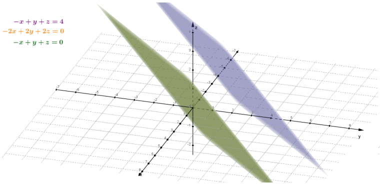


Figura: Sistema Incompatible

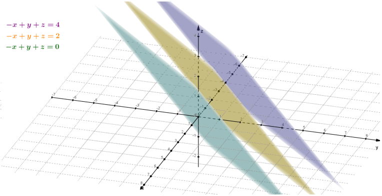


Figura: Sistema Incompatible

Expresión matricial de un sistema

El sistema lineal de m ecuaciones y n incógnitas

$$\left\{\begin{array}{lcr} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

puede expresarse matricialmente de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

O equivalentemente:

$$A \cdot X = B$$

$$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$$

- La matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ se llama **matriz de coeficientes**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- La matriz $A^* \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}(\mathbb{R})$, formada al añadirle a A la columa B es la **matriz ampliada** del sistema:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Método de reducción de Gauss

El **método de Gauss** consiste en efectuar transformaciones elementales en las ecuaciones del sistema con la finalidad de obtener un sistema equivalente (con las mismas soluciones), en el que las ecuaciones sean más sencillas.
Si se utiliza la expresión matricial de un sistema, cada una de las ecuaciones del mismo se corresponde con una fila de la matriz ampliada del sistema, A^*, por tanto, para resolver un sistema dado en forma matricial, habrá que efectuar transformaciones elementales en las filas de A^*

Transformaciones elementales de ecuaciones de un sistema (o filas de A^*)

Son transformaciones elementales las siguientes:

- Cambiar el orden de las filas de la matriz A^*
- Multiplicar una fila de A^* por un escalar no nulo.
- Sumar a una fila una combinación lineal de otras filas de A^*.

Ejercicio 1

Resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & + & 4z & = & 2 \\ x & + & 2y & - & z & = & 5 \\ x & + & 8y & + & 5z & = & 1 \end{array}\right.$$

La expresión matricial del sistema es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz ampliada, A^*, resulta:

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que escalonar la matriz A^*.

$$\left(\begin{array}{rrrr} -1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 8 & 5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+F_1\to F_3]{F_2+F_1\to F_2} \left(\begin{array}{rrrr} -1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 9 & 9 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-3F_2\to F_3}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr} -1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{r} 2 \\ 7 \\ -18 \end{array}\right)$$

Es decir:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & + & 4z & = & 1 \\ & & 3y & + & 3z & = & 7 \\ & & & & 0z & = & 18 \end{array}\right. \Longrightarrow \text{¡¡}0z = 18\text{!!} \Longrightarrow \text{Sist. Incompatible}$$

Ejercicio 2

Resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 2 \\ -x & - & 2y & + & 3z & = & 3 \\ -x & - & 5y & + & 8z & = & 11 \end{array}\right.$$

La expresión matricial del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

La matriz ampliada, A^*, es:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 3 \\ -1 & -5 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

Hay que escalonar A^*.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 3 \\ -1 & -5 & 8 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1+2F_2\to F_2]{F_3-F_2\to F_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 8 \\ 0 & -3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2\to F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x+y-z & = & 2 \\ -3y+5z & = & 8 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{8+3y}{5} \\ \\ x = \frac{2-y+z}{2} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{8+3y}{5} \\ \\ x = \frac{9+y}{5} \end{array} \right.$$

Es decir, las soluciones son las ternas $\left(\frac{9+y}{5}, y, \frac{8+3y}{5}\right)$, con $y \in \mathbb{R}$. Por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Ejercicio 3

Resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \\ 2x & - & y & - & 4z & = & -2 \\ x & + & 3y & - & 2z & = & 1 \end{array}\right.$$

La expresión matricial del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz ampliada, A^*, resulta:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hay que escalonar A^*.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1\to F_3]{F_2-2F_1\to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{5F_3+F_2\to F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x+2y-3z & = & 1 \\ -5y+2z & = & -4 \\ 7z & = & -4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z=-\frac{4}{7} \\ -5y+2\left(-\frac{4}{7}\right)=-4 \Longrightarrow y=\frac{4}{7} \\ x+2\cdot\frac{4}{7}-3\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)=1 \Longrightarrow x=-\frac{13}{7} \end{array} \right.$$

Es decir, el sistema es compatible determinado, con solución $\left(-\frac{13}{7}, \frac{4}{7}, -\frac{4}{7}\right)$.

En lugar de triangularizar A, podríamos haber continuado efectuando transformaciones elementales en A^* hasta convertir a la matriz A en la matriz identidad. A esta variante del método de reducción se la conoce como Método de Gauss-Jordan.
En este caso, el ejercicio sería así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1\to F_3]{F_2-2F_1\to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{5F_3+F_2\to F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_2+5F_1\to F_1} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -11 & -3 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[-7F_2+2F_3\to F_2]{11F_3+7F_1\to F_1}$$

$$\begin{pmatrix} 35 & 0 & 0 & -65 \\ 0 & 35 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{35}F_2\to F_2]{\substack{\frac{1}{35}F_1\to F_1 \\ \frac{1}{7}F_3\to F_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{65}{35} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{20}{35} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{7} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{65}{35} \\ \frac{20}{35} \\ -\frac{4}{7} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = -\frac{65}{30} = -\frac{13}{7} \\ y = \frac{20}{35} = \frac{4}{7} \\ z = -\frac{4}{7} \end{cases}$$

Método de Gauss-Jordan. Aplicación al cálculo de una matriz inversa

Dada una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, su matriz inversa es la matriz $X = (x_{ij})_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A \cdot X = X \cdot A = I$.
Es decir, tendríamos que resolver la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Este problema equivale a resolver los n sistemas lineales siguientes:

$$A \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, A \cdot X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, A \cdot X_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde X_k es la columna k-ésima de la matriz X.

El método de **Gauss-Jordan** consiste en resolver todos estos sistemas a la vez, efectuando transformaciones elementales en las filas de la matriz $(A|I)$ (sin cambios de orden), hasta convertir la matriz A en la matriz identidad.

Ejercicio 4

Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

Utilizaremos el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 - F_1 \to F_4]{\substack{F_2 - 2F_1 \to F_1 \\ F_3 - F_1 \to F_3}}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[3F_3 - 2F_2 \to F_3]{F_4 - 2F_3 \to F_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -9 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-9F_4+F_3\to F_3]{3F_4+F_2\to F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 & -2 & 21 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2-F_3\to F_2]{2F_1+F_3\to F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -4 & 0 & 0 & -6 & -2 & 21 & -9 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 9 & 3 & -27 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 & -2 & 21 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_1+4F_2\to F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 18 & 6 & -45 & 21 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 9 & 3 & -27 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 & -2 & 21 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}F_3 \to F_3 \\ -F_4 \to F_4}]{\substack{\frac{1}{6}F_1 \to F_1 \\ \frac{1}{3}F_2 \to F_2}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -\frac{15}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & \frac{21}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Por tanto:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{15}{2} & \frac{7}{2} \\ 3 & 1 & -9 & 4 \\ -4 & -1 & \frac{21}{2} & -\frac{9}{2} \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Expresión vectorial de un sistema lineal

Sea el sistema de m ecuaciones y n incógnitas dado en forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Denotando por A_1, $A_2, \dots, A_n$ a las n columnas de A, obtenemos la expresión en **forma vectorial** del sistema:

$$x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + \dots + x_n \cdot A_n = B$$

De esta forma, resolver el sistema $AX = B$ equivale a buscar los escalares x_1, $x_2, \dots, x_n$ que permitan expresar el vector de los términos independientes, B, como combinación lineal de los vectores A_1, A_2, $\dots$, A_n.

- Sistemas compatibles: Son aquellos para los cuales B puede expresarse como combinación lineal de $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Es decir, aquellos para los que se verifica:

$$rang(A) = rang(A^*)$$

  - Si $rang(A) = n$, entonces dicha combinación lineal es única, y el sistema es compatible determinado.
  - Si $rang(A) = r < n$, la combinación lineal no será única, y el sistema será compatible indeterminado.

- Sistemas incompatibles: Son aquellos para los cuales B no puede expresarse como combinación lineal de $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Es decir:

$$rang(A^*) = rang(A) + 1$$

Estas consideraciones permiten enunciar el Teorema de Rouché-Fröbenius,

Teorema de Rouché-Fröbenius

Teorema de Rouché-Fröbenius

Sea el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es la matriz de coeficientes, y $A^* = (A|B) \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}(\mathbb{R})$ es la matriz ampliada del sistema, entonces:

I) El sistema es compatible determinado si y sólo si $rango(A) = rango(A^*) = n$

II) El sistema es compatible indeterminado si y sólo si $rango(A) = rango(A^*) = r < n$

III) El sistema es incompatible si y sólo si $rango(A) < rango(A^*)$

Sistemas homogéneos

Sistema homogéneo

Un **sistema** es **homogéneo** cuando todos los términos independientes de las ecuaciones son nulos. Es decir, cuando su expresión es

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right.$$

Compatibilidad de un sistema homogéneo

Por el Teorema de Rouché-Fröbenius:

I) Un sistema homogéneo siempre es compatible, pues obviamente $rango(A) = rango(A^*)$. (Además, siempre tendrá como mínimo la solución trivial $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$)

II) Un sistema homogéneo es compatible determinado si y sólo si $rango(A) = n$. Si $rango(A) < n$, es compatible indeterminado.

Sistemas de n ecuaciones y n incógnitas

Supongamos que tenemos un sistema de n ecuaciones y n incógnitas dado en forma matricial $A \cdot X = B$:

- En virtud del Teorema de Rouché-Fröbenius, para que el sistema sea compatible determinado es necesario y suficiente que $rango(A) = rango(A^*) = n$.
- Por otra parte, si $rango(A) = n$ entonces A es una matriz regular, y podemos encontrar la solución del sistema resolviendo la ecuación matricial $AX = B$.
  Es decir:

$$A \cdot X = B \implies A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies X = A^{-1} \cdot B$$

Dado que $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, se tiene:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Es decir, $\forall\, k \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$x_k = \frac{b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + b_3 A_{3k} + \dots + b_n A_{nk}}{|A|}$$

El numerador de la anterior expresión equivale a calcular el determinante de la matriz A sustituyendo su columna k-ésima por la columna de los términos independientes. A esta fórmula se la conoce como la **Regla de Cramer**.

Regla de Cramer

Regla de Cramer

Dado el sistema compatible determinado de n ecuaciones y n incógnitas

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right.$$

Se cumple $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$x_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\,k-1} & b_1 & a_{1\,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\,k-1} & b_2 & a_{2\,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n\,k-1} & b_n & a_{n\,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

Ejercicio 5

Resolver por la regla de Cramer el sistema $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & z & = & 7 \\ x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & - & z & = & 2 \end{array}\right.$

1. Comprobamos que el sistema es compatible determinado:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \implies rango(A) = rango(A^*) = 3$$

2. Por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{5}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = -\frac{7}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = -\frac{8}{2} = -4$$

Ejercicio 6

Discute y resuelve el sistema siguiente en caso de que sea compatible.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 4z & = & 2 \\ x & + & 3y & - & z & = & -3 \\ 5x & + & 8y & + & z & = & -7 \end{array}\right.$$

La matriz del sistema, y la matriz ampliada son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 8 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

1. Estudiamos el rango de A:

$$|A| = 0 \implies rango(A) < 3$$

Como $M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \implies |A| = 2$

2. Estudiamos el rango de A^*: Como en A el menor M_{33} es no nulo, las dos primeras columnas de A son linealmente independientes. Veamos si la última columna de A^* es linealmente dependiente de ellas o no:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 5 & 8 & -7 \end{vmatrix} = 0 \implies rango(A^*) = rango(A) = 2 < 3$$

Por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

3. Como el rango de A es dos, el número de filas linealmente independientes de A también es dos. Y como $M_{33} \neq 0$, sabemos que las dos primeras filas son linealmente independientes, y la tercera linealmente dependiente de ambas, con lo cual, podemos prescindir de ella.
Para resolver el sistema por Cramer, lo reescribimos así:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & = & 2 & - & 4z \\ x & + & 3y & = & -3 & + & z \end{array} \right.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-4z & -1 \\ -3+z & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3-11z}{7}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2-4z \\ 1 & -3+z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-8+6z}{7}$$

Por tanto, las soluciones son las ternas de la forma $\left(\frac{3-11z}{7}, \frac{-8+6z}{7}, z\right)$

Ejercicio 7

(Junio 2019. Opción B)
Da respuesta a los apartados siguientes:

a) *Discute, según los valores de m, el sistema:*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ & & my & + & (3-m)z & = & -6 \\ 2x & - & y & + & mz & = & 6 \end{array}\right.$$

b) *Resuélvelo, si es posible, en los casos $m = 0$ y $m = 4$.*

a) La matriz del sistema y la matriz ampliada son respectivamente A y A^*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & m & 3-m & -6 \\ 2 & -1 & m & 6 \end{pmatrix}$$

1. Comprobamos para qué valores de m el rango de A es máximo (en este caso, 3):
   - Sabemos que $rango(A) = 3 \iff |A| \neq 0$
   - Como $|A| = (-1)^{2+2} m \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m(2m-6) = 0 \iff m = 0 \ \text{o} \ m = 3$,

   el sistema será compatible determinado $\forall m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$
2. Si $m = 0$:
   - $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \implies M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies$
     $\implies rango(A) = 2$
   - $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Como en A las columnas segunda y tercera son linealmente independientes ($M_{31} \neq 0$), para comprobar si el rango de A^* es 3 es suficiente calcular el determinante $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$.

     Por tanto $rango(A^*) = rango(A) = 2$. Es decir, el sistema es compatible indeterminado

3. Si $m = 3$:
   - $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Longrightarrow$
     $\Longrightarrow \mathit{rango}(A) = 2$
   - $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Como en A las columnas primera y segunda son linealmente independientes ($M_{33} \neq 0$), para comprobar si el rango de A^* es 3 es suficiente calcular el determinante $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 36 \neq 0$.

     Por tanto $\mathit{rango}(A^*) = 3 > \mathit{rango}(A) = 2$. Es decir, el sistema es incompatible.

b) - Si $m = 0$ el sistema es compatible indeterminado. En la matriz A^* las filas primera y segunda, y las columnas primera y tercera son linealmente independientes. Reescribimos el sistema como

$$\begin{cases} 2x + 3z = y \\ 3z = -6 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\begin{cases} z = -2 \\ \\ x = \dfrac{y+6}{2} \end{cases}$$

Las soluciones son las ternas $\left(\dfrac{y+6}{2}, y, -2\right)$

- Si $m = 4$ el sistema es compatible determinado, con A^*:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -6 \\ 2 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Utilizando la regla de Cramer, como $|A| = m(2m-6) = 8$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -6 & 4 & -1 \\ 6 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{8} = -\frac{72}{8} = -9$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & -1 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix}}{8} = \frac{0}{8} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix}}{8} = \frac{48}{8} = 6$$

Por tanto, la solución es $(-9, 0, 6)$