Proyecto MaTEX

Resolución de Sistemas Lineales

Fco Javier González Ortiz

Directorio

- Tabla de Contenido
- Inicio Artículo

10 de junio de 2004

Versin 1.00

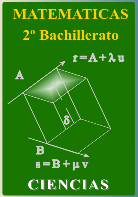

Tabla de Contenido

1. Introducción

En el capítulo Sistemas se vio el método de Gauss para resolver un sistema lineal. Si bien el método de Gauss o eliminación gaussiana nos permite discutir y resolver por reducción, es deseable obtener una expresión algebraica que nos permita expresar las soluciones de un sistema que tenga solución (compatible) en función de los coeficientes y los términos independientes.

El determinante nos ofrece una expresión de la inversa de una matriz cuadrada y de aquí obtendremos la regla de Cramer.

Finalizamos con el teorema de Rouche-Frobeniüs que nos proporciona un resultado genérico de cuando un sistema tiene solución y en este caso, cuando es única o tiene infinitas.

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

2. Resolución de un sistema

2.1. Método de la inversa.

La matriz inversa es útil como notación para expresar la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Sea por ejemplo un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{rl} a_{11}\,x + a_{11}\,y + a_{13}\,z & = b_1 \\ a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z & = b_2 \\ a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z & = b_3 \end{array}\right\}$$

Expresado en forma matricial queda:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \equiv A \cdot \widetilde{x} = \widetilde{b}$$

Si A es regular y tiene inversa A^{-1}, multiplicando la ecuación anterior por la izquierda, se tiene que, $A^{-1} \cdot A \cdot \widetilde{x} = A^{-1} \cdot \widetilde{b}$ y

$$\boxed{\widetilde{x} = A^{-1} \cdot \widetilde{b}} \tag{1}$$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 2.1. Resolver el sistema calculando la inversa

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & - & z & = & -4 \\ -4x & + & y & - & z & = & -5 \\ 2x & & & + & z & = & 5 \end{array}\right\}$$

Solución:
Expresamos el sistema en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \equiv A \cdot \widetilde{x} = \widetilde{b}$$

Como $Det(A) = 1 \neq 0$, existe la inversa de A :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

luego

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

□

2.2. Regla de Cramer

Si sustituimos en la ecuación (1), A^{-1} por su expresión mediante la matriz adjunta se obtiene

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \cdots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

y para todo i,

$$x_i = \frac{b_1\, A_{1i} + b_1\, A_{2i} + \cdots + b_n\, A_{ni}}{|A|}$$

que se puede expresar como el determinante de la matriz A cambiando la columna $i-$ésima por los términos independientes, es decir

$$\boxed{x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & b_i & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \qquad 1 \le i \le n} \tag{2}$$

MATEMATICAS
2º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
SISTEMAS
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 2.2. Resolver por la regla de Cramer el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x - y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Solución: La regla de Cramer nos da:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-3} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-3} = 1$$

□

Ejemplo 2.3. Resolver por la regla de Cramer el sistema

$$\left.\begin{aligned} 3x - y + z &= 7 \\ x + 3y - 2z &= 0 \\ 2x + 2y - z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Solución: En primer lugar comprobamos que hay inversa

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{5}{2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{7}{2}$$

Doc Doc
Volver Cerrar

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{2} = -4$$

□

Ejercicio 1. Aplica la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

.

Ejercicio 2. Aplica la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} ax + y &= 1 \\ x + y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

.

Ejercicio 3. ¿Se puede resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ 3x + 2y - 8z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

aplicando la regla de Cramer?

3. Teorema de Rouche-Frobenius

Teorema 3.1. Sea el sistema de m ecuaciones con n incógnitas

$$\begin{array}{cccccccc} a_{11}\,x_1 & +a_{12}\,x_2 & +a_{13}\,x_3 & \cdots & +a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & +a_{22}\,x_2 & +a_{23}\,x_3 & \cdots & +a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & = & \cdots \\ a_{m1}\,x_1 & +a_{m2}\,x_2 & +a_{m3}\,x_3 & \cdots & +a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array} \tag{3}$$

se demuestra que el sistema tiene solución cuando el rango de la matriz A de los coeficientes es el mismo que el rango de la matriz ampliada AM con los términos independientes.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Un sistema es compatible} \iff r(A)=r(AM) \\[1em] \begin{array}{cc} \begin{array}{c}\textsc{Compatible}\\ r(A)=r(AM)\end{array} & \left\{\begin{array}{c}\textsc{Determinado}\\ r(A)=r(AM)=n \\[1em] \textsc{Indeterminado}\\ r(A)=r(AM)=r<n\end{array}\right. \\[1em] \begin{array}{c}\textsc{Incompatible}\\ r(A)<r(AM)\end{array} & \end{array} \end{array}}$$

Test. Todo sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas tiene solución

(a) Verdadero (b) Falso

Test. Es posible encontrar un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que tenga solución única.

(a) Verdadero (b) Falso

Test. Es posible encontrar un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas que tenga solución única.

(a) Verdadero (b) Falso

Ejercicio 4. Analiza las siguientes cuestiones:

a) Poner un ejemplo de sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que sea incompatible.

b) Poner un ejemplo de sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que tenga infinitas soluciones.

c) El rango de la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es 1. ¿Qué rango puede tener como máximo la matriz ampliada?.

d) Si el rango de la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es 2, ¿puede ser compatible el sistema? ¿Puede ser compatible y determinado? ¿Puede ser incompatible? Razonar con ejemplos concretos.

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 5. Un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, ¿puede ser compatible y determinado ? En caso afirmativo, dar un ejemplo.

Ejercicio 6. Discutir el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} x + 2y + z & = 2 \\ 2x - y + 3z & = 2 \\ 5x - y + az & = 6 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 7. Discutir el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} a^2x + a^3y + az & = 1 \\ x + a^2y + z & = 0 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 8. Discutir y resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} 2x + y - z & = a - 4 \\ (a-6)y + 3z & = 0 \\ (a+1)x + 2y & = 3 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 9. Discutir en función de a el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} a^2x + 3y + 2z & = 0 \\ ax - y + z & = 0 \\ 8x + y + 4z & = 0 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 10. Discutir y resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} x - y & = a \\ x + a^2 z & = 2a + 1 \\ x - y + (a^2 - a)z & = 2a \end{array}\right\}$$

Ejercicio 11. Discutir y resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} ax + y + bz & = 1 \\ x + ay + z & = 0 \\ x + y + b\,z & = 1 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 12. Discutir y resolver en función del parámetro k:

$$\left.\begin{array}{rl} x + y + z & = 1 \\ 2x - y - z & = 2 \\ kx + y + 3z & = 4 \\ kx + y - 7z & = 3 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 13. Discutir y resolver en función del parámetro k:

$$\left.\begin{array}{rl} kx + ky - z & = 2 \\ 3x - ky & = 0 \\ 5x + ky & = 0 \\ x + 2z & = 1 \end{array}\right\}$$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 14. Discutir y resolver según los distintos valores de los parámetros a y b:

$$\left.\begin{array}{rl} 2x + y & = 1 \\ a^2x + by & = 2 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 15. Discutir y resolver según los distintos valores de los parámetros a y b:

$$\left.\begin{array}{rl} 2x + y + z & = 3 \\ y - z & = -1 \\ 2x - y + az & = b \end{array}\right\}$$

Ejercicio 16. Discutir y resolver según los distintos valores de los parámetros a y b:

$$\left.\begin{array}{rl} x - y + z & = 2 \\ 2x + 3y - 2z & = -8 \\ 4x + y + az & = b \end{array}\right\}$$

Ejercicio 17. Discutir y resolver según los distintos valores de los parámetros a y b:

$$\left.\begin{array}{rl} 3x - y + 2z & = 1 \\ x + 4y + z & = a \\ 2x - 5y + bz & = -2 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 18. Sea el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rl} x\ cos\ a + y\ sen\ a & = 1 \\ x\ sen\ a - y\ cos\ a & = 1 \end{array}\right.$$

1. Resolverlo, determinando x e y en función de a.
2. Calcular a para que $x + y = 1$.

Ejercicio 19. Discutir y resolver según los distintos valores de los parámetros a y b:

$$\left.\begin{array}{rl} 3x - y + 2z & = 1 \\ x + 4y + z & = a \\ 2x - 5y + bz & = -2 \end{array}\right\}$$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-5}{-5} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-5} = 2$$

Ejercicio 1

Ejercicio 2. Primero determinamos a para que tenga inversa

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1$$

Para $a \neq 1$ el sistema tiene la solución

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{a-1} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{a-1} = \frac{a-1}{a-1} = 1$$

Ejercicio 2

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 3. Pasamos la variable z como secundaria al término independiente

$$\left.\begin{array}{r} x - y = z \\ 3x + 2y = 8z \end{array}\right\}$$

y resolvemos por Cramer el sistema en x e y:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} z & -1 \\ 8z & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{10z}{5} = 2z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 3 & 8z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{5z}{5} = z$$

Ejercicio 3

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Prueba del Teorema 3.1. El sistema se puede escribir como una combinación lineal del vector columna b en función de los vectores columna de la matriz de coeficientes A, es decir

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{4}$$

Escribimos cada vector columna como $\mathbf{c}_i$, quedando la expresión anterior como

$$x_1 \cdot \mathbf{c}_1 + x_2 \cdot \mathbf{c}_2 + \cdots + x_n \cdot \mathbf{c}_n = \mathbf{b} \tag{5}$$

($\Longrightarrow$) Si el sistema tiene solución existe una $n-$tupla $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ que satisface el sistema, y por tanto la ecuación (4), luego el vector b será combinación lineal de los vectores columna de A, y por tanto

$$r(A) = r(AM)$$

($\Longleftarrow$) Recíprocamente. Si $r(A) = r(AM)$, como $AM = (A \,|\, \mathbf{b})$ la columna $\mathbf{b}$ que amplia la matriz A no afecta al rango de A, luego $\mathbf{b}$ es combinación lineal de las columnas de A y existirán escalares $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ que satisfagan la ecuación (4) y por tanto el sistema. Con ello hemos demostrado que

UN SISTEMA ES COMPATIBLE $\Longleftrightarrow r(A) = r(AM)$

◀

Ejercicio 4.

a) Lo más sencillo es dejar la parte lineal de los coeficientes igual y cambiar el término independiente. Por ejemplo

$$\begin{aligned} x+y-z &= 0 \\ x+y-z &= 2 \end{aligned}$$

que implica el absurdo $0 = 2$.

b) Cualquiera que sea compatible. Por ejemplo

$$\begin{aligned} x+y-z &= 0 \\ y-z &= 1 \end{aligned}$$

c) Claramente 1 ó 2.

d) Puede haber dos casos:

- Si el $r(AM) = 2 = rg(A) < 3$ el sistema no puede ser compatible determinado, será compatible indeterminado.
- Si el $rg(AM) = 3 > rg(A)$ sistema incompatible.

Ejercicio 4

Ejercicio 5. Si, cuando $r(A) = r(AM) = n^o$ incógnitas. Veamos un ejemplo. Tomemos $x = 1$ e $y = 2$ y escribamos

$$x + y = 3 \qquad x - y = -1 \qquad 3x + y = 5$$

Ejercicio 5

Ejercicio 6.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & a \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & a \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & a \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -5a + 36 = 0 \quad \Rightarrow a = \frac{36}{5}$$

- Caso $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{36}}{\mathbf{5}}$.

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{1 \quad 2 \quad 1}}^{A}} & \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & \frac{36}{5} & 6 \end{array}\right)}_{AM} \xrightarrow[f_3 - 5\,f_1]{f_2 - 2\,f_1} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -55 & 11 & -20 \end{array}\right)}_{AM}$$

$$\xrightarrow{f_3 - 11\,f_2} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)}_{AM} \Rightarrow \begin{array}{rcl} r(A) & = & 2 \\ r(AM) & = & 3 \end{array} \quad \textbf{S.I.}$$

- Caso $\mathbf{a} \neq \frac{\mathbf{36}}{\mathbf{5}}$, $r(A) = 3 = r(AM)$, **S.C.D.**

Ejercicio 6

MATEMATICAS 2º Bachillerato CIENCIAS MaTEX SISTEMAS
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 7.

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc} \overbrace{\begin{matrix} a^2 & a^3 & a \\ 1 & a^2 & 1 \end{matrix}}^{A} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right)}_{AM}$$

Tomamos un menor de orden 2,

$$\begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ 1 & a^2 \end{vmatrix} = a^4 - a^3 = a^3(a-1) = 0 \qquad \boxed{\text{a=0}} \vee \boxed{\text{a=1}}$$

- Caso $\mathbf{a = 0}$.

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc} \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}}^{A} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right)}_{AM} \Rightarrow \begin{array}{rcl} r(A) & = & 1 \\ r(AM) & = & 2 \end{array} \quad \textbf{S.I.}$$

- Caso $\mathbf{a = 1}$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}}^{A} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right)}_{AM} \equiv \underbrace{\left(\begin{array}{cccc} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}^{A} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \end{array}\right)}_{AM} \Rightarrow \begin{array}{c} r(A) = 1 \\ r(AM) = 2 \\ \textbf{S.I.} \end{array}$$

- Caso $\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \wedge \mathbf{1}$, $r(A) = 2 = r(AM)$, **S.C.D.**

Ejercicio 7

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 8.

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc}\overbrace{\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -1 \\ 0 & a-6 & 3 \\ a+1 & 2 & 0\end{array}}^{A} & \begin{array}{c} a-4 \\ 0 \\ 3\end{array}\end{array}\right)}_{AM}$$

Hallamos $|A| = a^2 - 2a - 15$ que se anula para $a = 5 \vee a = -3$. Discutimos:

- $a = 5$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-3\,f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3-f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} r(A) = 2 = r(AM) \\ \textbf{S.C.I.} \end{array}$$

El sistema resulta:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x + y - z & = & 1 \\ -y + 3z & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcr} x & = & 1/2 - \lambda \\ y & = & 3\lambda \\ z & = & \lambda \end{array}$$

- $a = -3$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3+f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3\,f_3+f_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} r(A) = 2 \\ r(AM) = 3 \\ \textbf{S.I.} \end{array}$$

- $a \neq -3 \land a \neq 5 \qquad |A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = r(AM) = 3$, **S.C.D.**

Resolvemos este caso por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a-4 & 1 & -1 \\ 0 & a-6 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{(a-5)(a+3)} = \frac{-3}{a+3} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a-4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ a+1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{(a-5)(a+3)} = \frac{3(a+2)}{a+3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & a-4 \\ 0 & a-6 & 0 \\ a+1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{(a-5)(a+3)} = \frac{-(a-6)(a+2)}{a+3}$$

Ejercicio 8

MATEMATICAS 2º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
SISTEMAS
Doc Doc
Volver Cerrar

Ejercicio 9. Este sistema es homogéneo, siempre tiene solución.

$$|A| = \begin{vmatrix} a^2 & 3 & 2 \\ a & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} a & 1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} a & -1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -5a^2 - 10a + 40$$

$$|A| = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{a=-4}} \vee \quad \boxed{\text{a=2}}$$

- Caso $\mathbf{a} = -\mathbf{4} \vee \mathbf{2}$ $\qquad r(A) = r(AM) = 2$ $\qquad$ **S.C.I.**
- Caso $\mathbf{a} \neq -\mathbf{4} \wedge \mathbf{2}$ $\qquad r(A) = r(AM) = 3$ $\qquad$ **S.C.D.** En este caso como es homogéneo la solución es la nula $(0, 0, 0)$.

Ejercicio 9

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 10.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & -1 & a^2-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a^2 \\ 0 & 0 & a^2-a \end{vmatrix} = a^2 - a$$

$$|A| = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{a=0}} \quad \vee \quad \boxed{\text{a=1}}$$

- Caso $\mathbf{a = 0}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} r(A) = r(AM) = 2 \\ \textbf{S.C.I.} \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} x - y = 0 \\ y = 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

- Caso $\mathbf{a = 1}$.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$r(A) = 2 \qquad r(AM) = 3 \qquad \textbf{S.I.}$$

- Caso $\mathbf{a \neq 0 \wedge 1}$ $\qquad r(A) = r(AM) = 3 \qquad$ **S.C.D.**.

Resolvemos por el método de Cramer en función de a

$$x = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 2a+1 & 0 & a^2 \\ 2a & -1 & a^2-a \end{vmatrix} = \frac{a^2-a-1}{a-1}$$

$$y = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 2a+1 & a^2 \\ 1 & 2a & a^2-a \end{vmatrix} = \frac{-a}{a-1}$$

$$z = \frac{1}{a-1}$$

Ejercicio 10

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 11.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & b \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = (a-1)(ab-1)$$

- Caso $\mathbf{a \neq 1}$ y $\mathbf{ab \neq 1}$, $r(A) = r(AM) = 3$ **S.C.D.**
- Caso $\mathbf{a \neq 1}$ y $\mathbf{ab = 1}$.

  Como el menor $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 2$

  y como $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - a \neq 0 \Longrightarrow r(AM) = 3$, luego **S.I.**
- Caso $\mathbf{a = 1}$ y $\mathbf{b \neq 1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & b & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1-b & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad r(A) = r(AM) = 2$$

S.C.I.

- Caso $\mathbf{a = 1}$ y $\mathbf{b = 1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad r(A) = 1 < r(AM) = 2$$

S.I.

Ejercicio 11

Ejercicio 12. Veamos cuando se anula el determinante de AM,

$$|AM| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 3 & 4 \\ k & 1 & -7 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ k-1 & 0 & 2 & 3 \\ k-1 & 0 & -8 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{(2)}{=} -\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ k-1 & 2 & 3 \\ k-1 & -8 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ k-4 & 2 & 3 \\ k-3 & -8 & 2 \end{vmatrix} = -3(-10k+38)$$

1. Sacamos ceros con $f_2 + f_1$, $f_3 - f_1$ y $f_4 - f_1$.
2. Desarrollamos el determinante por la columna c_2.
3. Sacamos ceros con $c_1 - c_3$ y desarrollamos.

El determinante de AM se anula en $k = \dfrac{19}{5}$.

$$\begin{cases} k = \dfrac{19}{5} & r(A) = r(AM) = 3, \qquad \textbf{S.C.D.} \\ k \neq \dfrac{19}{5} & r(A) < r(AM) = 4, \qquad \textbf{S.I.} \end{cases}$$

Resolvemos el caso $k = \dfrac{19}{5}$ por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ \frac{19}{5} & 1 & 3 & 4 \\ \frac{19}{5} & 1 & -7 & 3 \end{array}\right) \overset{(1)}{\equiv} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 19 & 5 & 15 & 20 \\ 19 & 5 & -35 & 15 \end{array}\right)$$

$$\overset{(2)}{\equiv} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & -4 & 1 \\ 0 & -14 & -54 & -4 \end{array}\right) \overset{(3)}{\equiv} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -40 & -4 \end{array}\right)$$

1. Multiplicamos la tercera y cuarta ecuación por 5.
2. Sacamos ceros con $f_2 - 2\,f_1$, $f_3 - 19\,f_1$ y $f_4 - 19\,f_1$
3. Simplificamos la f_2 por 3 y $f_3 + 14\,f_2$ y $f_3 + 14\,f_2$.

Por sustitución hacia atrás obtenemos

$$z = \frac{1}{10} \qquad y = -\frac{1}{10} \qquad x = 1$$

Ejercicio 12

Ejercicio 13.

$$|AM| = \begin{vmatrix} k & k & -1 & 1 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & k & -1 & 1 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -24k$$

El determinante de AM se anula en $k = 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 - 5\,f_1]{f_2 - 3\,f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2\,f_4 - f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} k = 0 & r(A) = 2 < r(AM) = 3, \quad \textbf{S.I.} \\ k \neq 0 & r(A) < r(AM) = 4, \quad \textbf{S.I.} \end{cases}$$

Ejercicio 13

Ejercicio 14.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 2 & 1 \\ a^2 & b \end{matrix}}^{A} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{pmatrix}}_{AM}$$

Siendo $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a^2 & b \end{vmatrix} = 2b - a^2$ y los menores de orden 2 de AM

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a^2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$$

y

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & 2 \end{vmatrix} = 2 - b = 0 \Rightarrow b = 2$$

Con estos valores la discusión es claramente:

$$\begin{cases} a^2 = 2b & \begin{cases} a = \pm 2 \wedge b = 2 & r(A) = r(AM) = 1, \quad \text{S.C.I.} \\ \text{en otro caso} & r(A) = 1 \neq r(AM) = 2, \quad \text{S.I.} \end{cases} \\ a^2 \neq 2b & r(A) = r(AM) = 2, \quad \text{S.C.D.} \end{cases}$$

Ejercicio 14

Ejercicio 15. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & a-1 \end{vmatrix} = 2(a-3)$. Analizamos $a = 3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & b \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b-5 \end{array}\right)$$

Discusión:

$$\begin{cases} a = 3 & \begin{cases} b = 5 & r(A) = r(AM) = 2, \; S.C.I.(*) \\ b \neq 5 & r(A) = 2 \neq r(AM) = 3, \quad S.I. \end{cases} \\ a \neq 3 & r(A) = r(AM) = 3, \qquad S.C.D.(**) \end{cases}$$

(*) Expresamos la solución en paramétricas

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases} \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

(**) Por Cramer

$$x = \frac{2a - b - 1}{a - 3} \qquad y = \frac{b - a - 2}{a - 3} \qquad z = \frac{b - 5}{a - 3}$$

Ejercicio 15

Ejercicio 16. Aplicamos reducción o Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -8 \\ 4 & 1 & a & b \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & -12 \\ 0 & 5 & a-4 & b-8 \end{array}\right) \equiv$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & a & b-4 \end{array}\right)$$

Discusión del sistema:

$$\begin{cases} a=0 & \begin{cases} b=4 & r(A)=r(AM)=2, \text{S C.I.} \\ b\neq 4 & r(A)=2\neq r(AM)=3, \text{S.I.} \end{cases} \\ a\neq 0 & r(A)=r(AM)=3, \qquad \text{S.C.D.} \end{cases}$$

Ejercicio 16

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 17. Aplicamos reducción o Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & a \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & b & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & a \\ 0 & -13 & -1 & 1-3a \\ 0 & -13 & b-2 & -2-2a \end{array}\right)$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & a \\ 0 & -13 & -1 & 1-3a \\ 0 & 0 & b-1 & a-3 \end{array}\right)$$

Discusión del sistema:

$$\left\{\begin{array}{ll} b=1 & \left\{\begin{array}{ll} a=3 & r(A)=r(AM)=2, \text{S.C.I.} \\ a\neq 3 & .(A)=2\neq r(AM)=3, \text{S.I.} \end{array}\right. \\ b\neq 1 & r(A)=r(AM)=3, \qquad \text{S.C.D.} \end{array}\right.$$

Ejercicio 17

MATEMATICAS 2º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
SISTEMAS
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 18.

$$|A| = \begin{vmatrix} cos\, a & sen\, a \\ sen\, a & -cos\, a \end{vmatrix} = -cos^2 a - sen^2 a = -1 \neq 0$$

Luego $\forall a$ el sistema es C.D. Resolvemos por Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & sen\, a \\ 1 & -cos\, a \end{vmatrix}}{-1} = cos\, a + sen\, a$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} cos\, a & 1 \\ sen\, a & 1 \end{vmatrix}}{-1} = -cos\, a + sen\, a$$

Para que se cumpla $x + y = 1$, resolvemos $2\, sen\, a = 1$,

$$sen\, a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \begin{cases} \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

Ejercicio 18

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 19. Aplicamos reducción o Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & a \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & b & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & a \\ 0 & -13 & -1 & 1-3a \\ 0 & -13 & b-2 & -2-2a \end{array}\right)$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & a \\ 0 & -13 & -1 & 1-3a \\ 0 & 0 & b-1 & a-3 \end{array}\right) \qquad (*)$$

Discusión del sistema:

$$\left\{\begin{array}{ll} b=1 & \left\{\begin{array}{ll} a=3 & r(A)=r(AM)=2, \text{S. C. I.} \\ a\neq 3 & .(A)=2\neq r(AM)=3, \text{S. I.} \end{array}\right. \\ b\neq 1 & r(A)=r(AM)=3, \qquad \text{S. C. D.} \end{array}\right.$$

Resolvemos para los casos de compatibilidad.

- Caso $b=1$ y $a=3$. Sustituyendo en (*), tomando $z=\mu$ como variable libre, de la segunda ecuación se tiene

  $$y=-\frac{8}{13}+\frac{1}{13}\,\mu$$

  y sustituyendo en la primera ecuación

  $$x=\frac{71}{13}-\frac{17}{13}\,\mu$$

MATEMATICAS 2º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
SISTEMAS
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

- Caso $b \neq 1$ y cualquier a. Despejando z en (*), obtenemos $z = \dfrac{a-3}{b-1}$.
  Sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos y,
  $$y = \frac{b(1-3a) - 4 + 4a}{b-1}$$
  y finalmente de la primera ecuación
  $$x = \frac{23 - 10a + ab}{b-1}$$

Ejercicio 19

Soluciones a los Tests

Solución al Test: Falso pues el sistema puede ser incompatible. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} x+y+z+t &= 1 \\ x+y+z+t &= 2 \end{aligned}$$

Final del Test

Solución al Test: Es imposible, pues para que tenga solución única se tiene que cumplir:

$$r(A) = r(AM) = 3$$

y en nuestro caso, con dos ecuaciones $r(A) \leq 2$ Final del Test

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Solución al Test: Es posible, basta que una de ellas sea dependiente de las otras. Por ejemplo: partimos de la solución $x = 1$ e $y = 1$, que satisfacen el sistema

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 2 \\ x - y & = & 0 \end{array}$$

ahora añadimos otra ecuación dependiente de ellas

$$2x + 2y = 4$$

y ya tenemos un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas que tenga solución única. Final del Test

Índice alfabético