Sistemas de ecuaciones

1

Explique la clasificación de los sistema de ecuaciones lineales en relación con el rango de las matrices de coeficientes y ampliada, en el caso homogéneo y no homogéneo.

2

Exposición esquemática de la clasificación de los sistemas lineales homogéneos.

3

Determine los valores del parámetro *t* para que el sistema

$$\begin{cases} t^2x + t^3y + tz = 1 \\ x + t^2y + z = 0 \end{cases}$$

tenga solución.

4

Discutir y resolver, cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + z + t = 1 \\ ay + z - t = 1 \\ ay + z - 2t = 2 \\ az - t = 0 \end{cases}$$

5

a. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones, según los valores de los parámetros a y b.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = b \\ ax - y + z = 2 \\ 6x + 5y - 3z = a \end{cases}$$

b. Escoger un valor de a y uno de b para los que sea compatible y determinado, y resolverlo.

6

Clasificar el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de *a* y *b* :

$$\left.\begin{array}{r} ax + y + bz = 1 \\ x + ay + bz = 1 \\ x + y + abz = b \end{array}\right\}$$

7

La empresa "ESA" fabrica tres tipos de fertilizantes, I, II y III, con los tres componentes químicos A, B y C, en los porcentajes de composición que aparecen abajo:

	I	II	III
A	6%	8%	12%
B	6%	12%	8%
C	8%	4%	12%

La compañía "ÑIA" le encarga un nuevo fertilizante, de modo que tenga un 8% de cada uno de los tres componentes. ¿Qué cantidad debe utilizar de cada uno de los fertilizantes, I, II y III, respectivamente, para obtener 100 kg de la nueva mezcla?

8

Discutir el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro *a* . Resolverlo cuando sea posible.

$$\left.\begin{array}{c} 3x - ay + 2z = a - 1 \\ 2x - 5y + 3z = 1 \\ x + 3y - (a-1)z = 0 \end{array}\right\}$$

9

Estudiar el sistema que se expresa a continuación, de tres ecuaciones y dos incógnitas, *x* e *y*, en función del parámetro *m*.

$$\begin{array}{c} x + y = 2m \\ x + (1+m)y = 3m + 5 \\ -mx - my = m^2 - 2m - 1 \end{array}$$

10 Determine condiciones en el parámetro *a* para que las ecuaciones en las variables *x* e *y* :

$$\begin{cases} x\ \cos a - y\ \text{sen}\ a + 1 = x \\ x\ \text{sen}\ a + y\ \cos a + 2 = y \end{cases}$$

no tengan solución.

11 Se considera el sistema de ecuaciones

$$S \equiv \begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \end{cases}$$

a. Resolver el sistema *S*.

b. Añadir al sistema *S* la ecuación *x* + *y* = *a* y discutir el sistema obtenido según los valores de *a*.

c. Añadir al sistema *S* una ecuación de forma que se obtenga un sistema compatible determinado con solución (2, −1, −3).

12 Sean a, b y c tres números distintos de 0, y sea *M* la matriz $M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & b & c \\ a & 0 & c \end{pmatrix}$

a. Demostrar que tiene inversa y calcularla.

b. Resolver el siguiente sistema, expresando las soluciones en términos de a, b y c.

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & b & c \\ a & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

c. Estudiar si pueden existir valores de a, b y c para que la terna $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ sea solución del sistema.

13 a. El siguiente sistema es compatible y determinado. Calcule su solución.

$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 4y + 3z = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

b. Considere ahora el sistema:

$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 4y + az = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x + ay + 2z = 1 \end{cases}$$

¿Es posible encontrar valores para *a* tales que el sistema sea incompatible? En caso afirmativo, indique cuáles. Justifique su respuesta.
¿Es posible encontrar valores para *a* tales que el sistema sea compatible indeterminado? En caso afirmativo, indique cuáles. Justifique su respuesta.

14 a. Estudie el carácter del sistema de ecuaciones lineales siguiente en función del parámetro *m*.

$$S \equiv \begin{cases} mx + 2y = m \\ 3x - y = m \\ x - y + z = 4 \end{cases}$$

b. Resuélvalo para el valor *m* = 0.

c. ¿Es posible sustituir la tercera ecuación de *S* por otra ecuación de forma que el sistema resultante sea compatible indeterminado para cualquier valor de *m*?

15 Considere la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix} \quad \text{donde } m \in \mathbb{R}$$

a. Pruebe que M es un matriz regular.

b. Para $m = -1$ considere el sistema de ecuaciones lineales:

$$(M - s\,I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde $s \in \mathbb{R}$ e I es la matriz unidad (identidad) de orden tres.
Resuélvalo según los valores del parámetro s.

c. Para $m = -1$ obtenga los vectores $v \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ que verifican:

$M^{-1}\,v = r\,v$ para algún número real r.
Indicación: no es necesario calcular M^{-1}, basta probar que $r \neq 0$, $r^{-1}\,v = M\,v$ y utilizar el apartado anterior.

16

Una heladería vende helados de una, dos y tres bolas, a uno, dos y tres euros, respectivamente. El viernes ha vendido 157 helados, obteniendo 278 euros, y se sabe que el número de helados de una bola es k veces el número de helados de tres bolas.

a. Plantee un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita averiguar cuántos helados de cada tipo se han vendido.

b. Estudie los valores de k para los que el sistema tiene solución. ¿Es posible que se hayan vendido el mismo número de helados de una bola que de tres bolas?

c. Para $k = 3$, calcule el número de helados de cada tipo que se han vendido.

17

Un grupo de chicos y chicas están organizando un viaje para el verano. El viaje recorrerá ciudades de Francia, Italia y Suiza, en las siguientes condiciones:

a. Se alojarán en hoteles y comerán en restaurantes previamente concertados cuyos precios, por persona y día, en euros, se indican en la tabla adjunta:

GASTOS POR PERSONA	FRANCIA	ITALIA	SUIZA
HOTEL	80	60	70
RESTAURANTE	50	40	40

b. Las cantidades totales asignadas por persona son de 700 € en hoteles y 440 € en restaurantes.

c. En Suiza están dos días.

¿Cuántos días pasarán en Italia y Francia?

18

Dada las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a. Calcule α, β, γ para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $AX = B$.

b. Si $\beta = \gamma = 1$ ¿Qué condición o condiciones debe cumplir α para que el sistema lineal homogéneo $AX = 0$ sea compatible determinado?

c. Si $\alpha = -1$, $\beta = 1$ y $\gamma = 0$, resuelva el sistema $AX = B$.

19

Considérese el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real λ:

$$\begin{cases} 2x - \lambda y + z = -\lambda \\ 4x - 2\lambda y + 2z = \lambda - 3 \end{cases}$$

a. Determínense los valores del parámetro real λ que hacen que el sistema sea incompatible.

b. Resuélvase el sistema para $\lambda = 1$.

20

Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & t & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ t^2-3t+2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

con $t \in \mathbb{R}$.

Estudie la compatibilidad del sistema, dependiendo del parámetro t, y calcule todas las soluciones en los casos en los que sea compatible.

21

a. Enuncie el Teorema de Rouché-Fröbenius.

b. Razone que un sistema de tres ecuaciones lineales con cuatro incógnitas no puede ser compatible determinado.

c. Determine para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el sistema

$$\begin{cases} 2x+3y-z+2t=2 \\ 5x+y+2z=1 \\ x+8y-5z+6t=a \end{cases}$$

es incompatible.

22

a. Discutir el sistema siguiente, averiguando los valores de a que lo hacen compatible:

$$\begin{cases} a\,x+y-2z=-1 \\ -x+a\,y+z=2 \\ 3x+y-z=0 \\ y+z=3 \end{cases}$$

b. Resuélvalo en el caso en que sea compatible.

23

Una conocida cadena de ropa ha rebajado sus precios. Un pantalón, una camisa y un abrigo valían en temporada 360 euros en total. En las primeras rebajas, el pantalón se rebajó un 10% y la camisa un 20%, con lo que un cliente podía llevarse ambas prendas por 137 euros. En las segundas rebajas, y sobre el precio de temporada, el pantalón se rebajó un 20% y el abrigo un 30%, por lo que juntos costaban 212 euros. Calcule el precio de cada prenda en temporada.

24

Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x+y+m\,z&=m \\ m\,x+(m-1)\,y+z&=2 \\ x+y+z&=1 \end{aligned}$$

a. Determine los valores del parámetro m para los que ese sistema de ecuaciones es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b. Encuentre las soluciones de ese sistema cuando $a = 1$.

c. Considere las matrices: $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Determine el rango de la matriz producto CD.

25

Se considera el sistema siguiente dependiente del parámetro $b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & b & 0 \\ -1 & 0 & b \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a. Clasifique el sistema según el parámetro b.

b. Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $b=-2$.

26

Calcular una matriz X que satisfaga:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcular, si es posible, la matriz inversa de X.

27

La productora cinematográfica *Filmtropía* va a rodar tres películas familiares en los próximos meses. En cada una de ellas debe contratar actores, actrices e intérpretes infantiles. Cada día de rodaje tiene presupuestada una cantidad fija de dinero para pago de honorarios a los intérpretes. El número de actores y actrices es conocido, pero el número de intérpretes infantiles es un valor t que puede variar. Las retribuciones de los actores y actrices se fijarán en función del número de intérpretes infantiles que se contraten. La distribución de intérpretes por película y el presupuesto diario aparecen en la tabla adjunta.

	Película uno	Película dos	Película tres
Actores	2	4	2
Actrices	1	4	3
Intérpetes infantiles	t	$3t-2$	$2t-1$
Presupuesto diario (en miles de euros)	17	40	27

a. Plantee un sistema de ecuaciones que permita determinar los honorarios de cada intérprete por día de trabajo.

b. Determine dichos honorarios.

c. Como criterio para fijar el número de intérpretes infantiles, se ha decidido que los actores y actrices deben cobrar lo mismo por cada día de trabajo. ¿Cuál será el número de intérpretes infantiles de cada película?

28

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$$

considere el sistema de ecuaciones lineales dado por $X^{t}A = B^{t}$, donde X^{t}, B^{t} denotan las traspuestas. Discútalo según los distintos valores de m.

29

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-4z=0 \\ 3x+ay+2z=2 \end{cases}$$

a. Clasifique el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a.

b. Resuelva el sistema para $a=-1$.

30

a. Discutir según los valores del parámetro m el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y+mz=4 \end{cases}$$

b. Resolverlo para $m=1$.

31

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

a. Calcule el determinante de A.

b. ¿Cuáles son los valores de a para los que la matriz A tiene inversa?

c. La matriz A es la matriz de coeficientes de un sistema homogéneo (los términos independientes son todos 0) de tres ecuaciones con tres incógnitas (x, y, z). Resuélvalo en el caso en el que $a = 0$.