CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**PAAU (LOXSE)**	**Código: 21**
	XUÑO 2009	

MATEMÁTICAS

(Responder só a unha das opcións de cada bloque temático).

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$, calcula os rangos de AA^t e de A^tA, sendo A^t a matriz transposta de A. Para o valor $a = 1$, resolve a ecuación matricial $AA^tX = B$, sendo $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) Sexa M unha matriz cadrada de orde 3 con $\det(M) = -1$ e que ademais verifica $M^3 + M + I = 0$, sendo I a matriz unidade de orde 3. Calcula os determinantes das matrices: $M + I$ e $3M + 3I$.

Opción 2. a) Resolve, se é posible, o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 5 \\ 2x + y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

b) Calcula o valor de m, para que ao engadir ao sistema anterior a ecuación:

$$x + 2y - z = m$$

resulte un sistema compatible indeterminado.

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. Sexa r a recta que pasa polos puntos P(0,8,3) e Q(2,8,5) e s a recta

$$s: \begin{cases} x - y + 7 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

a) Estuda a posición relativa de r e s Se se cortan, calcula o punto de corte.
b) Calcula a ecuación da recta que pasa por P e é perpendicular ao plano que contén a r e s.

Opción 2. Sexan π o plano que pasa polos puntos A(1,-1,1), B(2,3,2), C(3,1,0) e r a recta dada por

$$r: \frac{x-7}{2} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+3}{2}$$

a) Calcula o ángulo que forman a recta r e o plano π. Calcula o punto de intersección de r e π.
b) Calcula os puntos da recta r que distan 6 unidades do plano π.

BLOQUE 3 (ANÁLISE) *(Puntuación máxima 4 puntos)*

Opción 1. a) Define función continua nun punto. ¿Qué tipo de descontinuidade presenta a función $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ en $x = 0$?

b) Calcula os intervalos de crecemento e decrecemento, os extremos relativos e os puntos de inflexión da función $g(x) = 2x^3 - 3x^2$.

c) Calcula a área do recinto limitado pola gráfica de $g(x) = 2x^3 - 3x^2$ e a recta $y = 2x$.

Opción 2. a) Enuncia e interpreta xeometricamente o teorema do valor medio do cálculo diferencial.

b) Calcula un punto da gráfica da función $g(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ no que a recta tanxente sexa paralela ao eixo OX; escribe a ecuación desa recta tanxente. Calcula as asíntotas, se as ten, de $g(x)$.

c) Calcula: $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$; (Nota: ln = logaritmo neperiano)

MATEMÁTICAS

(Responder só a unha das opcións de cada bloque temático).

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a) Estuda, segundo os valores de m o rango da matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & m & m+2 \\ m & 8 & 12 \end{pmatrix}$.

b) Resolve a ecuación matricial $A^2X = B$, sendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Opción 2. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2x - y - z &= 0 \\ x - 2y + 4z &= m \end{aligned}$$

b) Resolve, se é posible, o sistema anterior para o caso $m = 0$.

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. Dados os planos $\pi_1 : x + y + z - 1 = 0$; $\pi_2 : y - z + 2 = 0$; e a recta $r : \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$

a) Calcula o ángulo que forman π_1 e π_2. Calcula o ángulo que forman π_1 e r.

b) Estuda a posición relativa da recta r e a recta intersección dos planos π_1 e π_2.

Opción 2. a) Calcula a ecuación da recta que pasa polo punto P(2,3,5) e é perpendicular ao plano

$$\pi : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda + \mu \\ z = 2 + 3\lambda + \mu \end{cases}$$

a) Calcula a distancia do punto P(2,3,5) ao plano π. Calcula o punto de π que está máis próximo ao punto P(2,3,5).

BLOQUE 3 (ANÁLISE) *(Puntuación máxima 4 puntos)*

Opción 1. a) Enuncia e interpreta xeometricamente o teorema de Bolzano. Dada a función $f(x) = e^x + 3x\ln(1 + x^2)$, xustifica se podemos asegurar que a súa gráfica corta ao eixo OX nalgún punto do intervalo [-1, 0].

b) Calcula os valores de a e b para que a función $f(x) = \begin{cases} ax + b & se \quad x \le 0 \\ sen(2x) + 1 & se \quad x > 0 \end{cases}$ sexa continua e derivable en $x = 0$.

c) Calcula a área do recinto limitado polo eixo OX e a parábola $y = \frac{x^2}{4} - x$.

Opción 2. a) Calcula a ecuación da recta tanxente á gráfica de $f(x) = (1 + x^2)e^{-x}$ no punto de abscisa $x = 0$.

b) Calcula o dominio, as asíntotas, os intervalos de crecemento e decrecemento e os extremos relativos da función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.

c) Enuncia e interpreta xeometricamente o teorema do valor medio do cálculo integral.

CONVOCATORIA DE XUÑO

Bloque 1 (Álxebra lineal) (3 puntos)

OPCIÓN 1:

a) 2 puntos

0,5 puntos polo rango de AA^t

0,5 puntos polo rango de A^tA

1 punto polo cálculo da matriz X

b) 1 punto

0,5 puntos polo det(M + I)

0,5 puntos polo det(3M + 3I)

OPCIÓN 2:

a) 1,5 puntos

0,5 puntos por deducir que ten infinitas solucións

1 punto por obter as infinitas solucións

b) 1,5 puntos

0,5 puntos polo rango da matriz dos coeficientes

0,5 puntos por deducir que o rango da matriz ampliada ten que ser 2

0,5 puntos por obter o valor de m

Bloque 2 (Xeometría) (3 puntos)

OPCIÓN 1:

a) 1,5 puntos

1 punto polo estudo da posición relativa

0,5 puntos polo cálculo do punto de corte

b) 1,5 puntos

1 punto pola obtención do vector director da recta

0,5 puntos pola ecuación da recta

OPCIÓN 2:

a) 1,5 puntos

0,5 puntos pola ecuación do plano

0,5 puntos polo ángulo que forman a recta e o plano

0,5 puntos polo cálculo do punto de corte.

b) 1,5 puntos

0,75 puntos pola igualdade que expresa que un punto da recta dista 6 unidades do plano

0,75 puntos pola obtención dos dous puntos da recta que distan 6 unidades

Bloque 3 (Análise) (4 puntos)

OPCIÓN 1:

a) 1 punto

0,5 puntos pola definición de función continua nun punto

0,5 puntos polo tipo de descontinuidade

b) 1,5 puntos

0,75 puntos polos intervalos de crecemento e decrecemento

0,5 puntos polos extremos relativos (0,25 puntos por cada un)

0,25 puntos polo punto de inflexión

c) 1,5 puntos

0,75 puntos pola formulación do problema (expresión da área como suma de integrais definidas)

0,75 puntos polo cálculo da área (0,25 puntos pola integración e 0,5 puntos pola aplicación da regra de Barrow e obtención do resultado)

OPCIÓN 2:

a) 1 punto

0,5 puntos: enunciado do teorema do valor medio do cálculo diferencial

0,5 puntos: interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo diferencial

b) 1,5 puntos

0,5 puntos polo cálculo do valor de x no que se anula a derivada de g(x)

0,5 puntos pola ecuación da recta tanxente

0,5 puntos polas asíntotas

c) 1,5 puntos

1 punto polo cálculo da integral indefinida

0,5 puntos pola aplicación da regra de Barrow e obtención do resultado

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL)

OPCIÓN 1:

a) 1,5 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos por obter m = 4.

0,5 puntos por rang(M) = 3 se $m \neq 4$

0,5 puntos por rang(M) = 1 se m = 4.

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos pola obtención de A^2

0,5 puntos polo cálculo de $(A^2)^{-1}$ ou pola formulación do sistema de ecuacións expresando X como unha matriz 2x1.

0,5 puntos pola obtención da matriz X.

OPCIÓN 2:

a) 2 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos polo rango da matriz dos coeficientes.

0,5 puntos polo rango da matriz ampliada.

1 punto pola discusión do sistema:

- 0,5 puntos. Sistema Incompatible.
- 0,5 puntos. Sistema Compatible Indeterminado.

b) 1 punto pola resolución do sistema.

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA)

OPCIÓN 1:

a) 1,5 puntos, distribuídos en

0,75 puntos polo ángulo que forman os planos.

0,75 puntos polo ángulo que forman o plano e a recta.

b) 1,5 puntos, distribuído en:

0, 5 puntos polo cálculo do vector director da recta intersección dos planos ou pola expresión da recta como intersección de dous planos.

0,5 puntos polo paralelismo das rectas.

0,5 puntos, as rectas non son coincidentes.

OPCIÓN 2:

a) 1 punto, distribuído en:

0,5 puntos pola obtención do vector director da recta.

0,5 puntos pola ecuación da recta.

b) 2 puntos, distribuídos en:

1 punto pola distancia do punto ao plano.

1punto pola obtención do punto do plano máis próximo ao punto dado.

BLOQUE 3 (ANÁLISE)

OPCIÓN 1:

a) 1,5 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos polo enunciado do teorema de Bolzano.

0,5 puntos pola interpretación xeométrica do teorema de Bolzano.

0,5 puntos pola aplicación do teorema de Bolzano.

b) 1 punto, distribuído en:

0,5 puntos pola obtención de b (condición de continuidade).

0,5 puntos pola obtención de a (condición de derivable).

c) 1,5 puntos, distribuídos en:

1 punto pola formulación do problema.

0,5 puntos pola integración e aplicación de Barrow.

OPCIÓN 2:

a) 1 punto, distribuído en:

0,5 puntos pola derivada en x=0.

0,5 puntos pola ecuación da recta tanxente.

b) 2 puntos, distribuídos en:

1 punto polo dominio e asíntotas.

0,5 puntos polos intervalos de crecemento e decrecemento.

0,5 puntos polo máximo relativo.

c) 1 punto, distribuído en:

0,5 puntos polo enunciado do teorema do valor medio do cálculo integral.

0,5 puntos pola interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo integral.

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a)

$$AA^t = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a^2 & a \\ a & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

$$|AA^t| = (1+a^2)^2 - a^2 = 1 + a^4 + a^2 > 0, \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow rang(AA^t) = 2$$

$${}^tAA = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a^2 & a & a \\ a & 1 & 0 \\ a & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1+a^2 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \\ \left|{}^tAA\right| = a^2(1+a^2) - a^2 - a^4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow rang({}^tAA) = 2$$

$\boxed{a = 1}$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \ |AA^t| = 3 \neq 0 \Rightarrow \exists (AA^t)^{-1};$$

$$X = (AA^t)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) $M^3 + M + I = 0 \Rightarrow M + I = -M^3$

$\det(M + I) = \det(-M^3) = (-1)^3 \cdot (-1)^3 = 1$

$\det(3M+3I) = \det(3(M+I)) = (3)^3 \cdot \det(m+I) = 3^3 \cdot 1 = 27$

Opción 2. a) As infinitas solucións do sistema veñen dadas por:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 5 + z \\ 2x + y = 2 + 2z \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x = t - 3 \\ y = 8 \\ z = t \end{array}}; \ t \in \mathbb{R}$$

b)

$$\text{Matriz de coeficientes } (C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{Matriz ampliada } (A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & m \end{pmatrix}$$

Calculamos o rango da matriz de coeficientes:

$$\left.\begin{array}{l} |C| = -1 - 4 - 2 + 1 + 4 + 2 = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow rang(C) = 2$$

Para que sexa un sistema compatible indeterminado, terá que ser $rang(A) = 2$, xa que entón

$rang(C) = rang(A) = 2 < 3 = n^o$ *de incógnitas*

Como $rang(A) \geq rang(C) = 2, rang(A) = 2 \Leftrightarrow \det(A) = 0$. Entón:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = m + 20 + 2 - 5 - 4 - 2m = -m + 13 \Rightarrow \boxed{m = 13}$$

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. Determinamos un punto, un vector director e as ecuacións paramétricas de cada unha das rectas r e s:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_r} = \overrightarrow{PQ} = (2,0,2) \\ P_r(0,8,3) \in r \end{array}\right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 8 \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = -7 + 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_s(-7,0,0) \in s \\ \vec{v_s} = (2,2,1) \end{cases}$$

a)

$$rang(\vec{v_r}, \vec{v_s}) = rang \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{ as rectas}$$

córtanse ou crúzanse, pero como

$$rang(\vec{v_r}, \vec{v_s}, \overrightarrow{P_rP_s}) = rang \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -7 & -8 & -3 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{ as}$$

rectas córtanse.

Calculamos o punto de corte:

$$\left.\begin{array}{l} 2t - 8 + 7 = 0 \\ 8 - 6 - 4t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow t = 1/2; \text{ Punto de corte: } \boxed{(1,8,4)}$$

b) Un vector director da recta perpendicular ao plano que contén as rectas r e s é o vector

$$\vec{v_r} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-4,2,4)$$

Polo tanto, as ecuacións paramétricas da recta pedida serán:

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = 8 + 2t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

Opción 2. Calculamos a ecuación do plano π que pasa polos puntos dados:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -6(x-1)+3(y+1)-6(z-1)=0$$

é dicir, $\pi \equiv 2x - y + 2z - 5 = 0$.

a) Vector normal ao plano π: $\vec{n}_\pi = (2,-1,2)$. Vector director da recta r: $\vec{v}_r = (2,-1,2)$. Como os dous vectores son proporcionais, podemos afirmar que a recta e o plano son perpendiculares.

Para calcular o punto de intersección da recta co plano, consideramos as ecuacións paramétricas da recta r:

$$r: \begin{cases} x = 7+2\lambda \\ y = -6-\lambda \\ z = -3+2\lambda \end{cases}$$

e substituimos na ecuación do plano:

$2(7+2\lambda) - (-6-\lambda) + 2(-3+2\lambda) - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

e polo tanto o punto de corte é: $\boxed{(5,-5,-5)}$.

b) A condición de que un punto $(7+2\lambda, -6-\lambda, -3+2\lambda)$ da recta r diste 6 unidades do plano π, vén dada pola igualdade:

$$6 = \frac{|2(7+2\lambda)-(-6-\lambda)+2(-3+2\lambda)-5|}{\sqrt{4+1+4}}$$

de onde:

$$|9\lambda+9| = 18 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 9\lambda+9=18 \\ -9\lambda-9=18 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \lambda = 1 \\ \lambda = -3 \end{matrix}\right\}$$

obtendo así os puntos da recta: $\boxed{(9,-7,-1)}$ e $\boxed{(1,-3,-9)}$.

<u>BLOQUE 3 (ANÁLISE)</u> *(Puntuación máxima 4 puntos)*

<u>Opción 1</u>. a) Unha función $f(x)$ dise continua en $x = x_0$ se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

A función $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ non está definida en $x = 0$, pero

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{1+x^2} = 0$$

polo tanto esta función presenta, en $x = 0$, unha descontinuidade evitable. Evítase esta descontinuidade definindo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

b) $g(x) = 2x^3 - 3x^2$

$g'(x) = 6x^2 - 6x$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Estudamos o signo de $g'(x)$ nos intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, \infty)$:

x	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$g'(x)$	>0	<0	>0
$g(x)$	crecente	decrecente	crecente

$x\in(-\infty,0) \Rightarrow g'(x) > 0$. A función é crecente neste intervalo.

$x\in(0,1) \Rightarrow g'(x) < 0$. A función é decrecente neste intervalo

$x\in(1,\infty) \Rightarrow g'(x) > 0$. A función é crecente neste intervalo.

Para os extremos relativos, estudamos o signo da segunda derivada nos valores que anulaban a primeira derivada

$$g''(x) = 12x - 6$$

$$g''(0) = -6 < 0\,;\; g''(1) = 6 > 0$$

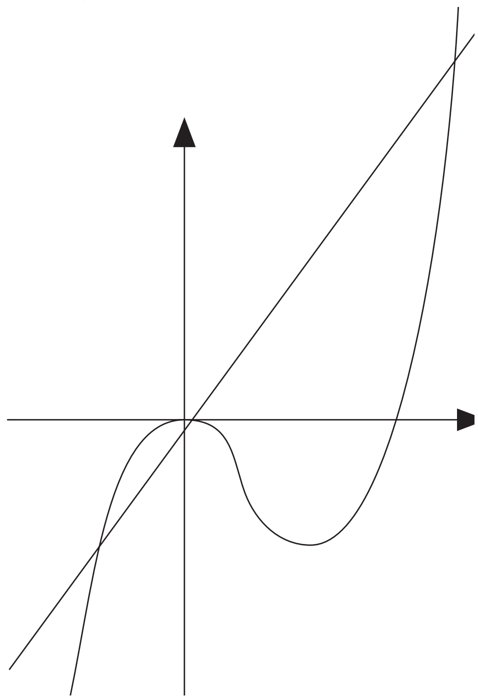
Polo tanto hai un <u>máximo relativo</u> no punto (0, 0) e un <u>mínimo relativo</u> no punto (1, –1).

Finalmente

$$\left.\begin{matrix} g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1/2 \\ g'''(x) = 12 \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{Punto de inflexión no}$$

punto (1/2, –1/2).

c) Calculamos os puntos de intersección da recta $y = 2x$, con $g(x) = 2x^3 - 3x^2$



$$x(2x^2-3x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

e polo tanto

$$A=\int_{-1/2}^{0}(2x^3-3x^2-2x)dx+\int_0^2(2x-2x^3+3x^2)dx$$

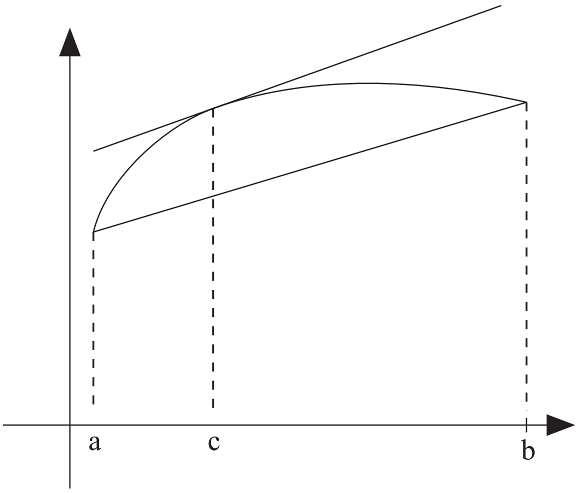
integrando e aplicando Barrow, resulta

$$A=\left[\frac{x^4}{2}-x^3-x^2\right]_{-1/2}^{0}+\left[x^2-\frac{x^4}{2}+x^3\right]_0^2=\frac{131}{32}u^2$$

<u>Opción 2</u>. a) Se $f(x)$ é unha función continua en $[a,b]$ e derivable en (a,b), entón existe polo menos un punto $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

<u>Interpretación xeométrica</u>:



Se $f(x)$ é unha función continua en $[a,b]$ e derivable en (a,b), entón existe polo menos un punto intermedio c tal que a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(c, f(c))$ é paralela á corda que une os puntos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

b) As rectas paralelas ao eixo OX teñen pendente 0. Como a pendente da recta tanxente á gráfica dunha función coincide coa derivada da función nese punto, temos que encontrar os valores que anulan a derivada de $g(x)$.

$$g'(x)=\frac{e^x(1+e^x)^2-2e^{2x}(1+e^x)}{(1+e^x)^4}=\frac{e^x-e^{2x}}{(1+e^x)^3}$$

e tendo en conta que $e^x \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-e^{2x}=0 \Leftrightarrow e^x(1-e^x)=0 \Leftrightarrow$$

$$e^x=1 \Leftrightarrow x=0$$

Así, a recta tanxente á gráfica de $g(x)$ no punto $(0, g(0))$ é paralela ao eixo OX e vén dada pola ecuación

$$y - g(0) = g'(0)(x - 0)$$

entón, como $g(0) = 1/4$, a ecuación da recta tanxente pedida será: $\boxed{y = 1/4}$.

<u>Asíntotas verticais</u> de $g(x)$:

$1 + e^x > 0 \Rightarrow$ Non existen asíntotas verticais

<u>Asíntotas horizontais</u> de $g(x)$:

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2e^x\cdot(1+e^x)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y=0}$$

asíntota horizontal.

<u>Asíntotas oblicuas</u> de $g(x)$: Non hai.

c) É unha integral case inmediata

$$\int_0^{\ln 5}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx=\left[-\frac{1}{1+e^x}\right]_0^{\ln 5}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

tamén poderiamos resolvela facendo a substitución

$$t=1+e^x;\ dt=e^x dx$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1.

a) $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & m & m+2 \\ m & 8 & 12 \end{vmatrix} = -m^2 + 8m - 16$;

$|M| = 0 \Leftrightarrow m = 4$

Polo tanto:

- $m \neq 4 \Rightarrow rang(M) = 3$
- $m = 4 \Rightarrow rang(M) = 1$ (2ª fila = 2x1ªfila, e 3ª fila = 4x1ªfila)

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$;

Como $|A^2| = 4 \neq 0$, existe a matriz inversa de A^2 e temos: $A^2 X = B \Leftrightarrow X = (A^2)^{-1} \cdot B$

$$X = \left(A^2\right)^{-1} \cdot B = \frac{1}{|A^2|}(Adj(A^2)^t) \cdot B =$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Opción 2.

a) Matriz de coeficientes $(C) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

Matriz ampliada $(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & m \end{pmatrix}$

Calculamos os rangos da matriz de coeficientes e da matriz ampliada:

$$\left.\begin{array}{l} |C| = -4 - 4 + 1 + 1 - 2 + 8 = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow rang(C) = 2$$

$$\left.\begin{array}{r} |A| = m \\ rang(A) \geq rang(C) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m = 0 \Rightarrow rang(A) = 2 \\ m \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 \end{array}\right.$$

Discusión do sistema:

- $m = 0 \Rightarrow rang(C) = 2 = rang(A) <$ *nº incógnitas*. Sistema compatible indeterminado, infinitas solucións.
- $m \neq 0 \Rightarrow rang(C) = 2 < 3 = rang(A)$. Sistema incompatible. Non ten solución.

b) Caso $\boxed{m = 0}$. As infinitas solucións do sistema veñen dadas por:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = -z \\ 2x - y = z \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x = 2t \\ y = 3t \\ z = t \end{array}} \; ; \; t \in \mathbb{R}$$

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1.

a) Vector normal ao plano π_1: $\vec{n}_{\pi 1} = (1,1,1)$.

Vector normal ao plano π_2: $\vec{n}_{\pi 2} = (0,1,-1)$.

$< \vec{n}_{\pi 1}, \vec{n}_{\pi 2} > = 0 \Rightarrow \pi_1$ e π_2 son perpendiculares.

Vector director da recta r: $\vec{v}_r = (-2,1,1)$

$$áng(r, \pi_1) = arcsen \frac{<\vec{v}_r, \vec{n}_{\pi 1}>}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{n}_{\pi 1}|} = arcsen \frac{0}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = 0º$$

b) Un vector director $\vec{v}_s$ da recta s é perpendicular aos vectores $\vec{n}_{\pi 1}$ e $\vec{n}_{\pi 2}$, polo tanto

$$\vec{v}_s = \vec{n}_{\pi 1} \times \vec{n}_{\pi 2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{r} \vec{v}_s = \vec{v}_r \\ P_r = (0,-1,1) \in r \\ P_r = (0,-1,1) \notin s \end{array}\right\} \Rightarrow \text{As rectas son paralelas.}$$

Opción 2.

a) Como a recta e o plano son perpendiculares, un vector director da recta é o vector normal ao plano:

$$\vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-2,2)$$

Polo tanto, a recta pedida é:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-5}{2}$$

b) O punto $Q(-1,2,2) \in \pi$, e $\vec{n}_\pi = (-1,-2,2)$ é un vector normal ao plano π. Polo tanto

$\pi : x + 2y - 2z + 1 = 0$

e aplicando a fórmula da distancia dun punto a un plano

$$d(P, \pi) = \frac{|2 + 6 - 10 + 1|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{1}{3} unidades$$

O punto de π máis próximo a P será o punto de intersección de π coa recta perpendicular a π pasando por P. Esta recta, xa obtida no apartado a), ten por ecuacións paramétricas

$$r:\begin{cases} x=2-\text{ t} \\ y=3-2t \\ z=5+2t \end{cases}$$

polo tanto, un punto xenérico desta recta vén dado por $(2–t, 3–2t, 5+2t)$ e sustituindo na ecuación de π

$$2-t+6-4t-10-4t+1=0 \Rightarrow 9t-1=0 \Rightarrow t=-{}^{1}\!/_{9}$$

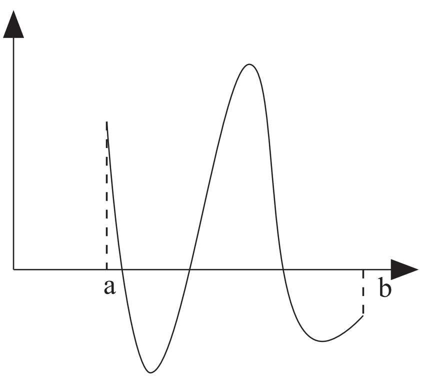
e polo tanto, o punto de π máis próximo a P é

$$\boxed{Q({}^{19}\!/_{9}, {}^{29}\!/_{9}, {}^{43}\!/_{9})}$$

BLOQUE 3 (ANÁLISE) *(Puntuación máxima 4 puntos)*

Opción 1. a) Teorema de Bolzano: se $f(x)$ é continua en $[a,b]$ e $f(a)\cdot f(b)<0$, é dicir $f(a)$ e $f(b)$ son de distinto signo, entón existe polo menos un punto $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.

Interpretación xeométrica:



Se unha función continua nun intervalo pechado toma valores de distinto signo nos extremos do intervalo, entón a función corta ao eixo OX polo menos nun punto.

$$\left.\begin{aligned} & f(x) \text{ continua en } [-1,0] \\ & f(-1)=\frac{1}{2}-3\ln 2<0 \\ & f(0)=1>0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \exists c\in(-1,0)/f(c)=0$$

b) Para que sexa continua en x=0

$$\left.\begin{aligned} & \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(ax+b)=b \\ & \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(sen2x+1)=1 \\ & f(0)=b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{b=1}$$

para que tamén sexa derivable en x=0

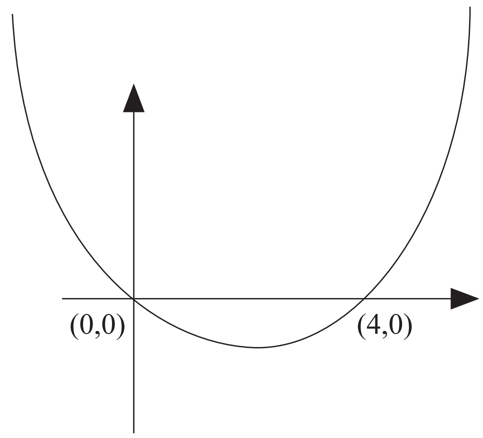
$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{ah+1-1}{h}=a$$

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{sen2h+1-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{sen2h}{h}=2$$

de donde $\boxed{a=2}$

c) $\dfrac{x^2}{4}-x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$

Así, os puntos de corte da parábola co eixo OX son (0,0) e (4,0)



$$\left.\begin{aligned} & y'=\frac{x}{2}-1 \\ & y'=0 \Rightarrow x=2 \\ & f(2)=-1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow vértice(2,-1)\cdot$$

Como é a área dunha rexión situada por debaixo do eixo OX, a área será

$$A=-\int_0^4\left(\frac{x^2}{4}-x\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{12}\right]_0^4=8-\frac{16}{3}=\frac{8}{3}u^2$$

Opción 2. a) A ecuación da recta tanxente á gráfica de $f(x)=(1+x^2)e^{-x}$ no punto correspondente a $x=0$, vén dada por

$y-f(0)=f'(0)(x-0)$

e como

$f(0)=1$

$f'(x)=2xe^{-x}-(1+x^2)e^{-x} \Rightarrow f'(0)=-1$

a ecuación da recta tanxente pedida é: $\boxed{x+y=1}$

b) Como é unha función racional, analizamos cando se anula o denominador

$x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

e polo tanto $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

Asíntotas verticais: $\begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$

Asíntotas horizontais:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=1 \Rightarrow \ y=1 \text{ é unha asíntota horizontal}$$

Non hai asíntotas oblicuas.

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-1)-2x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$$

Estudamos o signo de $f'(x)$ nos intervalos $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ e $(1,\infty)$

$x\in(-\infty,-1) \Rightarrow f'(x)>0$. A función é crecente neste intervalo.

$x\in(-1,0) \Rightarrow f'(x)>0$. A función é crecente neste intervalo

$x\in(0,1) \Rightarrow f'(x)<0$. A función é decrecente neste intervalo

$x\in(1,\infty) \Rightarrow f'(x)<0$. A función é decrecente neste intervalo.

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	>0	>0	<0	<0
$f(x)$	crecente	crecente	decrecente	decrecente

Para os extremos relativos, estudamos o signo da segunda derivada nos valores que anulaban a primeira derivada

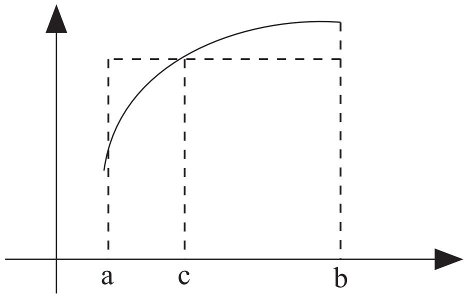
$$f''(x)=\frac{-2(x^2-1)^2+8x^2(x^2-1)}{(x^2-1)^4}=\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$$

$$f''(0)=-2<0$$

Polo tanto hai un <u>máximo relativo</u> no punto (0,0).

c) Se $f(x)$ é unha función continua nun intervalo $[a,b]$, existe un punto $c\in(a,b)$ tal que $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$

<u>Interpretación xeométrica</u>:



A área encerrada pola gráfica dunha función continua nun intervalo pechado, o eixo OX e as rectas $x=a$, $x=b$ é igual á área dun rectángulo de base $b-a$ e altura $f(c)$, o valor que toma a función nun punto intermedio c.