MATEMÁTICAS

(Responder só a unha das opcións de cada bloque temático).

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a) Sexan F_1, F_2, F_3 as filas primeira, segunda e terceira, respectivamente, dunha matriz cadrada M de orde 3, con det(M) = -2. Calcula o valor do determinante da matriz que ten por filas $F_1 - F_2$, $2F_1$, $F_2 + F_3$.

b) Dada a matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, acha dúas matrices X e Y que verifican:

$$X + Y^{-1} = C$$
$$X - Y^{-1} = C^t$$

sendo C^t a matriz trasposta de C.

Opción 2. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{array}{rcrcrcl} mx & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & my & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

b) Resólveo, se é posible, no caso $m = 2$.

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a) Os puntos $A(1,1,0)$, $B(0,1,1)$ e $C(-1,0,1)$ son vértices consecutivos dun paralelogramo $ABCD$. Calcula as coordenadas do vértice D e a área do paralelogramo.

b) Calcula a ecuación do plano que pasa polo punto $B(0,1,1)$ e é perpendicular á recta que pasa polos puntos $A(1,1,0)$ e $C(-1,0,1)$.

Opción 2. Dadas as rectas $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$; $s: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+2}{2}$

a) Estuda a súa posición relativa.

b) Calcula a ecuación do plano que contén as dúas rectas.

BLOQUE 3 (ANÁLISE) *(Puntuación máxima 4 puntos)*

Opción 1. a) Dada a función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & se \quad x < 2 \\ e^{2-x} + 2 & se \quad x \geq 2 \end{cases}$

calcula a para que $f(x)$ sexa continua en $x = 2$. Para o valor obtido de a, ¿é $f(x)$ derivable en $x = 2$?

b) Dada $g(x) = ax^4 + bx + c$, calcula os valores de a, b, c para que $g(x)$ teña no punto (1, -1) un mínimo relativo e a recta tanxente á gráfica de $g(x)$, en x = 0 , sexa paralela á recta $y = 4x$.

c) Enunciado do teorema fundamental do cálculo integral. Dada a función $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, ¿ten $F(x)$ puntos de inflexión? Xustifica a resposta.

Opción 2. a) Enunciado e interpretación xeométrica do teorema de Rolle.

b) Dada $f(x) = x^3 - 9x$, calcula para $f(x)$: puntos de corte cos eixes, intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos, intervalos de concavidade e convexidade e puntos de inflexión.

c) Calcula a área da rexión do plano limitada polo eixe OX e a curva $y = x^3 - 9x$.

MATEMÁTICAS

(Responder só a unha das opcións de cada bloque temático).

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$

a) Estuda, segundo os valores de *m*, o rango de A

b) Para $m = -1$, calcula a matriz X que verifica $X \cdot A + A = 2I$, sendo I a matriz unidade de orde 3.

Opción 2. a) Discute, segundo os valores do parámetro *m,* o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{aligned} x + my + mz &= 1 \\ x + my + mz &= m \\ my + mz &= 4m \end{aligned}$$

b) Resólveo, se é posible, no caso $m = 1$.

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a) Calcula m para que os puntos $A(2,1,-2)$, $B(1,1,1)$ e $C(0,1,m)$ estean aliñados.

b) Calcula o punto simétrico do punto $P(-2,0,0)$ respecto da recta que pasa polos puntos $A(2,1,-2)$ e $B(1,1,1)$.

Opción 2. Dadas as rectas $r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-3}$; $s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

a) Estuda a súa posición relativa .

b) Calcula a ecuación do plano que contén á recta *r* e é paralelo á recta *s*.

BLOQUE 3 (ANÁLISE) *(Puntuación máxima 4 puntos)*

Opción 1. a) Calcula $\lim_{x \to 0} \frac{e^x \, senx - x}{2x^2 + x^4}$.

b) Calcula os vértices e a área do rectángulo de área máxima que se pode construír de modo que a súa base estea sobre o eixe OX e os vértices do lado oposto estean sobre a parábola $y = -x^2 + 12$.

c) Enunciado do teorema fundamental do cálculo integral. Calcula a ecuación da recta tanxente á gráfica de $F(x) = \int_0^x \left[2 + cos(t^2)\right] dt$, no punto de abscisa x=0.

Opción 2. a) Enunciado do teorema de Bolzano. ¿Podemos asegurar que a gráfica de $f(x) = x^5 + 2x^4 - 4$ corta ao eixe OX nalgún punto do intervalo (1, 2)?

b) Dada a función $g(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \le -\sqrt{2} \\ -x^2 + 2 & se \quad x > -\sqrt{2} \end{cases}$

¿É $g(x)$ continua en $x = -\sqrt{2}$?¿É derivable en $x = -\sqrt{2}$?

c) Calcula a área da rexión do plano limitada polas gráficas de $g(x)$ e $h(x) = |x|$.

CONVOCATORIA DE XUÑO

Soamente se puntuará a primeira pregunta respondida de cada un dos tres bloques.

Bloque 1 (Álxebra lineal) **(3 puntos)**

OPCIÓN 1:

a) 1 punto

b) 2 puntos, distribuídos en

Cálculo de X (0,5 puntos)

Cálculo de Y (1,5 puntos)

OPCIÓN 2:

a) 2 puntos

b) 1 punto

Bloque 2 (Xeometría) **(3 puntos)**

OPCIÓN 1:

a) 2 puntos, distribuídos en

Cálculo do vértice D (1 punto)

Cálculo da área (1 punto)

b) 1 punto

OPCIÓN 2:

a) 2 puntos

b) 1 punto

Bloque 3 (Análise) **(4 puntos)**

OPCIÓN 1:

a) 1 punto, distribuído en

Cálculo de **a** para que a función sexa continua en x = 2 (0,5 puntos)

Estudo da derivabilidade en x = 2 (0,5 puntos)

b) 1,5 puntos

c) 1,5 puntos, distribuídos en

Enunciado do teorema fundamental do cálculo integral (1 punto)

Punto de inflexión (0,5 puntos)

OPCIÓN 2:

a) 1 punto, distribuído en

Enunciado do teorema de Rolle (0,5 puntos)

Interpretación xeométrica do teorema de Rolle (0,5 puntos)

b) 2 puntos, distribuídos en

Puntos de corte cos eixes (0,25 puntos)

Intervalos de crecemento e decrecemento (0,75 puntos)

Máximos e mínimos relativos (0,25 puntos)

Intervalos de concavidade e convexidade (0,5 puntos)

Punto de inflexión (0,25 puntos)

c) 1 punto

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Soamente se puntuará a primeira pregunta respondida de cada un dos tres bloques

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) **(3 puntos)**

Opción 1.

a) 1,5 puntos

b) 1,5 puntos

Opción 2.

a) 2 puntos

b) 1 punto

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) **(3 puntos)**

Opción 1.

a) 1 punto

b) 2 puntos

Opción 2.

a) 1,5 puntos

b) 1,5 puntos

BLOQUE 3 (ANÁLISE) **(4 puntos)**

Opción 1.

a) 1 punto

b) 2 puntos

c) 1 punto

Opción 2.

a) 1 punto

b) 1 punto

c) 2 punto

CONVOCATORIA DE XUÑO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1.

a) Sabemos que $\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = -2$. Entón, polas propiedades dos determinantes, temos que

$$\begin{vmatrix} F_1 - F_2 \\ 2F_1 \\ F_2 + F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -F_2 \\ 2F_1 \\ F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = -4$$

(1 punto)

b) Sumando membro a membro as dúas ecuacións obtemos $2X = C + C^t$. Polo tanto:

$$X = \frac{1}{2}(C + C^t) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

(0,5 puntos)

Da primeira ecuación obtemos:

$$Y^{-1} = C - X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ ½ & 0 \end{pmatrix}$$

e tendo en conta que $Y = (Y^{-1})^{-1}$, só nos resta o cálculo da matriz inversa de Y^{-1}. Así:

$$Y = \frac{1}{\det(Y^{-1})}\,(Adj(Y^{-1}))^t = 4\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1,5 puntos)

Opción 2.

a) Matriz de coeficientes — Matriz ampliada

$$C = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -m & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -m & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cálculo do rango de C: **(0,5 puntos)**

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow rang(C) \geq 2$$

$|C| = -m^2 + 3m - 2$; $\quad |C| = 0 \Leftrightarrow m = 1$, ou $m = 2$

Polo tanto: $rang(C) = 2$, se $m = 1$ ou $m = 2$

$rang(C) = 3$, nos demais casos.

Cálculo do rango de A: **(0,5 puntos)**

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - m$$

Polo tanto: $rang(A) = 2$, se $m = 2$

$rang(C) = 3$, se $m \neq 2$.

Discusión: **(1 punto)**

Se $m = 1$, $rang(C) = 2 < 3 = rang(A)$. Sistema incompatible. Non ten solución.

Se $m = 2$, $rang(C) = 2 = rang(A) <$ *nº incógnitas*. Sistema compatible indeterminado. Infinitas solucións.

Se $m \neq 1$ e $m \neq 2$, $rang(C) = 3 = rang(A) =$ *nº incógnitas*. Sistema compatible determinado. Solución única.

b) Segundo vimos no apartado anterior, estamos no caso dun sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. Neste caso, un sistema equivalente ao dado é:

$$\begin{aligned} x - z &= 1+2y \\ 2x + z &= -y \end{aligned}$$

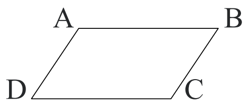
e as infinitas solucións serán:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}; \\ y = t; \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = -\frac{5}{3}t + \frac{2}{3}; \end{cases}$$

(1 punto)

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a) Se ABCD é un paralelogramo, cumprirase que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, e polo tanto, se $D(x, y, z)$



$(-1,0,1) = (-1-x, -y, 1-z)$

Obtendo así que o vértice D é a orixe de coordenadas, $D(0,0,0)$. **(1 punto)**

A área do paralelogramo vén dada polo módulo do vector $\overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DA}$. Entón:

$$\overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, -1);$$

$$Área = \sqrt{(-1)^2 + 1 + (-1)^2} = \sqrt{3}\,u^2$$ **(1 punto)**

b) Un vector normal ao plano pedido é $\overrightarrow{AC} = (-1,0,1) - (1,1,0) = (-2,-1,1)$. Como o plano pasa polo punto $B(0,1,1)$, podemos escribir a ecuación xeral do plano

$$-2(x - 0) - (y - 1) + (z - 1) = 0$$

é dicir, $\quad 2x + y - z = 0$ **(1 punto)**

Opción 2.

a) Vector director da recta r : $\vec{v_r} = (0,1,2)$. Vector director da recta s : $\vec{v_s} = (1,2,2)$.

Un punto da recta r : $P_r = (1,2,2)$. Un punto da recta

$s : Q_s = (0,-1,-2)$

Polo tanto, $\overrightarrow{P_rQ_s} = (0,-1,-2) - (1,2,2) = (-1,-3,-4)$.

Consideramos as matrices $M = \begin{pmatrix} \vec{v_r} \\ \vec{v_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

$$N = \begin{pmatrix} \overrightarrow{P_rQ_s} \\ \vec{v_r} \\ \vec{v_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rang(M) = 2$. Xa podemos dicir que as rectas se cortan ou cruzan. Para decidir entre estas dúas posibilidades, recorremos ao rango da matriz N, e como

$$|N| = -2 - 6 + 4 + 4 = 0 \Rightarrow rang(N) = 2$$

as rectas córtanse. **(2 puntos)**

b) Como son dúas rectas secantes, o plano que as contén queda determinado por un punto dunha recta, por exemplo P_r, que será un punto do plano e polos vectores directores das rectas, é dicir $\vec{v_r}$ e $\vec{v_s}$, que serán dous vectores contidos no plano. Así, a ecuación do plano será:

$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$; é dicir: $2x-2y+z=0$ **(1 punto)**

<u>BLOQUE 3 (ANÁLISE)</u> *(Puntuación máxima 4 puntos)*

<u>Opción 1</u>.

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(ax^2+1) = 4a+1$;

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(e^{2-x}+2) = 3$; $\quad f(2) = 3$

Polo tanto, para que a función sexa continua en $x = 2$ ten que cumprirse $4a+1 = 3$. Así, a función é continua para $a = 1/2$. **(0,5 puntos)**

Calculamos as derivadas laterais:

$f'(2^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1/2x^2 - 2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{2}(x+2) = 2$;

$f'(2^+) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{e^{2-x} - 1}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} e^{2-x} = -1$

Polo tanto, a función non é derivable en $x = 2$.
(0,5 puntos)

b) $g(x) = ax^4 + bx + c$; $g'(x) = 4ax^3 + b$

$$\left.\begin{array}{l} g(1) = -1 \Rightarrow a+b+c = -1 \\ g'(1) = 0 \Rightarrow 4a+b = 0 \\ g'(0) = 4 \Rightarrow b = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -1;\ b = 4;\ c = -4$$

(1,5 puntos)

c) Teorema fundamental do cálculo integral: Se $f(x)$ é unha función continua en [a,b], a función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é derivable e a súa derivada é $F'(x) = f(x)$. **(1 punto)**

$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt \Rightarrow F'(x) = e^{-x^2} \Rightarrow F''(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow F'''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$

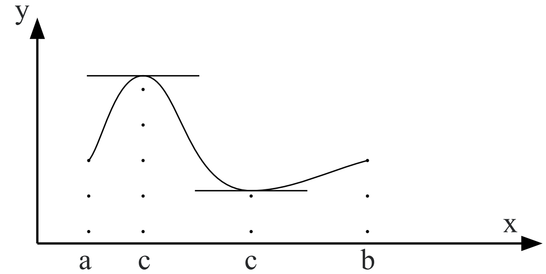
$$\left.\begin{array}{l} F''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ F'''(0) = -2 \neq 0 \end{array}\right\} \text{En } x=0 \text{, hai un punto de inflexión.}$$

(0,5 puntos)

<u>Opción 2</u>.

a) Teorema de Rolle: sexa $f(x)$ unha función continua en [a,b], derivable en (a,b) e con $f(a) = f(b)$. Entón, existe algún punto $c \in (a,b)$ no que a derivada da función se anula, $f'(c) = 0$. **(0,5 puntos)**

Interpretación xeométrica:



Baixo as hipóteses do teorema de Rolle, podemos garanti-la existencia de polo menos un punto c en (a,b) tal que a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ en $(c,f(c))$ é paralela ao eixe OX. **(0,5 puntos)**

b) $\left.\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ y = 0 \Rightarrow x(x^2-9) = 0 \end{array}\right\}$ Puntos de corte cos eixes:

(0,0); (-3,0); (3,0) **(0,25 puntos)**

$f'(x) = 3x^2 - 9$; $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$f''(x) = 6x$; $\quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f''(-\sqrt{3}) < 0$; $f(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$. Máximo relativo no punto $(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$

$f''(\sqrt{3}) > 0$; $f(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$. Mínimo relativo no punto $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$ **(0,25 puntos)**

$f'''(x) = 6$; $f'''(0) \neq 0$; $f(0) = 0$. Punto de inflexión no punto (0,0) **(0,25 puntos)**

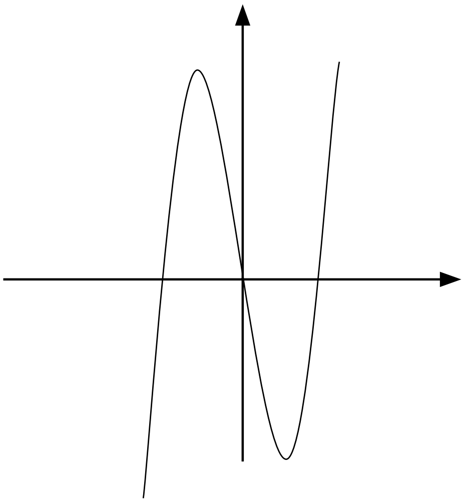
Crecemento e decrecemento:

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$f'(x)$	> 0	< 0	> 0
$f(x)$	crecente	decrecente	crecente

(0,75 puntos)

Concavidade e convexidade: **(0,5 puntos)**

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	< 0	> 0
$f(x)$	cóncava	convexa



c) Os resultado obtidos no apartado b) permítennos debuxa-la rexión do plano da que queremos calcula-la área

$$Área = \int_{-3}^{0} (x^3 -9x)dx - \int_{0}^{3} (x^3 -9x)dx =$$

$$= 2\left[\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right]_{-3}^{0} = -2\left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right) = \frac{81}{2}u^2$$

(1 punto)

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL)

(Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1.

a) $|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2$; $|A| = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Temos así:

$m \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3$

$m = 0 \Rightarrow rang(A) = 1$ (A ten dúas filas de ceros)

(1,5 puntos)

b) Por a), se $m = -1$, $|A| = 1 \neq 0$ e existe a inversa da matriz A. Ademais, para este valor de m

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = I$ e polo tanto, $A = A^{-1}$

Entón

$$XA + A = 2I \Leftrightarrow X = (2I - A)A^{-1} = 2A - I ;$$

$$X = 2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(1,5 puntos)

Opción 2.

a) Matriz de coeficientes Matriz ampliada

$$C = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ 1 & m & m \\ 0 & m & m \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & m & m & 1 \\ 1 & m & m & m \\ 0 & m & m & 4m \end{pmatrix}$$

Cálculo do rango de C:

1ª fila = 2ª fila. Eliminámo-la 2ª fila.

2ª columna = 3ª columna. Eliminámo-la 3ª columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & m \end{vmatrix} = m$$

Polo tanto:

$m = 0 \Rightarrow rang(C) = 1$

$m \neq 0 \Rightarrow rang(C) = 2$

Cálculo do rango de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & m & m \\ 0 & m & 4m \end{vmatrix} = 4m^2 + m - m^2 - 4m^2 = m(1 - m)$$

Se $m = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Se $m = 1$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Polo tanto:

Se $m = 0$, $rang(A) = 2$

Se $m = 1$, $rang(A) = 2$

Nos demais casos, $rang(A) = 3$

Discusión:

Se $m = 0$, $rang(C) = 1 < 2 = rang(A)$.

Sistema incompatible. Non ten solución.

Se $m = 1$, $rang(C) = 2 = rang(A) <$ *nº incógnitas*.

Sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciόns.

Se $m \neq 0$ e $m \neq 1$, $rang(C) = 2 < 3 = rang(A)$.

Sistema incompatible. Non ten solución. **(2 puntos)**

b) Para $m = 1$, temos un sistema compatible indeterminado. Un sistema equivalente ao dado é

$$x + y + z = 1$$
$$y + z = 4$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, temos: $x = -3$, $y = 4-z$. As infinitas solucións serán

$$\begin{cases} x = -3 ; \\ y = 4 - t ; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t ; \end{cases}$$

(1 punto)

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a) Calculámo-la recta r que pasa polos puntos $A(2,1,-2)$ e $B(1,1,1)$. Vector director da recta: $\overrightarrow{AB} = (-1,0,3)$. Punto de r: $A(2,1,-2)$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Vector director da recta } r\text{: } \overrightarrow{AB} = (-1,0,3) \\ \text{Punto de } r \;\; A(2,1,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}$$

Para que os puntos estean aliñados, C debe pertencer á recta r. Polo tanto

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 2 - \lambda \\ 1 = 1 \\ m = -2 + 3\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{m = 4}$$

(1 punto)

b) Calculámo-lo plano π perpendicular á recta r, polo tanto o vector $\overrightarrow{AB}$ é un vector perpendicular ao plano, pasando polo punto $P(-2,0,0)$:

$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{AB} \perp \pi \Rightarrow -x + 3z + D = 0 \\ P \in \pi \end{array}\right\} D = -2; \quad \pi: x - 3z + 2 = 0$$

Calculámo-lo punto $M(2-\lambda,1,-2+3\lambda)$ intersección da recta r co plano π:

$$2 - \lambda - 3(-2+3\lambda) + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1; \quad M = (1,1,1)$$

Se $P'(x,y,z)$ é o simétrico de $P(-2,0,0)$, como $M = (1,1,1)$ é o punto medio de $\overline{PP'}$, temos que

$$\frac{x-2}{2} = 1; \qquad \frac{y}{2} = 1; \qquad \frac{z}{2} = 1$$

e así, $\boxed{P'(4,2,2)}$ **(2 puntos)**

Opción 2. a) Das ecuacións das rectas podemos obte-los seus vectores directores:

$$\vec{v_r} = (1,-1,-3)$$
$$\vec{v_s} = (1,2,1)$$

e estudando o rango da matriz formada polas compo-ñentes destes vectores $rang(M) = rang\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$, xa podemos dicir que as rectas se cortan ou cruzan.

Para decidirmos entre estas dúas posibilidades, consideramos agora un punto en cada unha das rectas

$$P_r(0,1,2) \in r; \quad Q_s(1,3,1) \in s; \quad \overrightarrow{P_rQ_s} = (1,2,-1)$$

e a matriz

$$N = \begin{pmatrix} \overrightarrow{P_rQ_s} \\ \vec{v_r} \\ \vec{v_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $|N| = -1 -2 -6 -1 +6 -2 = -6 \neq 0 \Rightarrow rang(N) = 3$ podemos concluír que as rectas se cruzan. **(1,5 puntos)**

b) O plano está determinado polo punto P_r e os vectores $\vec{v_r}$ e $\vec{v_s}$. Polo tanto, a ecuación do plano será

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \; 5x - 4y + 3z - 2 = 0$$

(1,5 puntos)

BLOQUE 3 (ANÁLISE) *(Puntuación máxima 4 puntos)*

Opción 1.

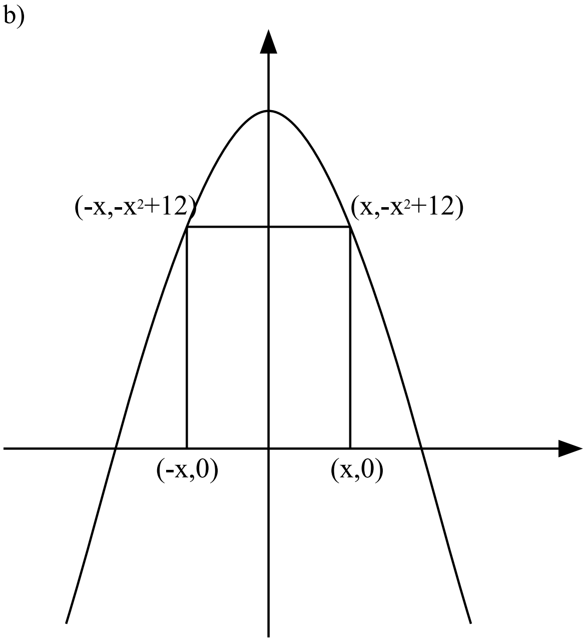
a) É unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$ e aplicamos a regra de L´Hôpital dúas veces

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x\, senx - x}{2x^2 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x\, senx + e^x \cos x - 1}{4x + 4x^3} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x (senx + \cos x) + e^x (\cos x - senx)}{4 + 12x^2} = \frac{1+1}{4} = \frac{1}{2}$$

(1 punto)

b)



O vértice da parábola é o punto V(0,12). A función a maximizar, área do rectángulo, é

$$A(x) = 2x(-x^2 + 12) = -2x^3 + 24x$$ **(1 punto)**

Determinamo-lo máximo:

$A'(x) = -6x^2 + 24$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$A''(x) = -12x; \qquad A''(2) = -24 < 0$

Polo tanto,

$A(x)$ alcanza o máximo para $x = 2$. **(0,5 puntos)**

Vértices (-2,8),(2,8),(2,0),(-2,0) **(0,25 puntos)**

Área: $A(2) = 32\ u^2$ **(0,25 puntos)**

c) Teorema fundamental do cálculo integral: Se $f(x)$ é unha función continua en [a,b], a función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é derivable e a súa derivada é $F'(x) = f(x)$. **(0,5 puntos)**

Ecuación da recta tanxente á gráfica de $F(x)$ no punto de abscisa $x = 0$:

$$y - F(0) = F'(0)(x-0).$$

$F(0) = \int_0^0 [2+cos(t^2)]dt=0$, e polo teorema fundamental do cálculo integral $F'(x) = 2 + cos(x^2) \Rightarrow F'(0) = 3$

Polo tanto, a ecuación da recta tanxente é: $y = 3x$

(0,5 puntos)

<u>Opción 2</u>.

a) Teorema de Bolzano: se $f(x)$ é continua en [a,b] e toma valores de signo contrario nos extremos do intervalo, é dicir $f(a) \cdot f(b) < 0$, entón existe algún punto $c \in (a,b)$ onde a función se anula, é dicir $f(c) = 0$.

(0,5 puntos)

A función $f(x) = x^5 + 2x^4 -4$ é continua en $\mathbb{R}$ e polo tanto en [1,2], por ser polinómica.

$f(1) = -1 < 0$; $f(2) = 60 > 0$

Entón, polo teorema de Bolzano, existe polo menos un punto $c \in (1,2)$ no que a función se anula, é dicir $f(c) = 0$
(0,5 puntos)

b)
$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to-\sqrt{2}^-} g(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\sqrt{2}^+} g(x) = 0 \\ g(-\sqrt{2}) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to\sqrt{2}} g(x) = g(-\sqrt{2}).$$

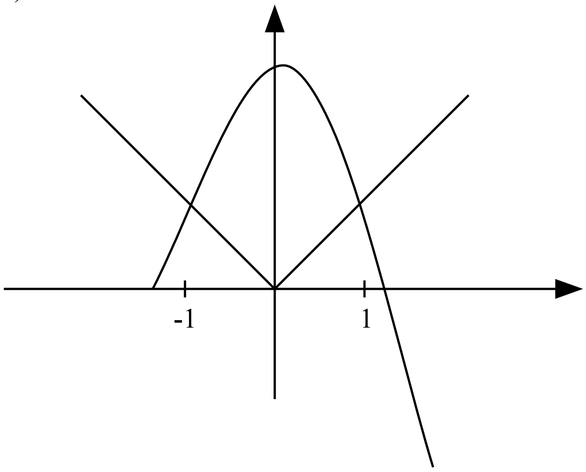
Polo tanto, $g(x)$ é continua en $x = -\sqrt{2}$. **(0,5 puntos)**

$$g'(-\sqrt{2}^-) = \lim_{x\to-\sqrt{2}^-} \frac{0}{x+\sqrt{2}} = 0$$

$$g'(-\sqrt{2}^+) = \lim_{x\to-\sqrt{2}^+} \frac{-x^2+2}{x+\sqrt{2}} = \lim_{x\to-\sqrt{2}^+} \frac{(-x+\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x+\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Dado que $g'(-\sqrt{2}^-) \neq g'(-\sqrt{2}^+)$, temos que $g(x)$ non é derivable en $x = -\sqrt{2}$. **(0,5 puntos)**

c)



$$h(x) = \begin{cases} -x & se \quad x \leq 0 \\ x & se \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Calculámo-los puntos de corte de $g(x)$ con $h(x)$

$$-x = -x^2 +2 \Rightarrow \begin{cases} x = \cancel{2} \\ x = -1 \end{cases}$$

$$x = -x^2 +2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\cancel{2} \end{cases}$$

$$A = \int_{-1}^{0}(-x^2 +2 +x)dx + \int_0^1 (-x^2 +2 -x)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{0}$$

$$+ \left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^1 = \frac{7}{3} u^2$$

(2 puntos)