MATEMÁTICAS

PRIMEIRA PARTE (Parte Común)

(Nesta primeira parte ***tódolos*** *alumnos deben responder a tres preguntas. Unha soa pregunta de cada un dos tres bloques temáticos: Álxebra Lineal, Xeometría e Análise. A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.)*

Bloque 1 (Álxebra Lineal) (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. Ache tódalas matrices $A = (a_{ij})$, cadradas de orde tres, tales que $a_{21} = a_{32} = 0$ e $A + A^t = 4I$, sendo I a matriz identidade de orde tres e A^t a matriz trasposta de A, das que ademáis sábese que o seu determinante vale 10.

2. Discuta e interprete xeométricamente, según os diferentes valores do parámetro m, o seguinte sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & -1 \\ 4x & - & 2y & + & 2z & = & 2m \\ -3x & - & 2y & + & mz & = & -4 \end{array}$$

Bloque 2 (Xeometría) (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. Calcule a distancia entre as rectas de ecuacións $r:\left\{x = \frac{y-1}{3} = \frac{z-4}{7}\right\}$ e $s:\left\{x-2 = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}\right\}$.

2. Demostre que os puntos P=(0,0,4), Q=(3,3,3), R=(2,3,4) e S=(3,0,1) son coplanarios e determine o plano que os contén.

Bloque 3 (Análise) (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. A. Enunciado e interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo integral para funcións continuas.

B. Sexa $f:[-2, 2] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua en [-2, 2] tal que $\int_{-2}^{-1} f(t)dt = \int_{1}^{2} f(t)dt$, ¿pódese asegurar que existen b e c en [-2, 2] tales que $b \leq -1$, $c \geq -1$ e f(b) = f(c)? Xustifique a súa resposta.

2. A. Enunciado da Regra de L'Hopital.

B. Calcule a relación entre a e b para que sexa continua en toda a recta real a función $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{ax}-1}{2x} & se \quad x \neq 0 \\ b & se \quad x = 0 \end{cases}$$

MATEMÁTICAS

SEGUNDA PARTE

Bloque 4.a. *(Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque **só** aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante os cursos académicos 2003/2004 ou 2004/2005. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)*

1. A. Definición de cota superior dunha sucesión de números reais. Definición de sucesión acotada inferiormente.

B. Demostre que a sucesión de termo xeral $a_n = \dfrac{4n-1}{n+1}$ é crecente e ache unha cota inferior positiva (xustificando que é cota inferior.)

2. A. Explique **BREVEMENTE** o método de integración de funcións racionais *P(x)/Q(x)*, no caso de que o polinomio do denominador, *Q(x)*, teña só raíces reais.

B. Calcule $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2}\,dx$.

Bloque 4.b. (Estatística) (*Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque **só** aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante o curso académico 2002/2003 ou anteriores. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)*

1. A. Propiedades da función de densidade dunha variable aleatoria que segue unha distribución normal.

B. Se *X* é unha variable aleatoria normal de media $\mu>0$ e varianza σ^2 entón $P\left(\dfrac{\mu}{2} \le X \le \dfrac{3\mu}{2}\right)$ vale:

a) cero

b) $2P\left(Z \le \dfrac{\mu}{2\sigma}\right) - 1$, donde *Z* é unha variable aleatoria que segue unha distribución N(0,1).

c) ningunha das anteriores.
Elixa unha das tres respostas xustificando a súa elección.

2. A. A media dunha variable aleatoria pode ser negativa:
(a) Nunca **(b)** Sempre **(c)** Só se as probabilidades son negativas **(d)** Ningunha das anteriores.
Escolla unha das anteriores respostas e razoe por que as outras tres opcións non son correctas.

B. Se X é unha variable aleatoria discreta de media *m*, demostre, (empregando a definición de media) que a media da variable aleatoria discreta Y, con Y = *a* + *b*X, (para calesqueira $a,b \in \mathbf{R}$) é $a+bm$.

MATEMÁTICAS

PRIMEIRA PARTE (Parte Común)

*(Nesta primeira parte **tódolos** alumnos deben responder a tres preguntas. Unha soa pregunta de cada un dos tres bloques temáticos: Álxebra Lineal, Xeometría e Análise. A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.)*

<u>Bloque 1</u> (Álxebra Lineal) (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. Resolva a ecuación matricial: $A \cdot X + C = B$, sendo

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Discuta e resolva, segundo os valores do parámetro α, o seguinte sistema de ecuacións. Interpréteo xeométricamente en cada caso:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x - \alpha y - 3z &= 0 \\ 5x + 3y - z &= 0 \end{aligned}$$

<u>Bloque 2</u> (Xeometría) (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. A. ¿Que condición deben cumprir os coeficientes das ecuacións xerais de dous planos para que estes sexan perpendiculares?

B. Ache o ángulo que forman os planos $\pi: 2x - y + z - 7 = 0$ e $\sigma: x + y + 2z = 11$.

2. A. Definición de producto mixto de tres vectores. ¿Pode ocorrer que o producto mixto de tres vectores sexa cero sen ser ningún dos vectores o vector nulo? Razoe a resposta.

B. Para $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, tres vectores no espacio tales que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e $|\vec{w}| = 5$, ache os valores mínimo e máximo do valor absoluto do seu producto mixto.

<u>Bloque 3</u> (Análise) (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. A. Continuidade lateral dunha función nun punto.

B. Analice a continuidade, no punto $x = 0$, da función f dada por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^x - 1}{x} & se \;\; x < 0 \\ \dfrac{\cos(x)}{x^2 + 1} & se \;\; x \geq 0 \end{cases}$

2. A. Enunciado e interpretación xeométrica do Teorema Fundamental do Cálculo Integral para funcións continuas.

B. Sexa $F(x) = \int_0^x sen(t^2)\,dt$. Calcule a segunda derivada da función F (**<u>sen intentar resolver a integral</u>**.)

MATEMÁTICAS

SEGUNDA PARTE

Bloque 4.a. *(Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque* ***só*** *aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante os cursos académicos 2003/2004 ou 2004/2005. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)*

1. Calcule:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+4}-n\right)$ b) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^n-8}{2^{n+1}}\right)$

2. Calcule $\int \dfrac{x^3+x+2}{x^2+3}\,dx.$

Bloque 4.b. (Estatística) (*Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque* ***só*** *aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante o curso académico 2002/2003 ou anteriores. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)*

1. Tódolos días se seleccionan, de maneira aleatoria, 15 unidades dun proceso de taponado de botellas co propósito de verificar a porcentaxe de taponados defectuosos. A xerencia decidíu deter o proceso cada vez que unha mostra de 15 unidades teña dous ou máis defectuosos. Se se sabe que a probabilidade de realizar un taponado defectuoso é p, ¿cal é a probabilidade de que, un determinado día, o proceso se deteña? (O resultado debe expresalo en función de p.)

Se $p = 0.1$, ¿é máis probable que nunha caixa non haxa ningún defectuoso ou que sexan todos defectuosos? Xustifique a súa resposta.

2. Un distribuidor de cristalerías empaqueta as copas en lotes de catro copas cada un. A función de masa de probabilidade do número de copas defectuosas en cada lote vén dada por:

k	0	1	2	3	4
P(X=k)	0.9	m	0.02	0.01	0.005

Pídese:

a) Calcule o valor de m.
b) Calcule a media da variable X.
c) Calcule a probabilidade de que polo menos o 50% das copas dun lote sexa defectuoso.

CONVOCATORIA DE XUÑO

A puntuación máxima de cada bloque é 2,5 puntos. O alumno debe resolver só un exercicio de cada bloque temático e no caso de responde-los dous, soamente se puntuará o primeiro exercicio respondido dese bloque.

Bloque 1 (Álxebra lineal)

EXERCICIO 1:

Formulación da condición $A + A^t = 4I$ **(0, 5 puntos)**
Obtención de $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 2$ **(0,25 puntos)**
Obtención de $a_{12} = a_{23} = 0$ **(0,25 puntos)**
Condición $a_{13} + a_{31} = 0$ **(0,25 puntos)**
Formulación da condición det(A) = 10 **(0, 5 puntos)**

Solución $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(0,75 puntos)

EXERCICIO 2:

Sexan M a matriz dos coeficientes e M^* a matriz ampliada. Facemos a discusión utilizando o Teorema de Rouché-Frobenius (tamén se podería facer polo método de Gauss).

det(M)= 4 – 2m. Polo tanto det(M) = 0 ⇔ m = 2 **(0, 5 puntos)**

Discusión:

1. m ≠ 2, rang(M) = 3= rang(M^*) = nº incógnitas. Sistema compatible determinado. Solución única **(0,5 puntos)**

2. *m = 2*, rang(M) = 2 ≠ rang(M^*) = 3 pois

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

temos neste caso un sistema incompatible **(0,5 puntos)**

Interpretación xeométrica:

1. m ≠ 2. Tres planos que se cortan nun punto **(0,5 puntos)**

m =2. Como non hai un par de planos paralelos, son tres planos que se cortan dous a dous formando unha superficie prismática (planos que se cortan dous a dous según rectas paralelas.

Bloque 2 (Xeometría)

EXERCICIO 1:

Pode resolverse de varias maneiras: fórmula que dá a distancia entre dúas rectas que se cruzan; distancia de un punto de *s* ao plano que contén a *r* e a *s*; pola perpendicular común;... A puntuación será:

Formulación de cómo calcula-la distancia **(1 punto)**

Determinación da distancia **(1,5 puntos)**

Utilizando o primeiro dos métodos sinalados temos

$A_r = (0,1,4)$; $A_s = (2,2,3)$; $\overrightarrow{A_rA_s} = (2,1,-1)$

$\overrightarrow{u_r} = (1,3,7)$; $\overrightarrow{u_s} = (1,3,4)$

rang($\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}$) = 2; rang($\overrightarrow{A_rA_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}$) = 3. Son dúas rectas que se cruzan.

Aplicamo-la fórmula $d(r,s) = \dfrac{\left|\det(\overrightarrow{A_rA_s}, \overrightarrow{u_r}\overrightarrow{u_s})\right|}{\left|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}\right|}$

e como $\left|\det(\overrightarrow{A_rA_s}, \overrightarrow{u_r}\overrightarrow{u_s})\right| = 15$; $\left|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}\right| = 3\sqrt{10}$;

resulta que $d(r,s) = \sqrt{10}/2$

EXERCICIO 2:

Este exercicio tamen se pode resolver de varias maneiras. Por exemplo:

$\overrightarrow{PQ} = (3,3,1)$; $\overrightarrow{PR} = (2,3,0)$; $\overrightarrow{PS} = (3,0,-3)$

rang($\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}$) = 2. Polo tanto, os puntos son coplanarios **(1,5 puntos)**

Como non se especifica cal, podemos dar a ecuación vectorial do plano que contén os puntos

$\vec{x} = (0,0,4) + t(3,3,-1) + s(2,3,0)$ **(1 punto)**

Bloque 3 (Análise)

EXERCICIO 1:

A. Enunciado do teorema do valor medio do cálculo integral **(0,5 puntos)**

Interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo integral **(0,5 puntos)**

B. A aplicación do teorema do valor medio do cálculo integral permite afirmar que ∃ b ∈ (-2,--1) tal que $\int_{-2}^{-1} f(t)dt = f(b)$ **(0, 5 puntos)**

∃ c ∈(1,2) tal que $\int_{1}^{2} f(t)dt = f(c)$ **(0, 5 puntos)**

Polo tanto, tendo en conta a hipótese, podemos concluir que

Existen b (-2,--1) e c (1,2) tales que f(b) = f(c) **(0,5 puntos)**

EXERCICIO 2:

A. Enunciado da Regra de L'Hopital **(1 punto)**

B. En $\mathbb{R}-\{0\}$ é continua (cociente de continuas e non se anula o denominador) **(0, 25 puntos)**

Estudiamo-la continuidade en x = 0. Aplicando a Regra de L'Hopital, temos $\lim_{x\to 0} f(x) = a/2$ **(0, 75 puntos)**

e como $f(0) = b$, deducimos f(x) é continua en x = 0 $\Leftrightarrow$ a = 2b **(0, 5 puntos)**

Bloque 4.a

1. A. Definición de cota superior dunha sucesión de números reais **(0,5 puntos)**

Definición de sucesión acotada inferiormente **(0,5 puntos)**

B. A sucesión é crecente posto que

$$a_{n+1} - a_n = \frac{5}{(n+1)(n+2)} > 0$$ **(0,75 puntos)**

Como a sucesión é crecente, entón $a_1 = 3/2$ é cota inferior **(0,75 puntos)**

2. A. Método de integración de funcións racionais, no caso de que o polinomio do denominador só teña raíces reais **(1 punto)**

B. $$\int \frac{2x-1}{x(x+1)}dx = \ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{3}{x+1} + C$$

Descomposición en suma de fraccións **(0,25 puntos).** Determinación das constantes **(0,25 puntos)**. Integración logarítmica **(0,25 puntos)**. Integración da potencia **(0,5 puntos)**. Constante de integración **(0,25 puntos).**

Bloque 4.b (Estatística)

EXERCICIO 1:

A. Propiedades da función de densidade dunha variable aleatoria que sigue unha distribución normal **(1 punto)**

B. b) . Tipifica-la variable aleatoria **(0,75 puntos)** e face-las transformacións **(0,75 puntos).**

EXERCICIO 2:

A. O apartado B deste exercicio sirve para poñer contraexemplos de a) e b). Ademais como as probabilidades non son negativas, c) tamén é falso. **(1 punto)**

B. Se X é unha variable aleatoria discreta que toma valores x_i con probabilidades p_i, i = 1,...,n

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \text{m}; \quad E[Y] = \sum_{i=1}^{n} (a+bx_i)p_i$$

(0,75 puntos)

e polo tanto, operando, E[Y] = a + bm **(0,75 puntos)**

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

A puntuación máxima de cada bloque é 2,5 puntos. O alumno debe resolver só un exercicio de cada bloque temático e no caso de responde-los dous, soamente se puntuará o primeiro exercicio respondido dese bloque.

Bloque 1 (Álxebra lineal)

EXERCICIO 1:

Obtención de $X = A^{-1}(B - C)$ **(1 punto)**

Obter $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ **(0,75 puntos)**

Cálculo de $A^{-1}(B-C) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ -11 & -1 & 14 & -2 \end{pmatrix}$ **(0,75 puntos)**

EXERCICIO 2:

É un sistema lineal homoxéneo. Sexa M a matriz dos coeficientes.

M ten menores de orden 2 distintos de cero, por exemplo $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 21$ $|M| = 7\alpha + 63$

Discusión e resolución:

1. $\alpha \neq -9$, rang(M) = 3 = nº incógnitas. Sistema compatible determinado. **(0, 5 puntos)**

Solución única x = 0, y = 0, z = 0 **(0,25 puntos)**

2. $\alpha = -9$, rang(M) = 2 < nº incógnitas. Sistema compatible indeterminado. **(0, 5 puntos)**

Infinitas solucións x = 0; y = $\lambda/3$; z = λ; con $\lambda \in \mathbb{R}$ **(0,25 puntos)**

Interpretación xeométrica:

1. $\alpha \neq -9$. Tres planos que se cortan nun punto (a orixe de coordenadas) **(0, 5 puntos)**

α = -9. Tres planos distintos que se cortan nunha recta **(0, 5 puntos)**

Bloque 2 (Xeometría)

EXERCICIO 1:

A. O ángulo α que forman os planos

$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$

$\Pi' : A'x + B'y + C'z + D' = 0$

ven dado pola expresión $\alpha = ar\cos\frac{|n \cdot n'|}{|n||n'|} =$

$$ar\cos\frac{\left|AA'+BB'+CC'\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

polo tanto $\Pi \perp \Pi' \Leftrightarrow \left|AA'+BB'+CC'\right|=0$

(1 punto)

B. Tendo en conta a fórmula anterior para o ángulo que forman dous planos, resulta que $\alpha = ar\cos\left(\frac{1}{2}\right)$

e polo tanto $\alpha = \pi/3$ radiáns **(1,5 puntos)**

EXERCICIO 2:

A. Dados tres vectores libres $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$; $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$; $\vec{v} = (w_1,w_2,w_3)$ o seu producto mixto é o número real

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$$ **(1 punto)**

Tendo en conta a expresión anterior, resulta que $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0 \Leftrightarrow \vec{u},\vec{v},\vec{w}$ son linealmente dependentes **(0, 5 puntos)**

B. O valor mínimo de $\left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right|$ será 0, e corresponderá ó caso de ser $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ linealmente dependentes **(0,5 puntos)**

Tendo en conta que

$$\left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right|=|\vec{u}||\vec{v}||\vec{w}|\left|sen(\vec{v},\vec{w})\right|\left|cos(\vec{u},\vec{v}\times\vec{w})\right|$$

o valor máximo de $\left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right|$ será 30 **(0, 5 puntos)**

<u>Bloque 3 (Análise)</u>

EXERCICIO 1:

A. Definición de continuidade lateral dunha función nun punto **(1 punto)**

B. Calculamos os límites laterais

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\ln 2$ **(0, 5 puntos)**

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$ **(0, 5 puntos)**

Como os límites laterais non coinciden, a función non é continua en x = 0 **(0, 5 puntos)**

EXERCICIO 2:

A. Enunciado do Teorema Fundamental do Cálculo Integral para funcións continuas **(1 punto)**

Interpretación xeométrica **(0, 5 puntos)**

B. F'(x) = sen (x^2) **(0, 5 puntos)**

F''(x) = 2xcos(x^2) **(0, 5 puntos)**

<u>Bloque 4.a</u>

1. a) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-5n+4}-n)$ = -5/2 **(1,5 puntos)**

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n-8}{2^{n+1}}\right)$ = 1/2 **(1 punto)**

2. $\int\frac{x^3+x+2}{x^2+3}dx=\int xdx+\int\frac{-2x+2}{x^2+3}dx$

(0,5 puntos)

Integración da potencia **(0,25 puntos)**

Integración logarítmica **(0,5 puntos)**

Integración arcotanxente **(1 punto)**

Constante de integración **(0,25 puntos)**

Solución:

$$\int\frac{x^3+x+2}{x^2+3}dx=\frac{x^2}{2}-\ln\left(x^2+3\right)+\frac{2\sqrt{3}}{3}artg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C$$

<u>Bloque 4.b (Estatística)</u>

EXERCICIO 1:

Sexa X = nº de tapóns defectuosos nunha mostra de 15 unidades dun proceso de taponado e p = probabilidade de realizar un taponado defectuoso. Entón $X \in B(15; p)$ **(0,5 puntos)**

$P(X\geq 2) = 1 - P(X<2) = 1-(1-p)^{15} - 15(1-p)^{14}$ **(0,75 puntos)**

<u>Caso p = 0,1:</u>

$P(X = 0) = 0{,}9^{15}$ **(0,5 puntos)**

$P(X = 15) = 0{,}1^{15}$ **(0,5 puntos)**

Polo tanto P(X = 15) < P(X = 0) **(0,25 puntos)**

EXERCICIO 2:

a) 0,9 + m + 0,02 + 0,01 + 0,005 = 1. Polo tanto m = 0,065 **(0,5 puntos)**

b) E[X] = μ = 0,065x1 + 0,02x2 + 0,01x3 + 0,005x4 = 0,155 **(0,75 puntos)**

c) Sexa X = número de copas defectuosas nun lote de 4 copas

P(X2) = 1- P(X = 0) – P(X = 1) = 1 – 0,9 – 0,065 = 0,035 **(1,25 puntos)**