CiUG	PAU	Código: 26
	XUÑO 2016	

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. a) Calcula todas as matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix}$ de rango 2 tales que a súa inversa sexa $A - 2I$, é dicir, $A^{-1} = A - 2I$, sendo I a matriz unidade de orde 2.

b) Dada a matriz $M = \begin{pmatrix} m+2 & -1 & m+1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ -1 & -2 & m+1 \end{pmatrix}$

i) Calcula, segundo os valores de m, o rango de M.

ii) Para o valor $m = -1$, calcula todas as matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. a) Calcula o valor de m para que os puntos $A(m,-1,m)$, $B(1,-5,-1)$, $C(3,1,0)$ e $D(2,-1,0)$ estean nun mesmo plano. Calcula a ecuación implícita ou xeral dese plano.

b) Calcula o ángulo que forman o plano $\pi: 2x - y + 2z - 5 = 0$ e a recta r que pasa polos puntos $P(3,-4,-7)$ e $Q(1,-3,-9)$.

c) Calcula os puntos da recta r do apartado anterior que distan 9 unidades do plano π.

3. a) Definición e interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo diferencial.

b) Calcula os límites seguintes:

i) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}}$ ii) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$

4. A derivada dunha función $f(x)$, cuxo dominio é $(0,\infty)$, é $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

a) Determina a función $f(x)$ sabendo que a súa gráfica pasa polo punto $(1,0)$.

b) Determina os intervalos de concavidade e convexidade de $f(x)$.

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o sistema:

$$\begin{aligned} mx + 3y + 4z &= m \\ x - 4y - 5z &= 0 \\ x - 3y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

b) Resólveo cando $m = 0$ e cando $m = 1$.

2. Dada a recta $r: \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$

a) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano π que pasa polo punto $P(2,5,-2)$ e é perpendicular á recta r.

b) Estuda a posición relativa da recta r e a recta s que pasa polos puntos $P(2,5,-2)$ e $Q(-1,4,2)$.

c) Calcula o punto da recta r que equidista dos puntos $P(2,5,-2)$ e $Q(-1,4,2)$.

3. a) Enunciado e interpretación xeométrica do teorema de Rolle.

b) Sexa $f(x) = 2x + \frac{5}{2}\ln(1+x^2)$. Calcula a ecuación da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto correspondente a $x = 0$. Determina, se existen, os máximos e mínimos relativos de $f(x)$.

4. Dada a función $f(x) = \begin{cases} ax + 2 & si \ x < 1 \\ 3(x-2)^2 & si \ x \geq 1 \end{cases}$

a) ¿É $f(x)$ derivable en $x = 1$, para algún valor de a?

b) Para $a = 1$, calcula a área da rexión limitada pola gráfica de $f(x)$ e o eixe OX.

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a-2 & 1 \\ a-1 & a & -1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula, segundo os valores de a, o rango de A. Calcula, se existe, a inversa de A cando $a = 0$.
b) Para $a = 0$. calcula a matriz B que verifica $ABA^{-1} - A = 2I$.
c) Para $a = 1$, calcula todas as matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Dados os planos $\pi_1: 3x + 3z - 8 = 0$; $\pi_2: \begin{cases} x = \frac{5}{2} + \lambda - \mu \\ y = \quad -\lambda + \mu \\ z = 3 + 2\lambda + \mu \end{cases}$

a) Calcula o ángulo que forman π_1 e π_2. Calcula as ecuacións paramétricas da recta que pasa por $(0,0,0)$ e é paralela a π_1 e π_2.
b) Calcula o punto simétrico do $(0,0,0)$ respecto do plano π_1.

3. a) Definición e interpretación xeométrica da derivada dunha función nun punto.
b) Dunha función $f(x)$ sabemos que $f(-1) = 1$ e que a súa función derivada é

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & se\ x < 0 \\ e^{2x} - 2 & se\ x \geq 0 \end{cases}$$

Calcula as ecuacións das rectas tanxentes á gráfica de $f(x)$ nos puntos de abscisa: $x = -2$ e $x = \frac{ln2}{2}$

4. Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $y = x(x-2)$, o eixe de abscisas e a recta $y = x$. (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indica os puntos de corte cos eixes, o vértice e a concavidade ou convexidade).

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores de m, o sistema:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 4x + my + 3z &= m \\ 2x + 3y + z &= 3 \end{aligned}$$

b) Resólveo cando $m = 5$.

2. Dadas as rectas $r: \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{3}$ $\qquad s: \begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0 \\ 2y + 4z + 3 = 0 \end{cases}$

a) Estuda a súa posición relativa.
b) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que contén a r e é paralelo a s.
c) Calcula a distancia entre r e s.

3. Debuxa a gráfica de $f(x) = 1 + \frac{2}{(x-2)^2}$ estudando: dominio, simetrías, puntos de corte cos eixes, asíntotas, intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidade e convexidade.

4. a) Enuncia o teorema fundamental do cálculo integral. Calcula a ecuación da recta tanxente á gráfica da función $F(x) = \int_0^x \frac{t^2+6}{2+e^t} dt$, no punto de abscisa $x = 0$.
b) Calcula $\int_0^1 xln(1+x)dx$

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

1) a) 1,5 puntos, distribuídos en:
- 1 punto pola formulación do problema.
- 0,5 puntos polo cálculo de a e b.

b) 1,5 puntos, distribuídos en:
- i) 0,75 puntos
- ii) 0,75 puntos

2) a) 1 punto, distribuído en:
- 0,5 puntos pola ecuación do plano.
- 0,5 puntos pola determinación de m.

b) 1 punto
c) 1 punto

3) a) 1 punto, distribuído en:
- 0,5 puntos polo enunciado do teorema do valor medio do cálculo diferencial.
- 0,5 puntos pola interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo diferencial.

b) 1 punto, distribuído en:
- i) 0, 5 puntos
- ii) 0, 5 puntos

4) a) 1 punto, distribuído en:
- 0,75 puntos polo cálculo da integral indefinida de $f(x)$
- 0,25 puntos pola determinación da constante para que $f(1)=0$

b) 1 punto.

OPCIÓN B

1) a) 2 puntos, distribuídos en:
- 1 punto polo cálculo dos rangos segundo os valores de m
- 1 punto pola discusión do sistema

b) 1 punto, distribuído en:
- 0,5 puntos polo caso m=0
- 0,5 puntos polo caso m=1

2) a) 1 punto
b) 1 punto
c) 1 punto

3) a) 1 punto, distribuído en:
- 0,5 puntos polo enunciado do teorema de Rolle.
- 0,5 puntos pola interpretación xeométrica.

b) 1 punto, distribuído en:
- 0,5 puntos pola ecuación da recta tanxente.
- 0,5 puntos pola determinación do máximo e mínimo relativos.

4) a) 1 punto, distribuído en:
- 0,5 puntos pola determinación de a para que $f(x)$ sexa continua en $x=1$.
- 0,5 puntos por concluír que $f(x)$ non é derivable en $x=1$ para ningún valor de a.

b) 1 punto, distribuído en:
- 0,75 puntos pola formulación do problema.
- 0,25 puntos polo cálculo das integrais definidas.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

1) a) 1 punto:
- 0,5 puntos polo cálculo do rango de A.
- 0,5 puntos polo cálculo da inversa de A,cando $\alpha = 0$.

b) 1 punto

c) 1 punto

2) a) 1,5 puntos:
- 0,75 puntos polo cálculo do ángulo que forman os planos.
- 0,75 puntos pola obtención das ecuacións paramétricas da recta.

b) 1,5 puntos

3) a) 1 punto:
- 0,5 puntos pola definición da derivada dunha función nun punto.
- 0,5 puntos pola interpretación xeométrica.

b) 1 punto:
- 0,5 puntos pofa determinación de $f(x)$
- 0,5 puntos polas ecuacións das rectas tanxentes (0,25 puntos por cada una)

4) 2 puntos:
- 0, 5 puntos polo debuxo da rexión.
- 1 punto pola formulación da área en termos de integrais definidas.
- 0,5 puntos polo cálculo das integrais definidas.

OPCIÓN B

1) a) 2 puntos:
- 1 punto polo cálculo dos rangos segundo os valores de m
- 1 punto pola discusión do sistema

b) 1 punto

2) a) 1 punto

b) 1 punto

c) 1 punto

3) 2 puntos:
- 0,25 puntos: estudo de dominio, puntos de corte cos eixes e simetrías.
- 0,25 puntos: estudo de asíntotas.
- 0,5 puntos: estudo de intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos
- 0,5 puntos: estudo de puntos de inflexión, intervalos de concavidade e convexidade.
- 0,5 puntos: debuxo da gráfica.

4) a) 1 punto:
- 0,5 puntos polo enunciado do teorema fundamental do cálculo integral.
- 0,5 puntos polo cálculo da recta tanxente.

b) 1 punto:
- 0,5 puntos: integración por partes
- 0,25 puntos: integración de función racional
- 0,25 puntos: cálculo da integral definida

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a) $A^{-1} = A - 2I \iff I = A(A-2I) = (A-2I)A$

$$A(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & a \\ a & b-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a(b-2) \\ a(b-2) & a^2+b(b-2) \end{pmatrix}$$

Polo tanto:

$$A(A-2I) = I \iff \left\{ \begin{matrix} a^2 = 1 \\ a(b-2) = 0 \\ a^2 + b(b-2) = 1 \end{matrix} \right\} \iff \begin{matrix} a = \pm 1 \\ b = 2 \end{matrix}$$

$$\boxed{Solución\text{: } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

b)

i) $det(M)=\begin{vmatrix} m+2 & -1 & m+1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ -1 & -2 & m+1 \end{vmatrix} = (m+2)(m+1)^2 + (m+1)^2 = (m+3)(m+1)^2$

$$det(M) = 0 \iff \begin{cases} m = -3 \\ m = -1 \end{cases}$$

Se $m = -3$, hai un menor de orde 2 non nulo:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Se $m = -1$, hai un menor de orde 2 non nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Polo tanto:

$$\boxed{\begin{matrix} Se\ m \in \mathbb{R} - \{-3,-1\}\ \ entón\ \ rang(M) = 3 \\ Se\ \ m = -3\ ou\ m = -1, entón\ \ rang(M) = 2 \end{matrix}}$$

ii) Substituíndo o valor de m na matriz M, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x - y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x = y = 0$$

$$\boxed{Solución\text{: } X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 2:

a) Os vectores $\overrightarrow{BC} = (2,6,1)e\overrightarrow{BD} = (1,4,1)$ son non proporcionais. Polo tanto, os puntos $B(1,-5,-1), C(3,1,0)$ e $D(2,-1,0)$ determinan un plano π:

$$\pi: \begin{vmatrix} 2 & 1 & x-1 \\ 6 & 4 & y+5 \\ 1 & 1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x - y + 2z - 5 = 0}$$

Para determinar m, bastará ter en conta que $A \in \pi$ e polo tanto:

$$2m + 1 + 2m - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 1}$$

Tamén poderiamos obter m, impoñendo a condición $rang\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = 2$, é dicir:

$$\begin{vmatrix} m-1 & 4 & m+1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(m-1) - 4 + 2(m+1) = 0 \Rightarrow 4m - 4 = 0 \Rightarrow m = 1$$

b) O vector director, $\overrightarrow{v_r}$, da recta e o vector normal, $\overrightarrow{n_\pi}$, ao plano son:

$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{PQ} = (-2,1,-2) \\ \overrightarrow{n_\pi} = (2,-1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \text{ e } \overrightarrow{n_\pi} \text{ son proporcionais. Polo tanto:}$$

$$\boxed{r \ e \ \pi \ son \ perpendiculares: r \perp \pi}$$

c) Calculamos as ecuacións paramétricas da recta r:

$$\left.\begin{array}{r} P(3,-4,-7) \in r \\ \overrightarrow{v_r} = (-2,1,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad r: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -4 + \lambda \\ z = -7 - 2\lambda \end{cases}$$

Un punto xenérico da recta será: $(3 - 2\lambda, -4 + \lambda, -7 - 2\lambda)$. Determinamos o valor de λ para que o punto diste 9 unidades do plano π:

$$9 = \frac{|2(3-\lambda) - (-4+\lambda) + 2(-7-2\lambda)|}{\sqrt{4+1+4}} \Rightarrow 27 = |-9 - 9\lambda| \Rightarrow \begin{cases} 27 = -9 - 9\lambda \Rightarrow \lambda = -4 \\ -27 = -9 - 9\lambda \Rightarrow \lambda = 2 \end{cases}$$

Substituindo estes valores nas ecuacións paramétricas da recta, obtéñense dous puntos da recta que distan 9 unidades do plano:

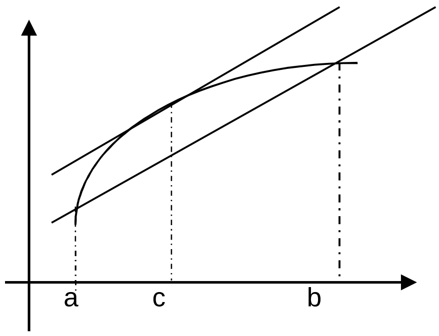
$$\boxed{A(11,-8,1) \ e \ B(-1,-2,-11)}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 3:

a) *Teorema do valor medio do cálculo diferencial*: Se $f(x)$ é continua en [a,b] e derivable en (a,b), entón existe algún punto c∈(a,b) tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Interpretación xeométrica:
Nas hipótesis do teorema, existe algún punto intermedio no que a tanxente á gráfica de $f(x)$ é paralela á corda que une os puntos (a,f(a)) e (b,f(b)).

b) Indeterminación $\frac{0}{0}$

i. $$lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}} = lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+\sqrt{2-x})}{(x-\sqrt{2-x})(x-\sqrt{2-x})} = lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+\sqrt{2-x})}{x^2-2+x} =$$

Multiplicamos polo conxugado do denominador

Factorizamos o denominador e simplificamos

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+\sqrt{2-x})}{\cancel{(x-1)}(x+2)} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Tamén pode facerse por L'Hôpital:

$$lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}} = lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2-x}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

Indeterminación $\frac{0}{0}$

ii. $$lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x ln(1+x)} = lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}} = lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\cancel{1+x}}}{\frac{(1+x)\ln(1+x)+x}{\cancel{1+x}}} =$$

L'Hôpital

Indeterminación $\frac{0}{0}$

$$= lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x} = lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)+1+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

L'Hôpital

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 4:

a) $f(x)$ é a primitiva de $f'(x)$ pasando polo punto (1,0). Mediante o método de integración por partes, calculamos a integral indefinida de $f'(x)$

$$\int \frac{1-lnx}{x^2}dx = \int x^{-2}(1-lnx)dx = -\frac{1-lnx}{x} - \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1-lnx}{x} + \frac{1}{x} + K = \frac{lnx}{x} + K$$

$$\left[\begin{array}{l} u = 1 - lnx \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{1}{x}dx \\ dv = x^{-2}dx \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{x} \end{array}\right]$$

Usando que $f(1) = 0$ determinamos o valor de K:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(1) = K \end{array}\right\} \Rightarrow K = 0$$

Polo tanto

$$\boxed{f(x) = \frac{lnx}{x}}$$

b) Estudamos o signo de $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{-\frac{x^2}{x} - 2x(1-lnx)}{x^4} = \frac{2lnx - 3}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow lnx = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{3/2}$$

	$(0, e^{3/2})$	$(e^{3/2}, \infty)$
$f''(x)$	*<0*	*> 0*
$f(x)$		

Cóncava en $(0, e^{3/2})$

Convexa en $(e^{3/2}, \infty)$

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} m & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} m & 3 & 4 & m \\ 1 & -4 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C:

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow rang(C) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} m & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 16m - \cancel{12} - 15 + 16 - 15m + \cancel{12} = m + 1;$$

Polo tanto

- $m = -1 \Rightarrow rang(C) = 2$
- $m \neq -1 \Rightarrow rang(C) = 3$

Cálculo do rango da matriz ampliada:

- $m \neq -1 \Rightarrow rang(A) = 3$ (sempre $rang(A) \geq rang(C)$)
- Se $m = -1$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3$$

<u>Discusión:</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} m = -1 \ \Rightarrow \ rang(C) = 2 < 3 = rang(A).\ Sistema\ incompatible.\ Non\ ten\ solución \\ m \neq -1 \ \Rightarrow \ rang(C) = 3 = rag(A) = nº\ de\ incógnitas.\ Sistema\ compatible\ determinado. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad Solución\ única \end{array}}$$

b) Para $\boxed{m = 0}$

Sistema homoxéneo. Por a) e un sistema compatible determinado. Polo tanto

$$\boxed{x = y = z = 0}$$

Para $\boxed{m = 1}$. Por a), é un sistema compatible determinado, ten solución única que calculamos pola regra de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}} = 1/2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}} = -1/2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}} = 1/2$$

$$\boxed{x = 1/2; \ y = -1/2; \quad z = 1/2}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 2:

a) Como o plano π debe ser perpendicular á r, entón o vector director da recta, $\vec{v}_r$, é un vector normal a π. Polo tanto:

$$\vec{n}_\pi = \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1,1,2)$$

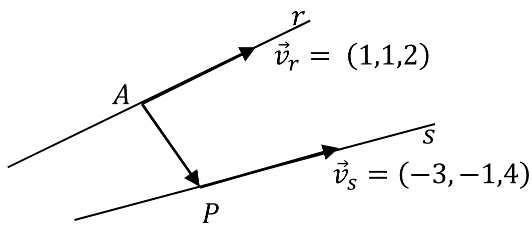
Entón, como $\vec{n}_\pi = (1,1,2)$ é un vector normal ao plano e $P(2,5,-2)$ é un punto do plano

$x - 2 + y - 5 + 2(z + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\pi: x + y + 2z - 3 = 0}$

b) Calculamos o vector director da recta s:

$$\vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (-3,-1,4)$$

Como os vectores $\vec{v}_r = (1,1,2)$ e $\vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (-3,-1,4)$ non son proporcionais, xa podemos dicir que as rectas córtanse ou crúzanse.



Tomamos un punto en cada recta. Por exemplo:

$$\mathrm{A}(0,2,0) \in r; \;\; P(2,5,-2) \in s$$

e consideramos o vector $\overrightarrow{AP} = (2,3,-2)$

Se os vectores que marcan as dirección das rectas, e o vector $\overrightarrow{AP}$ que vai dunha á outra son independentes, daquela non están no mesmo plano. Isto saberémolo vendo se o determinante formado por eles é distinto de cero ou non:

$$\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{AP}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -22 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{As\ rectas\ crúzanse}$$

c) Dado que $\mathrm{A}(0,2,0) \in r$, $\vec{v}_r = (1,1,2)$, $(\lambda, 2+\lambda, 2\lambda)$ é un punto xenérico de r, igualando as distancias deste punto xenérico aos puntos P e Q:

$$(\lambda - 2)^2 + (2 + \lambda - 5)^2 + (2\lambda + 2)^2 = (\lambda + 1)^2 + (2 + \lambda - 4)^2 + (2\lambda - 2)^2$$

é dicir:

$$\cancel{\lambda^2} - 4\lambda + 4 + \cancel{\lambda^2} - 6\lambda + 9 + \cancel{4\lambda^2} + 8\lambda + 4 = \cancel{\lambda^2} + 2\lambda + 1 + \cancel{\lambda^2} - 4\lambda + 4 + \cancel{4\lambda^2} - 8\lambda + 4$$

$$8\lambda = -8 \quad \Rightarrow \lambda = -1$$

Substituindo este valor de λ na expresión do punto xenérico de r, obtemos que o punto da recta r que equidista dos puntos P e Q é:

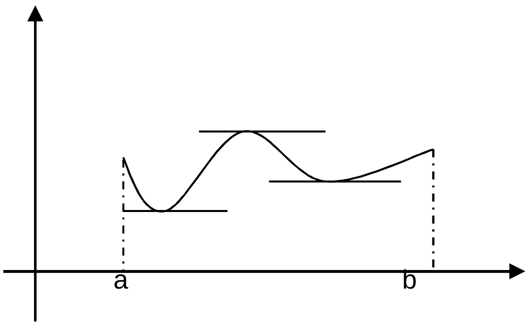
$$\boxed{R(-1,1,-2)}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 3:

a) *Teorema de Rolle*: Se $f(x)$ é continua en $[a,b]$ e derivable en (a,b) e ademais $f(a)=f(b)$, entón existe polo menos un punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.



Interpretación xeométrica: Se se cumpren as hipóteses do teorema, existe polo menos un punto $c\in(a,b)$ no que a recta tanxente é paralela ao eixe de abscisas.

b)

$$f(x)=2x+\frac{5}{2}\ln(1+x^2)\ \Rightarrow\ f'(x)=2+\frac{5x}{1+x^2}=\frac{2x^2+5x+2}{1+x^2}$$

Polo tanto, como $f(0)=0$ e $f'(0)=2$, a ecuación da recta tanxente no punto correspondente a $x=0$:

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\quad\Rightarrow\quad\boxed{y=2x}$$

Determinamos os puntos críticos:

$$f'(x)=0\ \Leftrightarrow\ 2x^2+5x+2=0\quad\Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{4}\ \Rightarrow \begin{cases}-2\\-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Calculamos a segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{5(1+x^2)-10x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{5-5x^2}{(1+x^2)^2}$$

Polo tanto:

$f''(-2)<0$
$f''(-\frac{1}{2})>0$

E así:

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{Máximo relativo no punto}\ \left(-2,-4+\dfrac{5ln5}{2}\right)\\ \textit{Mínimo relativo no punto}\ \left(-{}^{1}\!/_{2},-1+\dfrac{5\ln(5/4)}{2}\right)\end{array}}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 4:

a) Para que $f(x)$ sexa derivable en $x = 1$ ten que ser continua en $x = 1$, polo tanto:

$$\left.\begin{array}{c} lim_{x\to 1^-} f(x) = a + 2 \\ lim_{x\to 1^+} f(x) = 3 \\ f(1) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a + 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

Miramos se para este valor de a, existe o límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

para iso, calculamos os límites laterais

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - 3}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3(1+h-2)^2 - 3}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3h^2 - 6h + 3 - 3}{h} = -6$$

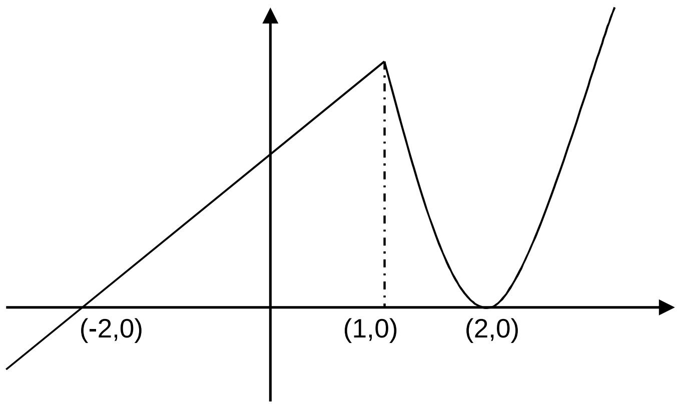
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - 3}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1+h+2-3}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

Vemos que os límites laterais non coinciden. En conclusión:

$$\boxed{f(x)\ non\ é\ derivable\ en\ x = 1\ para\ ningún\ valor\ de\ a}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & se\ \ x < 1 \\ 3(x-2)^2 & se\ \ x \geq 1 \end{cases}$$



$$A = \int_{-2}^{1} (x+2)dx + \int_{1}^{2} 3(x-2)^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} + [(x-2)^3]_1^2 = \frac{1}{2} + 2 - (2-4) + 0 - (-1)^3$$

$$= \frac{1}{2} + 2 + 2 + 1 = \frac{11}{2}$$

$$\boxed{A = \frac{11}{2}\ u^2}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

***Exercicio 1*:**

a) $\begin{vmatrix} 0 & a-2 & 1 \\ a-1 & a & -1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix} = -a(a-2) - a^2 - 2(a-1)(a-2) = -a^2 + 2a - a^2 - 2a^2 + 6a - 4 =$

$= -4a^2 + 8a - 4$

Así

$$|A| = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

Se $a = 1$, existen menores de orde 2 non nulos, por exemplo

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Polo tanto:

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 1 \Rightarrow rang(A) = 2 \\ a \neq 1 \Rightarrow rang(A) = 3 \end{array}}$$

Se $a = 0$, xa vimos que $|A| = -4 \neq 0$, polo que existe A^{-1}

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}^t = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

b)

$$ABA^{-1} - A = 2I \Leftrightarrow ABA^{-1} = A + 2I \Leftrightarrow B = A^{-1}(A + 2I)A = (I + A^{-1}) = A + 2I$$

$$\boxed{B = A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

c) $a = 1 \Rightarrow rang(A) = 2$. É un sistema homoxéneo con $rang(A) = 2 < nº\ incógnitas$. Sistema compatible indeterminado con infinitas solucións:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = z \\ x = -2z \end{array} \right\} \Leftrightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} -2\lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

***Exercicio 2*:**

a) Determinamos os vectores normais aos planos:

$$\vec{n}_{\pi_1} = (3,0,3) \;\; || \; (1,0,1)$$

$$\vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3,-3,0) \;\; || \; (1,1,0)$$

O ángulo α que forman os planos coincide co ángulo que forman os seus vectores normais. Así:

$$cos\alpha = \frac{|\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}|}{|\vec{n}_{\pi_1}||\vec{n}_{\pi_2}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{\alpha = \frac{\pi}{3}}$$

Se chamamos r á recta pedida e $\vec{v}_r$ a un vector director dela,

$$\left.\begin{matrix} r||\pi_1 & \Leftrightarrow & \vec{v}_r \perp \vec{n}_{\pi_1} \\ r||\pi_2 & \Leftrightarrow & \vec{v}_r \perp \vec{n}_{\pi_2} \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \vec{v}_r \parallel \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,1,1)$$

Como a recta pasa polo punto (0,0,0), as ecuacións paramétricas son:

$$\boxed{r: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \;\;\lambda \\ z = \;\;\lambda \end{cases}}$$

b) Sexa s a recta perpendicular a π_1 pasando polo punto $(0,0,0)$ e $\vec{v}_s$ o seu vector director, entón:

$$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{s}\perp\pi_1 \;\Leftrightarrow\; \vec{v}_s \perp \vec{n}_{\pi_1} = (1,0,1) \\ (0,0,0) \in s \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

O punto de intersección, M, de s con π_1 é o punto medio do segmento OO' (O' simétrico de $O(0,0,0)$). Calculamos o punto M de intersección de s con π_1

$$3\lambda + 3\lambda - 8 = 0 \;\Rightarrow\; 6\lambda - 8 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{4}{3} \;\Rightarrow M(\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3})$$

Se $O'(x,y,z)$, entón:

$$\left.\begin{matrix} \frac{4}{3} = \frac{0+x}{2} \\ 0 = \frac{0+y}{2} \\ \frac{4}{3} = \frac{0+z}{2} \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \boxed{O'(\frac{8}{3}, 0, \frac{8}{3})}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

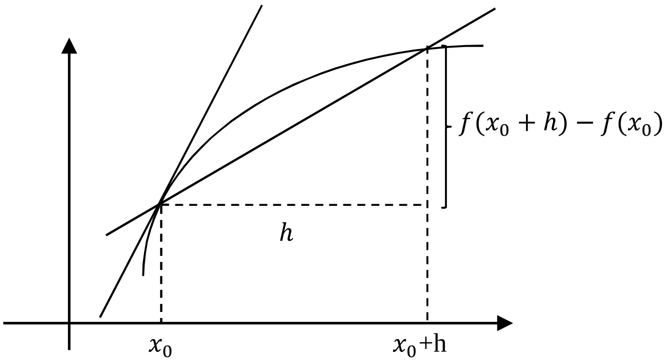
OPCIÓN A

***Exercicio 3*:**

a) Dise que $f(x)$ é derivable no punto x_0, se existe e é finito o seguinte límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-\ f(x_0)}{h}$$

represéntase por $f'(x_0)$ e chámase derivada de $f(x)$ en x_0.



Interpretación xeométrica: A recta secante que pasa polos puntos $(x_0, f(x_0)), (x_0+h, f(x_0+h))$ ten por pendente $\frac{f(x_0+h)-\ f(x_0)}{h}$ e cando $h\to 0$, esta secante acércase á recta tanxente pasando polo punto $(x_0, f(x_0))$. Así:

Pendente da recta tanxente en $(x_0, f(x_0))\ =\ lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-\ f(x_0)}{h}\ =\ f'(x_0)$

b)

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+m & se\ x<0 \\ \dfrac{1}{2}\ e^{2x}-2x+n & se\ x\geq 0\end{cases}$$

$f(-1)=1\ \Rightarrow 1=1+1+m\ \ \Rightarrow\ \ m=\ -1$

E por ser continua en $x=0$:

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\ f(0)\Rightarrow\ -1=\ \frac{1}{2}+n\ \ \Rightarrow n=\ -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow\ f(x)=\begin{cases} x^2-x-1 & se\ x<0 \\ \frac{1}{2}\ e^{2x}-2x-\frac{3}{2} & se\ x\geq 0\end{cases}$

Recta tanxente en $x=-2$:

$$y-f(-2)=f'(-2)(x+2)\quad\Rightarrow\quad \boxed{y=\ -5x-5}$$

$f(-2)=5$

$f'(-2)=-5$

Recta tanxente en $x=\frac{ln2}{2}$:

$$y-f\left(\frac{ln2}{2}\right)=f'\left(\frac{ln2}{2}\right)\left(x-\frac{ln2}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad\boxed{y=\ \frac{1}{2}+ln2}$$

$f\left(\frac{ln2}{2}\right)=-\frac{1}{2}-ln2$

$f'\left(\frac{ln2}{2}\right)=0$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

***Exercicio 4*:**

$y = x(x-2) = x^2 - 2x$

$x = 0 \;\Rightarrow y = 0$

$x(x-2) = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ x = 2 \end{cases}$

Puntos de corte cos eixes:

$(0,0)$ e $(2,0)$

$y' = 2x - 2$

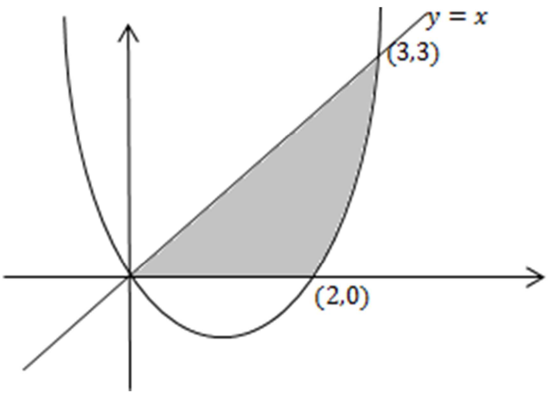
$y' = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1$

$y" = 2 < 0$

Mínimo e vértice $(1,-1)$. Convexa

Intersección da parábola coa recta $y = x$:

$x^2 - 2x = x \;\Rightarrow\; x^2 - 3x = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$ Puntos de corte: $(0,0), (3,3)$



Polo tanto:

$$A = \int_0^2 x\,dx + \int_2^3 [x - (x^2 - 2x)]dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_2^3 = 2 - 9 + \frac{27}{2} + \frac{8}{3} - 6$$
$$= \frac{-78 + 81 + 16}{6}$$

$$\boxed{A = \frac{19}{6}\, u^2}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

***Exercicio 1*:**

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & m & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & m & 3 & m \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow rang(C) \geq 2 \\ \\ \text{Orlamos este menor} \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = m + 12 + 6 - 2m - 9 - 4 = -m + 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \ rang(C) = \begin{cases} 2 & se \ m = 5 \\ 3 & se \ m \neq 5 \end{cases}$$

Discusión:

$$\boxed{\begin{array}{c} m = 5, \ rang(C) = rang(A) = 2 < 3 = nº \ de \ incógnitas. \ Sistema \ compatible \ indeterminado. \\ m \neq 5, \quad rang(C) = rang(A) = 3 = nº \ de \ incógnitas. \ Sistema \ compatible \ determinado. \end{array}}$$

b) Para $\boxed{m = 5}$, é un sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\left.\begin{array}{r} x + \ z = 1 - y \\ 4x + 3z = 5 - 5z \end{array}\right\}$$

Entón:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 - y & 1 \\ 5 - 5y & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = -(3 - 3y - 5 + 5y) = \ 2 - 2y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - y \\ 4 & 5 - 5y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = -(5 - 5y - 4 + 4y) = \ y - 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \qquad\quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 + \lambda \end{array}}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

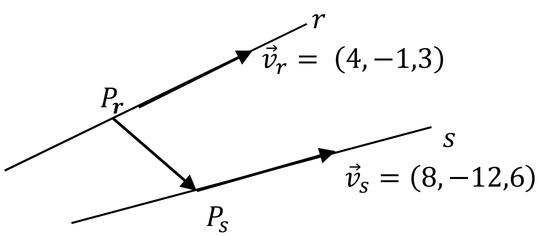
OPCIÓN B

Exercicio 2:

a) Calculamos o vector director da recta s:

$$\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (8, -12, 6)$$

Como os vectores $\vec{v}_r = (4, -1, 3)$ e $\vec{v}_s = (8, -12, 6)$ non son proporcionais, xa podemos dicir que as rectas córtanse ou crúzanse.



Tomamos un punto en cada recta. Por exemplo:

$$P_r(3,2,1) \in r; \quad P_s(2, 0, -\frac{3}{4}) \in s$$

e consideramos o vector $\overrightarrow{P_r P_s} = (-1, -2, -\frac{7}{4})$

Se os vectores que marcan as dirección das rectas, e o vector $\overrightarrow{P_r P_s}$ que vai dunha á outra son independentes, daquela non están no mesmo plano. Isto saberémolo vendo se o determinante formado por eles é distinto de cero ou non:

$$\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}\right) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 8 & -12 & 6 \\ -1 & -2 & -\frac{7}{4} \end{vmatrix} = 40 \neq 0 \;\Rightarrow\; \boxed{As\ rectas\ crúzanse}$$

b) Sexa π o plano buscado. Como o plano contén á recta r, $P_r(3,2,1) \in \pi$. Ademais, os vectores $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ son vectores do plano. Polo tanto:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 8 & -12 & 6 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\pi:\ 3x - 4z - 5 = 0}$$

c) Como o plano π é paralelo á recta s e contén á recta r

$$d(r,s) = d(s,\pi) = d(P_s,\pi) = \frac{|6+3-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \boxed{4/5}$$

Tamén podemos calcular esa distancia utilizando a fórmula da distancia entre dúas rectas

$$d(r,s) = \frac{\left|\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}\right)\right|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{\left\|\begin{matrix} 4 & -1 & 3 \\ 8 & -12 & 6 \\ -1 & -2 & -\frac{7}{4} \end{matrix}\right\|}{\sqrt{(30)^2+(40)^2}} = \boxed{4/5}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 3:

$$f(x) = 1 + \frac{2}{(x-2)^2}$$

Dominio:

A función non está definida onde se anula o denominador. Polo tanto, o dominio é $\mathbb{R} - \{2\}$

Simetrías:

$f(-x) = 1 + \frac{2}{(-x-2)^2} \neq \pm f(x)$. Polo tanto non é simétrica respecto do eixe Y nin respecto da orixe.

Puntos de corte cos eixes:

$f(x) > 0$. Polo tanto non corta ao eixe de abscisas.

$x = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2} \Rightarrow$ Corta ao eixe de ordenadas no punto $(0, \frac{3}{2})$

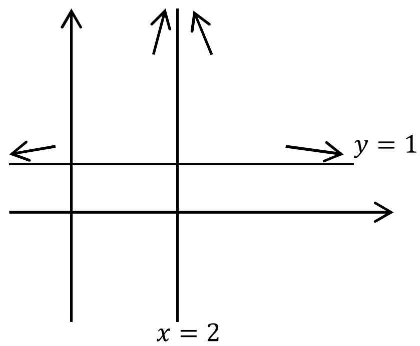
Asíntotas verticais:

$$\left. \begin{array}{l} lim_{x \to 2^-} f(x) = \infty \\ \\ lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty \end{array} \right] \Rightarrow x = 2 \text{ asíntota vertical}$$

Asíntotas horizontais:

$lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 \quad \Rightarrow \ y = 1$ asíntota horizontal

Non hai asíntotas oblicuas



Intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos:

$f'(x) = -\frac{4(x-2)}{(x-2)^4} = -\frac{4}{(x-2)^3} \neq 0 \Rightarrow$ Non hai puntos críticos

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	↗	↘

A función é crecente en $(-\infty, 2)$ e decrecente en $(2, +\infty)$. Non hai máximos nin mínimos.

Intervalos de concavidade e convexidade e puntos de inflexión:

$f''(x) == \frac{12(x-2)^2}{(x-1)^6} = \frac{12}{(x-1)^4} > 0.$ Non hai puntos de inflexión

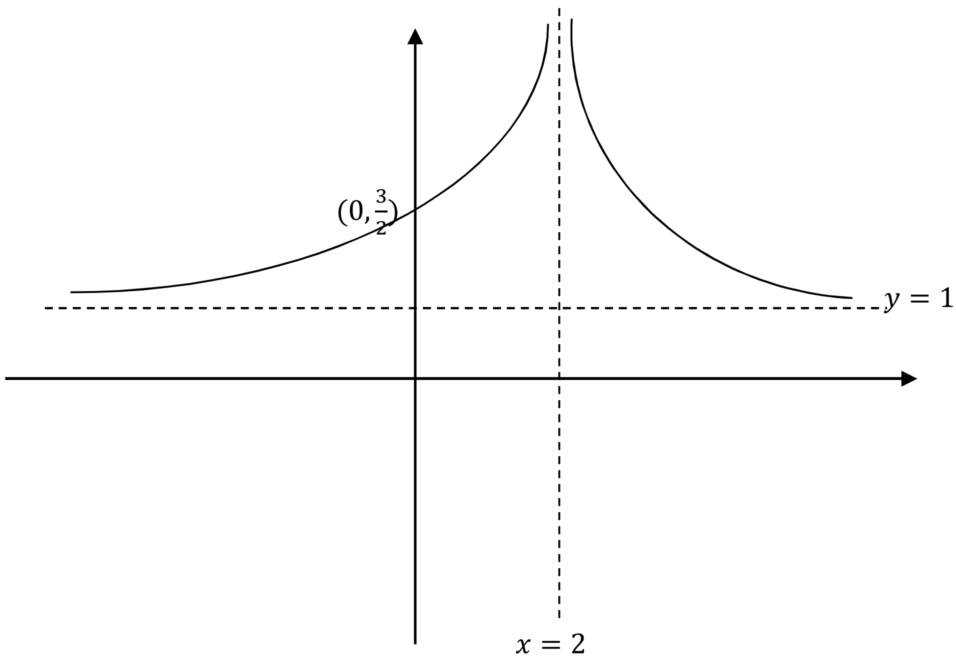
	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cup$

Convexa en todo o seu dominio

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Gráfica de $f(x) = 1 + \frac{2}{(x-2)^2}$



CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 4:

a) *Teorema fundamental do cálculo integral*: Se $f(x)$ é una función continua en $[a,b]$, entón a función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é derivable e ademais $F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b)$.

Aplicación:

Recta tanxente: $y - F(0) = F'(0)(x-0)$

$F(0) = 0$

$F'(x) = \frac{x^2+6}{2+e^x} \Rightarrow F'(0) = 2$

$\Rightarrow \boxed{Recta\ tanxente: y = 2x}$

b) Calculamos a integral indefinida

$$\int x ln(1+x)dx = \frac{x^2}{2} ln(1+x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x}dx = \frac{x^2}{2} ln(1+x) - \frac{1}{2}\int \left(x - 1 + \frac{1}{1+x}\right)dx =$$

$$\begin{cases} u = \ln(1+x) \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x} \\ dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

(grao numerador>grao denominador. Facemos a división)

$$= \frac{x^2}{2} ln(1+x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{2} - \frac{ln(1+x)}{2} + C$$

Aplicamos Barrow:

$$\int_0^1 x ln(1+x)dx = \left[\frac{x^2}{2} ln(1+x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{2} - \frac{ln(1+x)}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}ln2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}ln2$$

$$\boxed{\int_0^1 x ln(1+x)dx = 1/4}$$