



## RESOLUCIÓN DEL EXAMEN

## Solución del ejercicio 1

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x^2 - x + 2}{x + 5} \right)^{\frac{1}{x-3}} = 1^\infty = \text{INDETERMINADO}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x^2 - x + 2}{x + 5} \right)^{\frac{1}{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x^2 - x + 2 + x + 5 - x - 5}{x + 5} \right)^{\frac{1}{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \left( 1 + \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 5} \right)^{\frac{1}{x-3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \left[ \left( 1 + \frac{1}{\frac{x+5}{x^2-2x-3}} \right)^{\frac{x^2-2x-3}{x+5} \cdot \frac{1}{x-3}} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-2x-3}{(x+5)(x-3)}} = e^{\frac{0}{0}} = \text{IND.}$$

Resolviendo la indeterminación  $\frac{0}{0}$  por L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{(x+5)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x - 15} \stackrel{L'Hôp.}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 2}{2x + 2x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x^2 - x + 2}{x + 5} \right)^{\frac{1}{x-3}} = 1^\infty = e^{\frac{2}{3}}$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x = 0^0 = \text{INDETERMINADO}$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x \implies \ln L = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(\sin x) = 0 \cdot (-\infty) = \text{INDETERMINADO}$$

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty} \stackrel{L'Hôp.}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 \cdot \cos x}{\sin x} = \frac{0}{0} \stackrel{L'Hôp.}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x \cdot \cos x + x^2 \cdot \sin x}{\cos x} = 0$$

Por tanto

$$\ln L = 0 \implies L = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x = 1$$

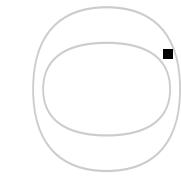
## Solución del ejercicio 2

a) Como  $y = e^x - 3$  es una función continua en su dominio, la  $f$  función ya es continua en  $(-\infty, 0)$ .

Como  $y = \frac{2}{x-1}$  es una función continua en su dominio,  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , la continuidad de  $f$  está garantizada en  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ .

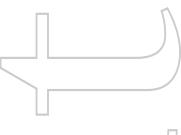
Por tanto,  $f$  es continua en  $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$

Basta hacer un estudio puntual en  $x = 0$  y en  $x = 1$ .



■ En  $x = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = e^0 - 3 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x - 3) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x-1} = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ es continua en } x = 0$$



■ En  $x = 1$ :



$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{Z}f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ no es continua en } x = 1 \\ (\text{Discontinuidad de salto infinito})$$

b) Asíntotas verticales:

Las asíntotas verticales se encontraron en el apartado anterior. Solo hay una, de ecuación  $x = 1$

Asíntotas horizontales:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 3) = 0 - 3 = -3$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x-1} = 0$

Es decir, hay una asíntota horizontal de ecuación  $y = -3$  (cuando  $x \rightarrow -\infty$ ), y otra de ecuación  $y = 0$  (cuando  $x \rightarrow +\infty$ )

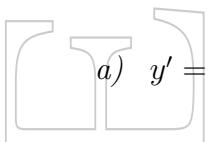
### Solución del ejercicio 3

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1-x^2}{x^2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{x^2(x-1)} \Rightarrow$$

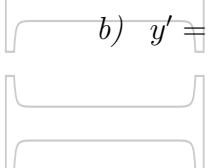


$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(x+1)}{x^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+1)}{x^2} = -2$$

### Solución del ejercicio 4



a)  $y' = \frac{\cos x \cdot (x^2 + x) - (2x + 1) \sin x}{(x^2 + x)^2}$



b)  $y' = \frac{1}{2}(\ln(2x^2 - 3x))^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{4x - 3}{2x^2 - 3x} = \frac{4x - 3}{2(2x^2 - 3x)\sqrt{\ln(2x^2 - 3x)}}$

## Solución del ejercicio 5

a) Para que  $f$  sea continua en  $x = -2$  (condición necesaria para la derivabilidad):

$$\left. \begin{array}{l} f(-2) = (-2)^2 + a(-2) + b = -2 \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x^2 + ax + b) = 4 - 2a + b \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (bx + 3) = -2b + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 - 2a + b = -2b + 3$$

$f$  continua en  $x = -2 \Rightarrow -2a + 3b = -1$

La derivabilidad de  $f$  ya está asegurada en  $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, +\infty)$ .

Para que  $f$  sea derivable en  $x = -2$ , debe existir  $y$  ser un número real el límite  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)}$ :

$$\left. \begin{array}{l} f'(-2^-) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} \stackrel{L'Hop}{=} \lim_{x \rightarrow -2^-} (2x + a) = -4 + a \\ f'(-2^+) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} \stackrel{L'Hop}{=} \lim_{x \rightarrow -2^+} b = b \end{array} \right\} \Rightarrow -4 + a = b$$

$f$  derivable en  $x = -2 \Rightarrow a - b = 4$

Por tanto, debemos resolver el sistema

$$\left. \begin{array}{l} -2a + 3b = -1 \\ a - b = 4 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} -2a + 3b = -1 \\ a - b = 4 \end{array} \right\} \xrightarrow{2F_2 \rightarrow F_2} \left. \begin{array}{l} -2a + 3b = -1 \\ 2a - 2b = 8 \end{array} \right\} \xrightarrow{F_1 + F_2 \rightarrow F_2} \left. \begin{array}{l} -2a + 3b = -1 \\ b = 7 \end{array} \right\}$$

$b = 7 \xrightarrow{a-b=4} a = 11$

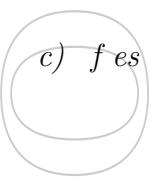
b) Para  $a = 11$  y  $b = 4$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 11x + 7 & \text{si } x \leq -2 \\ 7x + 3 & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ 3x^3 + x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

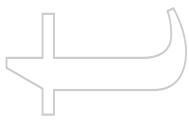
Primero hay que comprobar si  $f$  es continua en  $x = -1$ , dado que la continuidad es condición necesaria para la derivabilidad.

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = 7 \cdot (-1) + 3 = -4 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (7x + 3) = -4 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (3x^3 + x^2) = -3 + 1 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ no es continua en } x = -1 \Rightarrow$$

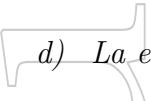
$\Rightarrow f \text{ no es derivable en } x = -1$



c)  $f$  es derivable en  $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ :

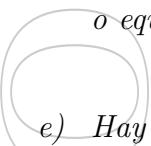


$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 11 & \text{si } x \leq -2 \\ 7 & \text{si } -2 < x < -1 \\ 9x^2 + 2x & \text{si } x > -1 \end{cases}$$



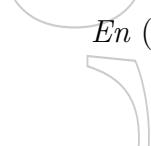
d) La ecuación punto-pendiente de la recta pedida es

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$



Como  $f(2) = 3 \cdot 2^3 + 2^2 = 28$ , y  $f'(2) = 9 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 40$ , entonces  $y - 28 = 40(x - 2)$   
o equivalentemente

$$y = 40x - 52$$



e) Hay que estudiar el signo y los puntos críticos de  $f'$  en el intervalo  $(-1, 1)$ :

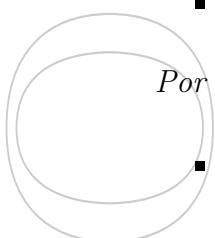
En  $(-1, 1)$ :



$$f'(x) = 0 \iff 9x^2 + 2x = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{2}{9} \end{cases}$$

Además, en  $(-1, 1)$ :

- $f' > 0 \iff x \in \left(-1, -\frac{2}{9}\right) \cup (0, 1)$
- $f' < 0 \iff x \in \left(-\frac{2}{9}, 0\right)$



Por tanto, en  $(-1, 1)$ :



- $f$  crece en  $\left(-1, -\frac{2}{9}\right) \cup (0, 1)$
- $f$  decrece en  $\left(-\frac{2}{9}, 0\right)$
- $f$  tiene un máximo relativo en  $x = -\frac{2}{9}$
- $f$  tiene un mínimo relativo en  $x = 0$

