IES O COUTO. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Matemáticas I
Global 2ª Evaluación. Tiempo estimado: 60 min

RESOLUCIÓN DEL EXAMEN

Solución del ejercicio 1

a) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-x+2}{x+5}\right)^{\frac{1}{x-3}} = 1^{\infty} = \mathit{INDETERMINADO}$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-x+2}{x+5}\right)^{\frac{1}{x-3}} = \lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-x+2+x+5-x-5}{x+5}\right)^{\frac{1}{x-3}} = \lim_{x\to 3}\left(1+\frac{x^2-2x-3}{x+5}\right)^{\frac{1}{x-3}}$$

$$= \lim_{x\to 3}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+5}{x^2-2x-3}}\right)^{\frac{x+5}{x^2-2x-3}}\right]^{\frac{x^2-2x-3}{x+5}\cdot\frac{1}{x-3}} = e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{(x+5)(x-3)}} = e^{\frac{0}{0}} = \mathit{IND.}$$

Resolviendo la indeterminación $\dfrac{0}{0}$ *por L'Hôpital:*

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{(x+5)(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2+2x-15} \overset{L'Hôp.}{=} \lim_{x\to 3}\frac{2x-2}{2x+2x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-x+2}{x+5}\right)^{\frac{1}{x-3}} = 1^{\infty} = e^{\frac{2}{3}}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\text{sen } x)^x = 0^0 = \mathit{INDETERMINADO}$

$$L = \lim_{x\to 0^+}(\text{sen } x)^x \implies \ln L = \lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(\text{sen } x) = 0\cdot(-\infty) = INDETERMINADO$$

$$\ln L = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\text{sen } x)}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty} \overset{L'Hôp}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\text{sen } x}\cdot\cos x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2\cdot\cos x}{\text{sen } x} = \frac{0}{0} \overset{L'Hôp}{=}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-2x\cdot\cos x + x^2\,\text{sen } x}{\cos x} = 0$$

Por tanto

$$\ln L = 0 \implies L = \lim_{x\to 0^+}(\text{sen } x)^x = 1$$

Solución del ejercicio 2

a) *Como* $y = e^x - 3$ *es una función continua en su dominio, la* f *función ya es continua en* $(-\infty, 0)$.

Como $y = \dfrac{2}{x-1}$ *es una función continua en su dominio,* $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, *la continuidad de* f *está garantizada en* $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Por tanto, f *es continua en* $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

Basta hacer un estudio puntual en $x=0$ *y en* $x=1$.

- *En* $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = e^0 - 3 = -2 \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (e^x - 3) = -2 \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2}{x-1} = -2 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \textit{ es continua en } x = 0$$

- *En* $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \nexists f(1) \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} f \textit{ no es continua en } x = 1 \\ \textit{(Discontinuidad de salto infinito)} \end{array}$$

b) *Asíntotas verticales:*

Las asíntotas verticales se encontraron en el apartado anterior. Solo hay una, de ecuación $x = 1$

Asíntotas horizontales:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - 3) = 0 - 3 = -3$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x-1} = 0$

Es decir, hay una asíntota horizontal de ecuación $y = -3$ *(cuando* $x \to -\infty$*), y otra de ecuación* $y = 0$ *(cuando* $x \to +\infty$*)*

Solución del ejercicio 3

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{1}{x^2} - 1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{1-x^2}{x^2}}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{1-x^2}{x^2(x-1)} \Longrightarrow$$

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{-(x-1)(x+1)}{x^2(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{-(x+1)}{x^2} = -2$$

Solución del ejercicio 4

a) $y' = \dfrac{\cos x \cdot (x^2 + x) - (2x+1) \operatorname{sen} x}{(x^2 + x)^2}$

b) $y' = \dfrac{1}{2} (\ln(2x^2 - 3x))^{-\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{4x-3}{2x^2 - 3x} = \dfrac{4x-3}{2(2x^2 - 3x)\sqrt{\ln(2x^2 - 3x)}}$

Solución del ejercicio 5

a) *Para que f sea continua en $x=-2$ (condición necesaria para la derivabilidad):*

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=(-2)^2+a(-2)+b=-2 \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}(x^2+ax+b)=4-2a+b \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}(bx+3)=-2b+3 \end{array}\right\} \Longrightarrow 4-2a+b=-2b+3$$

$$f \text{ continua en } x=-2 \Longrightarrow -2a+3b=-1$$

La derivabilidad de f ya está asegurada en $(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,+\infty)$.

Para que f sea derivable en $x=-2$, debe existir y ser un número real el límite $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}$:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle f'(-2^-)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} \overset{L'Hôp.}{=} \lim_{x\to -2^-}(2x+a)=-4+a \\[3ex] \displaystyle f'(-2^+)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} \overset{L'Hôp.}{=} \lim_{x\to -2^+} b=b \end{array}\right\} \Longrightarrow -4+a=b$$

$$f \text{ derivable en } x=-2 \Longrightarrow a-b=4$$

Por tanto, debemos resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} -2a+3b &=& -1 \\ a-b &=& 4 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcr} -2a+3b &=& -1 \\ a-b &=& 4 \end{array}\right\} \xrightarrow{2F_2\to F_2} \left.\begin{array}{rcr} -2a+3b &=& -1 \\ 2a-2b &=& 8 \end{array}\right\} \xrightarrow{F_1+F_2\to F_2} \left.\begin{array}{rcr} -2a+3b &=& -1 \\ b &=& 7 \end{array}\right\}$$

$$b=7 \quad \overset{a-b=4}{\Longrightarrow} \quad a=11$$

b) *Para $a=11$ y $b=4$*

$$f(x)=\begin{cases} x^2+11x+7 & si \quad x\le -2 \\[2ex] 7x+3 & si \quad 2<x\le -1 \\[2ex] 3x^3+x^2 & si \quad x>-1 \end{cases}$$

Primero hay que comprobar si f es continua en $x=-1$, dado que la continuidad es condición necesaria para la derivabilidad.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=7\cdot(-1)+3=-4 \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(7x+3)=-4 \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(3x^3+x^2)=-3+1=-2 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ no es continua en } x=-1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f \text{ no es derivable en } x=-1$$

c) *f es derivable en $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$:*

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+11 & si \quad x\leq -2 \\ 7 & si \quad 2<x<-1 \\ 9x^2+2x & si \quad x>-1 \end{cases}$$

d) *La ecuación punto-pendiente de la recta pedida es*

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)$$

Como $f(2)=3\cdot 2^3+2^2=28$, *y* $f'(2)=9\cdot 2^2-2\cdot 2=40$, *entonces* $y-28=40(x-2)$ *o equivalentemente*

$$y=40x-52$$

e) *Hay que estudiar el signo y los puntos críticos de f' en el intervalo $(-1,1)$:*

En $(-1,1)$:

$$f'(x)=0\Longleftrightarrow 9x^2+2x=0\Longleftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\dfrac{2}{9} \end{cases}$$

Además, en $(-1,1)$:

- $f'>0\Longleftrightarrow x\in\left(-1,-\dfrac{2}{9}\right)\cup(0,1)$
- $f'<0\Longleftrightarrow x\in\left(-\dfrac{2}{9},0\right)$

Por tanto, en $(-1,1)$:

- *f crece en* $\left(-1,-\dfrac{2}{9}\right)\cup(0,1)$
- *f decrece en* $\left(-\dfrac{2}{9},0\right)$
- *f tiene un máximo relativo en* $x=-\dfrac{2}{9}$
- *f tiene un mínimo relativo en* $x=0$