IES O COUTO. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Matemáticas I
Septiembre 2019. Tiempo estimado: 90 min

RESOLUCIÓN DEL EXAMEN

Solución del ejercicio 1

$$\frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{2}(2\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(2\sqrt{2}-\sqrt{3})(2\sqrt{2}+\sqrt{3})}+\sqrt[4]{2^2}\cdot\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{2}(2\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=$$

$$\frac{5\sqrt{2}(2\sqrt{2}+\sqrt{3})}{5}+\sqrt{6}=\sqrt{2}(2\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{6}=2\sqrt{2^2}+\sqrt{6}+\sqrt{6}=2\cdot 2+2\sqrt{6}=4+2\sqrt{6}$$

Solución del ejercicio 2

a) $4^x-3\cdot 2^x=0 \Longleftrightarrow (2^2)^x-3\cdot 2^x=0 \Longleftrightarrow (2^x)^2-3\cdot 2^x=0$

Si hacemos el cambio de variable $t=2^x$, entonces:

$$(2^x)^2-3\cdot 2^x=0 \Longleftrightarrow t^2-3t=0 \Longleftrightarrow t(t-3)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=3 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio:

- $t=0 \Longleftrightarrow 2^x=0.$
  Como $2^x>0$ para cualquier $x\in\mathbb{R}$, de esta posibilidad no obtenemos ninguna solución.
- $t=3 \Longleftrightarrow 2^x=3 \Longleftrightarrow \ln 2^x=\ln 3 \Longleftrightarrow x\ln 2=\ln 3 \Longleftrightarrow x=\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$

Por tanto, la única solución de la ecuación es $x=\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$

b) $2\cos^2 x+\operatorname{sen} x=2 \Longleftrightarrow 2(1-\operatorname{sen}^2 x)+\operatorname{sen} x=2 \Longleftrightarrow 2-2\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x=2 \Longleftrightarrow$

$$-2\,sen^2 x+\operatorname{sen} x=0 \Longleftrightarrow\Longleftrightarrow -\operatorname{sen} x(2\operatorname{sen} x-1)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x=0 \\ 2\operatorname{sen} x-1=0 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta las dos posibilidades anteriores:

- $\operatorname{sen} x=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_k=0+2\pi k & k\in\mathbb{Z} \\ x'_k=\pi+2\pi k & k\in\mathbb{Z} \end{cases}$
- $2\operatorname{sen} x-1=0 \Longleftrightarrow \operatorname{sen} x=\dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow \begin{cases} x''_k=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k & k\in\mathbb{Z} \\ \\ x'''_k=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k & k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

Solución del ejercicio 3

$$z^3-8=0 \Longleftrightarrow z^3=8 \Longleftrightarrow z^3=8_{0+2\pi k} \Longleftrightarrow z_k=\sqrt[3]{8}_{\frac{0+2\pi k}{3}}=z_k=2_{\frac{0+2\pi k}{3}}$$

- $k=0 \implies z_0 = 2_{0} = 2\,(\cos 0 + i \text{ sen } 0) \implies z_0 = 2$
- $k=1 \implies z_1 = 2_{0+\frac{2\pi}{3}} = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i \text{ sen } \dfrac{2\pi}{3}\right) \implies z_1 = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \implies$ $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$
- $k=2 \implies z_2 = 2_{0+\frac{4\pi}{3}} = 2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i \text{ sen } \dfrac{4\pi}{3}\right) \implies z_2 = 2\left(-\dfrac{1}{2} - i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \implies$ $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$

Solución del ejercicio 4

a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2} = \frac{0}{0} = INDETERMINADO$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to 3} \frac{(x^2-9)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x^2-9)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4} =$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x^2-9)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = \frac{0}{0} \overset{factorizando}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} =$$

$$\lim_{x\to 3} (x+3)(\sqrt{x+1}+2) = (3+3)(\sqrt{3+1}+2) = 24$$

El límite pedido podría haberse resuelto por L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2} \overset{L'Hôp.}{=} \lim_{x\to 3} \frac{2x}{\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{2\cdot 3}{\frac{1}{2}(3+1)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{6}{\frac{1}{2}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}} = \frac{6}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = 24$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{5x^2} = 1^{+\infty} = INDETERMINADO$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{5x^2} = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+1+1}{x^2+1}\right)^{5x^2} = \lim_{x\to +\infty} \left[\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^{x^2+1}\right]^{\frac{5x^2}{x^2+1}} =$$

$$e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{5x^2}{x^2+1}} = e^5$$

Solución del ejercicio 5

a) *Se trata de una función definida a trozos. En cada tramo de definición es una función racional.*

- *El denominador de la expresión* $y = \dfrac{x}{x^2-2x}$ *se anula para* $x=0$ *y* $x=2$*. Como ambos valores no pertenecen al intervalo* $(-\infty, 0)$*, la función* f *es continua en* $(-\infty, 0)$*.*
- *El denominador de la expresión* $y = \dfrac{3x^2+x}{x-1}$ *se anula en* $x=1$*, y dicho valor pertenece a* $(0, +\infty)$*.*

Por tanto, puede asegurarse la continuidad de la función en $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$. *Hay que estudiar puntualmente la continuidad en* $x=0$ *y en* $x=1$.

- *En* $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x(x-2)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2}\in\mathbb{R} \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{3x^2+x}{x-1}=0\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}\textit{Discontinuidad}\\ \textit{de salto finito}\\ \textit{en } x=0\end{array}$$

- *En* $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} \nexists f(1) \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{3x^2+x}{x-1}=\frac{4}{0^-}=-\infty \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{3x^2+x}{x-1}=\frac{4}{0^+}=+\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}\textit{Discontinuidad}\\ \textit{de salto infinito}\\ \textit{en } x=1\end{array}$$

b) *Las asíntotas verticales ya fueron encontradas en el apartado anterior. Solo hay una, con ecuación* $x=1$

Cálculo de asíntotas horizontales:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2+x}{x-1}=+\infty \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x^2-2x}=0\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad y=0 \textit{ es asíntota horizontal}$$

Cálculo de asíntotas oblicuas: como a la izquierda de la representación gráfica ya se encontró una asíntota horizontal, solo buscaremos a la derecha.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle m=\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2+x}{x(x-1)}=3\in\mathbb{R} \\[2ex] \displaystyle b=\lim_{x\to +\infty}(f(x)-3x)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x^2+x}{x-1}-3x\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x^2+x-3x^2+3x}{x-1}\right)=4\in\mathbb{R} \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \ y=3x+4 \textit{ es la asíntota oblicua}$$

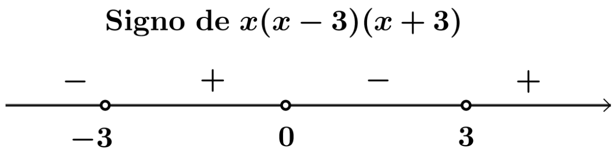
Solución del ejercicio 6

a) *Dom* $f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^3-9x>0\}$:

$$x^3-9x>0 \Longleftrightarrow x\cdot(x^2-9)>0 \Longleftrightarrow x(x-3)(x+3)>0$$

Por tanto:

$$Dom\, f=(-3,0)\cup(3,+\infty)$$



b) $f(x) = \ln(x^3 - 9x) \implies f'(x) = \dfrac{1}{x^3 - 9x} \cdot (3x^2 - 9) = \dfrac{3x^2 - 9}{x^3 - 9x}$

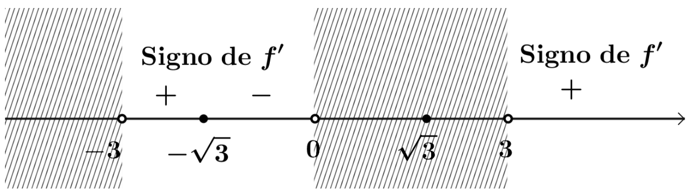
- *Buscamos los puntos críticos de la función, y analizamos el signo de la derivada:*

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 9 = 0 \iff 3(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0 \iff x = \pm\sqrt{3}$$

Como $\sqrt{3} \not\in$ *Dom* f, *el único punto crítico encontrado es* $x = -\sqrt{3}$

- *Para estudiar los cambios de signo de la derivada, tenemos en cuenta que el dominio de la función es* $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$, *y que*

$$f'(x) = \frac{3(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{x(x-3)(x+3)}$$



- *Por tanto:*
  - f *crece en* $(-3, -\sqrt{3}) \cup (3, +\infty)$
  - f *decrece en* $(-\sqrt{3}, 0)$
  - f *tiene un máximo relativo en* $x = -\sqrt{3}$

c) *La ecuación punto pendiente de la recta es* $y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$*:*

- $f(-1) = \ln 8$
- $f'(-1) = \dfrac{3 \cdot (-1)^2 - 9}{(-1)^3 - 9 \cdot (-1)} = -\dfrac{6}{8} = -\dfrac{3}{4}$

Por tanto, tenemos la recta

$$y - \ln 8 = -\frac{3}{4}(x + 1)$$

Solución del ejercicio 7

Se trata de una función definida a trozos.En los intervalos $(-\infty, 1)$ *y* $(1, +\infty)$ *está definida como un polinomio, por tanto,* f *ya es derivable en* $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.
Deberemos imponer condiciones para asegurar la derivabilidad en $x = 1$*:*

- *Como la continuidad en $x=1$ es condición necesaria para la derivabilidad, entonces*

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = -2+a \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} ax^2+bx+1 = a+b+1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} -2x^2+ax = -2+a \end{array}\right\} \Longrightarrow a+b+1 = -2+a$$

- *Para la derivabilidad en $x=1$*

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \overset{L'Hôp.}{=} \lim\limits_{x\to 1^-} 2ax+b = 2a+b \\ f'(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \overset{L'Hôp.}{=} \lim\limits_{x\to 1^+} -4x+a = -4+a \end{array}\right\} \Longrightarrow 2a+b = -4+a$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+1 = -2+a \\ 2a+b = -4+a \end{array}\right\} \Longrightarrow b=-3,\ a=-1$$

Solución del ejercicio 8

$$\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{\cos(2\alpha)+1} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha+1} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+1-\operatorname{sen}^2\alpha} =$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha}{2\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

Solución del ejercicio 9

a) *De las ecuaciones de r y s deducimos que los vectores normales a ambas son respectivamente $\overrightarrow{n_r}=(1,1)$ y $\overrightarrow{n_s}=(-3,1)$, por tanto, sus vectores directores son respectivamente $\overrightarrow{u_r}=(1,-1)$ y $\overrightarrow{u_s}=(1,3)$.*

El ángulo α formado por r y s coincide con el ángulo formado por sus vectores directores (en el plano, también coincide con el ángulo formado por los vectores normales). Deducimos dicho ángulo del producto escalar $\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}$:

$$\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s} = |\overrightarrow{u_r}|\cdot|\overrightarrow{u_s}|\cdot\cos\alpha \Longrightarrow (1,-1)\cdot(1,3) = \sqrt{1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}\cdot\cos\alpha \Longrightarrow$$

$$1-3 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{10}\cos\alpha \Longrightarrow -2 = 2\sqrt{5}\cos\alpha \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\Longrightarrow \alpha = \arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 116.57^\circ$$

b) *Los puntos $P\in r$ son de la forma $P=(t,3-t)$. Si utilizamos la fórmula de la distancia de P a s teniendo la ecuación general de s, entonces:*

$$d(P,s) = \frac{|-3t+3-t-1|}{\sqrt{(-3)^2+1^2}} = \sqrt{10} \Longleftrightarrow \frac{|-4t+2|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Longleftrightarrow |-4t+2| = 10 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -4t+2=10 \\ -4t+2=-10 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=-2 \\ t=3 \end{array}\right.$$

Por tanto, tenemos los puntos P_1 y P_2:

- $t = -2 \implies P_1 = (-2, 5)$
- $t = 3 \implies P_2 = (3, 0)$

c) *La ecuación general de la recta t, perpendicular a s y pasando por $A = (-3, 2)$, es de la forma $x + 3y + c = 0$.*

Como $A \in s$, entonces $-3 + 3 \cdot 2 + c = 0 \implies c = -3$. Es decir

$$t : x + 3y - 3 = 0$$

Calculamos ahora el punto $M = s \cap t$:

$$\left.\begin{array}{r} -3x + y - 1 = 0 \\ x + 3y - 3 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{F_1 + 3F_2 \to F_2} \left.\begin{array}{r} -3x + y - 1 = 0 \\ 3x + 9y - 9 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{F_1 + F_2 \to F_2} \left.\begin{array}{r} -3x + y - 1 = 0 \\ 10y - 10 = 0 \end{array}\right\} \implies$$

$$y = 1,\ x = 0 \implies M = (0, 1)$$

Si $A' = (x', y')$ es el punto simétrico de A respecto de s, se cumplirá la relación vectorial $\overrightarrow{AA'} = 2\,\overrightarrow{AM}$. Por tanto:

$$\left\{\begin{array}{l} x' - (-3) = 2(0 - (-3)) \\ y' - 2 = 2(1 - 2) \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} x' = 3 \\ y' = 0 \end{array}\right. \implies A' = (3, 0)$$