

Polinomios

Ejercicio 1 Dados $p(x) = x^2 - 2x - 2$, $q(x) = 2x - 1$, $r(x) = x^3 - 2x + 1$ y $s(x) = x^4$, calcula:

a) $p(x) - q(x)^2$

c) $s(x) - q(x) \cdot r(x)$

e) $s(x) : r(x)$

b) $s(x) : p(x)$

d) $q(x) \cdot p(x) - 2r(x)$

f) $p(x) - (r(x))^2$

Ejercicio 2 Calcula.

a) $(2x - 1) \cdot (2x + 1) - (3x)^2$

d) $(x - 1)^3$

b) $(2x + y)^2 - (y - 2x)^2$

e) $(a^5 - 2a^2)^2$

c) $\frac{(x + 2)^2}{2} - \left(\frac{x - 2}{2}\right)^2$

f) $(3x^3 - x)^2 - (2x^3 + x)^2$

Ejercicio 3 Efectúa las siguientes operaciones.

a) $3(x^3 - 5x + 7) - \frac{2}{3}(3x^3 - 6x^2 + 12x - 3)$

d) $\left[\frac{2x-1}{3}\right]^2 - \frac{x^2-3x}{9}$

b) $5(3z^2 - 5z + 1) - (2z + 3)^2$

e) $\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}(x^2 + 1)$

c) $6\left[\frac{3(x-5)}{2} - \frac{x^2-x}{2} - \frac{(x-1)^2}{3}\right]$

f) $\frac{3}{2}\left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 - 6$

Ejercicio 4 Sacar factor común.

a) $4a^2b^3 - 8a^3b^2 + 10a^3b^3$

c) $6x^4 - 12x^3 + 6x^2$

b) $\frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^6$

d) $\frac{ab^2}{c^2} + \frac{4a^2b}{c^3} - \frac{1}{2}\frac{a^2b^2}{c^2}$

Ejercicio 5 Factoriza las siguientes expresiones con ayuda de las identidades notables.

a) $x^2 + 2x + 1$

d) $t^2 - \frac{1}{9}$

g) $9z^2 - 25$

j) $4z^2 + 4z + 1$

b) $y^2 + 6y + 9$

e) $4x^2 + 9 - 12x$

h) $16u^2 - 1$

k) $25y^2 - 16z^4$

c) $z^2 - z + \frac{1}{4}$

f) $y^2 + 49 - 14y$

i) $\frac{x^2}{9} - 4y^2$

l) $\frac{25}{4}x^2 - 5x + 1$

Ejercicio 6 Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\frac{6x^2y^3z^4}{3x^2y^3z^5}$

c) $\frac{y^2 - 4}{3y - 6}$

e) $\frac{1 - x^2}{x - 1}$

b) $\frac{2y^4 - 4y^3}{12y^2 - 6y^3}$

d) $\frac{12y^2 - 27}{4y^2 - 12y + 9}$

f) $\frac{6ab^2 - 6ac^2}{2b + 2c}$

Ecuaciones

Ejercicio 7 Resuelve

$$a) \frac{x-4}{8} - \frac{x-6}{6} + \frac{x}{3} = 1$$

$$c) \frac{2(x-3)}{3} - \frac{3(x-4)}{4} = \frac{5(x-2)}{6} - \frac{1}{12}$$

$$b) z - \frac{3z+1}{4} = 2z - 1$$

$$d) \frac{5(x-2)}{4} - \frac{3-x}{36} = \frac{7}{3}x + \frac{7}{12}$$

Ecuaciones de segundo grado

- Una ecuación de segundo grado puede reducirse a una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

- Los números reales a, b y c se llaman coeficientes de la ecuación. Obviamente $a \neq 0$, pero según b y c sean nulos o no, distinguiremos entre ecuaciones completas e incompletas.

El tipo de ecuación de segundo grado determina el método de resolución:

- Ecuaciones completas $ax^2 + bx + c = 0$, con $b \neq 0$ y $c \neq 0$
 - Se llama discriminante de la ecuación a la cantidad $\Delta = b^2 - 4ac$
 - Para resolver la ecuación se utiliza la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

O equivalentemente

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vemos que el número de soluciones de una ecuación de segundo grado completa depende del valor del discriminante, de manera que:

- Si $\Delta > 0$, hay dos soluciones distintas
- Si $\Delta = 0$, hay una solución (se dice solución doble)
- Si $\Delta < 0$, no hay solución
- Ecuaciones incompletas de tipo $ax^2 + c = 0$, ($b = 0$): para resolverlas comenzamos despejando x^2
- Ecuaciones de tipo $ax^2 + bx = 0$, ($c = 0$): para resolverlas comenzamos factorizando la ecuación (sacando x factor común)

Ejercicio 8 Explica qué es el discriminante de una ecuación de segundo grado y qué relación tiene con el número de soluciones

Ejercicio 9 Resuelve. Si no hay solución indícalo

$$a) x^2 - 25 = 0$$

$$b) y^2 - 120 = 24$$

$$c) 6z^2 - 5 = 49$$

$$d) a^2 + 2 = 1$$

$$e) 4b^2 - 1 = 0$$

$$f) y^2 - 3 = 0$$

Ejercicio 10 Resuelve. Si no hay solución indícalo

a) $x^2 - 25x = 0$

b) $y^2 + 5y = 0$

c) $6z^2 - 5z = 0$

d) $3a^2 + 2a = -5a$

e) $4b^2 - b = 0$

f) $6y^2 - 12y = 6y$

Ejercicio 11 Resuelve. Si no hay solución indícalo

a) $z^2 - z + 2 = 0$

b) $x^2 - 8x + 16 = 0$

c) $14y^2 - 9y + 14 = 0$

d) $(z - 1)(z + 2) = 18$

e) $t^2 = 7t - 10$

f) $b^2 = b(b + 1) + 1$

Ejercicio 12 Resuelve por el método más adecuado según el tipo de ecuación. Si no hay solución indícalo

a) $4x^2 - 19 = x^2 - 18x$

b) $3.5x^2 + 3x = x^2 + 16$

c) $(y - 6)(y + 6) = -9$

d) $(2z - 1)^2 = 4$

e) $x^2 = \frac{1}{12}(1 - x)$

f) $(z - 1)(z + 1) - (2z - 1)^2 = 4z - 2$

g) $y - 4y^2 - 14 = 0$

h) $1 - \frac{z^2}{3} = z - \frac{z^2 - 2}{6}$

Problemas de enunciado

Ejercicio 13 La diferencia entre dos números es 2, y su producto 195. Calcúlalos

Ejercicio 14 Un padre reparte 60 euros entre sus tres hijos para que vayan a la feria. Al mediano le da el doble que al pequeño, y al mayor la da tanto como al pequeño y al mediano juntos. ¿Cuánto recibió cada uno?

Ejercicio 15 Si en un rectángulo se disminuyera la longitud de uno de los lados en 3 cm se obtendría un cuadrado de 144 cm^2 de área. ¿Cuáles son las dimensiones de dicho rectángulo?

Ejercicio 16 ¿Cuánto valía antes de las rebajas un abrigo que ahora cuesta 560 euros tras haberle aplicado un descuento del 30%?

Ejercicio 17 En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide tres centímetros más que el lado más pequeño. Si la diferencia entre los catetos es de un centímetro, calcula el perímetro del triángulo

Ejercicio 18 Si aumentásemos los lados de un cuadrado en 2 y 3 centímetros para obtener un rectángulo, este tendría un área de 56 cm^2 . ¿Cuál es entonces el lado del cuadrado?

Ejercicio 19 Pablo tiene 3 años y Fernando 4. Si su padre tiene 35, ¿cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea el doble de la suma de las edades de sus hijos?

Ejercicio 20 Dos hermanos se llevan un año de diferencia. Si el triple de la edad del mayor más el doble de la del menor es 103, calcula la edad de cada hermano

Ejercicio 21 La pintura utilizada para pintar una habitación cuesta 120 euros. Hay una oferta según la cual, si compramos otra clase de pintura que cuesta 2.25 euros menos el kilo, podríamos adquirir 12 kg más. ¿Cuánta pintura se puede comprar con la oferta?

Ejercicio 22 Los alumnos de tercero de ESO realizan una actividad extraescolar y el autobús les cuesta 320 euros. En el último momento se anotan tres alumnos más, y como consecuencia el autobús les cuesta 24 euros menos a cada uno. ¿Cuántos alumnos iban de excursión en un principio?

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistema lineal de dos ecuaciones y dos incógnitas

- Un sistema lineal es un conjunto de ecuaciones lineales
- Un punto es solución de un sistema si satisface todas las ecuaciones del sistema
- En un sistema lineal cada ecuación es una recta en el plano. Por tanto, la solución del sistema será un punto que cumpla las dos ecuaciones a la vez, o lo que es lo mismo, que esté en las dos rectas a la vez
- Si tenemos en cuenta cuáles son las posiciones relativas de dos rectas en el plano, al analizar el número de soluciones de un sistema lineal nos encontraremos con las siguientes posibilidades
 - Si las ecuaciones del sistema corresponden con dos rectas secantes, el sistema sólo tiene una única solución: el punto de corte de las rectas (sistema compatible determinado)
 - Si las ecuaciones del sistema corresponden con dos rectas coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones: los puntos de dicha recta (sistema compatible indeterminado)
 - Si las rectas son paralelas, el sistema no tiene solución (sistema incompatible)

Ejercicio 23 Determina si los pares de valores $(8, 0)$, $(0, -10.5)$, $(3, 1)$ y $(5, 2)$ son solución del sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 5x - 2y = 21 \end{cases}$$

Ejercicio 24 Completa los siguientes sistemas para que el a) y el b) tengan por solución $(5, 3)$, el c) y el d) tengan infinitas, y el e) y el f) no tengan ninguna.

$$a) \begin{cases} x - 4y = \dots \\ 2x \dots = 13 \end{cases} \quad b) \begin{cases} \frac{x}{10} - \frac{3y}{2} = \dots \\ 5x \dots = 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x - 2y = \dots \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x \dots = \dots \end{cases} \quad e) \begin{cases} 5x + 11y = \dots \\ \dots + 33y = 9 \end{cases} \quad f) \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x - 2y = \dots \end{cases}$$

Ejercicio 25 Resuelve gráficamente

$$a) \begin{cases} x = 6 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \quad b) \begin{cases} y = 5 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \quad e) \begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad f) \begin{cases} 4x - 8y = 4 \\ 2x - 4y = 5 \end{cases}$$

Ejercicio 26 Resuelve por el método algebraico que prefieras, explicando brevemente los pasos que das. Si no hay solución o si hay infinitas indícalo.

$$a) \begin{cases} 3x = 6 \\ 5x + \frac{4y}{3} = 14 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 1.2x + 0.7y = 7 \\ x - 0.5y = 1.5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{2}{5}y - \frac{x}{3} = \frac{1}{15} \\ 15x - 15y = 5 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x + 3 = 4y - 1 \\ 2(x - 3y) + x = 9 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 3(x - 1) + 3 = 2(x + 1) \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 3 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 3(x + 2) - 6(y + 1) = 9 \\ 4x - \frac{3y - 10}{2} = 5 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} \frac{x+y}{2} = 8 - \frac{x-y}{4} \\ \frac{2(x+y)}{3} = 2 + 3 \cdot \frac{x-y}{4} \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} 2 - 2(x + y) = 3y - 5 \\ \frac{y}{2} = 3 - \frac{x}{3} \end{cases}$$

Resuelve los siguientes problemas planteando y resolviendo el sistema (o ecuación) adecuados

Ejercicio 27 En una comitiva compuesta por camellos y dromedarios hay 39 cabezas y 51 jorobas. Determina cuántos animales hay de cada tipo

Ejercicio 28 Al comienzo de una clase hay dos veces más chicos que chicas. Seis chicos abandonan la clase y seis chicas más llegan, con lo cual, el número de chicas pasa a duplicar el de chicos. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas había al comienzo de la clase?

Ejercicio 29 El cociente de una división es 3 y el resto 5. Si disminuimos el divisor en dos unidades, el cociente aumenta una unidad, y el resto da 1. Calcula el dividendo y el divisor

Ejercicio 30 Acabo de salir de una cena y debo coger un taxi para regresar a mi casa. El primer taxista con el que hablo me propone el siguiente trato: subir al taxi me cuesta 5 euros, y por cada kilómetro recorrido, me cobrará 3 euros. El segundo taxista me propone una tarifa de 5 euros por cada kilómetro.

a) Determina a qué distancia debería estar mi casa para que me cobrasen igual

b) Si debo recorrer una distancia de 15 km, ¿qué taxi me sale más barato?

Ejercicio 31 La diferencia entre dos números es de 6 unidades. Si la mitad del mayor excede en 10 unidades a los tres octavos del menor, encuentra los números

Ejercicio 32 Antonio dice: -Si tuviera el doble de CDs de los que tengo, tendría siete más que tú- María le responde: -Si los dos compramos dos CDs cada uno, tendríamos entre ambos veinticuatro- ¿Cuántos CDs tiene cada uno?