

ÉQUATIONS

Une équation est une égalité entre deux quantités algébriques, qui traduit une situation dans laquelle une valeur (durée, somme d'argent, distance,...) est inconnue.

Éléments d'une équation

- L'inconnue x : c'est la variable notée par une lettre qui est dans l'équation
- Les deux membres séparés par le signe =

L'expression située à gauche du signe = est appelée **premier membre**, celle qui est située à droite est appelée **second membre** de l'équation.

- Terme : c'est chacun des termes d'une addition qui composent les membres de l'équation
- Degré : c'est le plus grand des exposants de l'inconnue, après avoir effectué les réductions des termes semblables

La solution d'une équation.

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue qui la vérifient. Les valeurs calculées sont appelées **solutions** de l'équation.

1. ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Équations du second degré encore appelée **équation quadratique**

Ce sont les équations qui, après transformations, se présente sous la forme suivante

$ax^2 + bx + c = 0$, dans laquelle **a**, **b** et **c** sont des nombres connus et **x** l'inconnue.

- **Équations complètes.** Si $b \neq 0$ et $c \neq 0$, on dit que l'équation est complète et les solutions sont données par la formule suivante :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Complète	$ax^2 + bx + c = 0$ $a, b, c \neq 0$	$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$ $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
----------	---	---

Nombre de solutions :

$$\text{Discriminant } \Delta = b^2 - 4ac$$

Selon le signe du discriminant, l'équation peut avoir une solution double, deux solutions différentes ou aucune solution.

Discriminant	Nombre de solutions
$\Delta > 0$	2
$\Delta = 0$	1 solution double
$\Delta < 0$	Pas de solution

- **Équations incomplètes.** Si $b=0$ ou $c=0$, l'équation est appelée incomplète et on peut résoudre sans la formule antérieure.

	Équation	Solutions
Incomplète	$ax^2 + bx = 0$ $a, b \neq 0$	$x(ax+b)=0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{b}{a} \end{cases}$
Incomplète	$ax^2 + c = 0$ $a, c \neq 0$	$x = +\sqrt{-\frac{c}{a}} ; x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

2. ÉQUATIONS D'AUTRE TYPE

- **Équations bicarrés.**

Ce sont les équations qui après transformations, se ramènent à la forme

$ax^4 + bx^2 + c = 0$, dans laquelle a, b et c sont des nombres connus et x l'inconnue. Une équation bicarré est de degré égal à 4 et n'a pas de termes de degré 3 et 1.

- **Équations avec fractions algébriques**
Pour résoudre ce type d'équations il faut qu'il n'y ait plus aucun dénominateur, alors on multiplie les deux membres de l'équation donnée par le PPCM et après on résout l'équation obtenue.
- **Équations avec radicaux**
Ce sont des équations où l'inconnue est dans un radical. Pour résoudre ces équations on laisse seule la racine dans un des membres et après on fait la puissance 2 de toute l'équation.
- **Équations du type $(ax+b) \cdot (cx+d) \cdot \dots = 0$**
Appliquer : le produit de deux facteurs est nul si et seulement si l'un des deux facteurs est nul.
 $(ax+b) \cdot (cx+d) = 0 \rightarrow ax+b=0$ ou $cx+d=0$

3. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINEAIRES

Une équation linéaire à deux inconnues est une identité algébrique du type $ax+by = c$

L'ensemble des points (x,y) du plan vérifiant $ax+by = c$ est une droite
 a,b,c sont des réels
 x, y sont deux inconnues

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues est un ensemble d'équations

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}$$

Résoudre ce système c'est trouver tous les couples de valeurs (x,y) pour lesquels les deux égalités sont vraies simultanément. C'est donc trouver toutes les solutions communes aux équations.

- **MÉTHODES PAR LA RÉOLUTION DE SYSTÈMES**

- **Résolution par la méthode de substitution.**

On calcule, dans l'une des équations, une des inconnues en fonction de l'autre, et on porte la valeur trouvée dans l'autre équation

- **Résolution par la méthode de comparaison**

Pour résoudre il faut isoler la même variable des deux équations et égaler les résultats pour trouver l'ensemble solution

- **Résolution par la méthode de combinaisons**

On multiplie les deux membres de chaque équation par des nombres choisis de sorte qu'en additionnant membre à membre les équations obtenues, l'une des inconnues disparaisse. Une telle méthode est aussi appelée méthode d'addition.

- **Interprétation graphique**

On calcule y en fonction de x dans chacune des équations ; on obtient deux fonctions affines ; dans un repère orthogonal, on construit les droites représentatives de ces fonctions. Le couple de coordonnées du point d'intersection est la solution graphique du système.

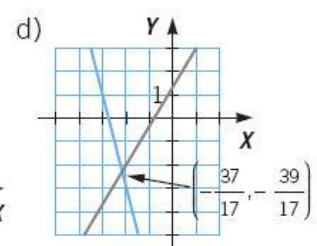
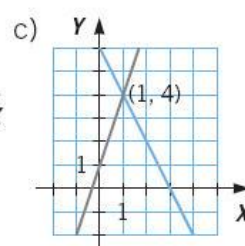
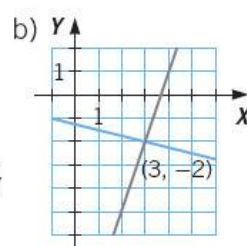
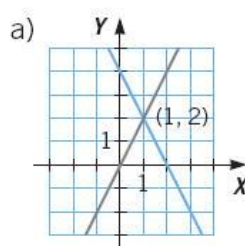
Exemples

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 4y = -5 \\ 3x - y = 11 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 5x - 3y = -4 \\ 4x + y = -11 \end{cases}$$



4. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS NON LINEAIRES

Ces sont des systèmes où il y a une ou plusieurs équations non linéaires (du degré plus grand que 1, avec des fractions algébriques, avec des radicaux.)

Exemples

$$a) \left. \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{x+3} - \frac{1}{y-3} = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y + 4x = -xy \\ y - 3 - x - 3 = -(x+3) \cdot (y-3) \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 4y + xy = 0 \\ -4x + 4y + xy = 15 \end{array} \right\}$$

$$\underline{\hspace{10em}} \hspace{1em} 8x = -15$$

$$8x = -15 \rightarrow x = \frac{-15}{8}$$

$$4x + 4y + xy = 0 \xrightarrow{x = \frac{-15}{8}} \frac{-60}{8} + 4y - \frac{15y}{8} = 0$$

$$\rightarrow -60 + 32y - 15y = 0 \rightarrow y = \frac{60}{17}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} \frac{1}{x} + y = \frac{5}{2} \\ \frac{2}{y} - 3x = -5 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2 + 2xy = 5x \\ 2 - 3xy = -5y \end{array} \right\} \rightarrow y = \frac{5x-2}{2x}$$

$$2 - 3xy = -5y \xrightarrow{y = \frac{5x-2}{2x}} 2 - \frac{15x+6}{2} = \frac{-25x+10}{2x}$$

$$\rightarrow 10x - 15x^2 = -25x + 10$$

$$15x^2 - 35x + 10 = 0 \rightarrow 3x^2 - 7x + 2 = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2 \rightarrow y_1 = 2 \\ x_2 = \frac{1}{3} \rightarrow y_2 = \frac{-1}{2} \end{array} \right.$$

5. INÉQUATIONS

Une inéquation est formée de deux membres séparés par l'un des signes $<$, $>$, \leq , \geq . Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue qui la vérifient. Ces valeurs sont les solutions de l'inéquation. Elles forment souvent un intervalle ou une réunion d'intervalles.

$a < b$ se lit : a plus petit que b ou a inférieur à b

$a > b$ se lit : a plus grand que b ou a supérieur à b

$a \leq b$ se lit : a plus petit ou égal à b ou a inférieur ou égal à b

$a \geq b$ se lit : a plus grand ou égal à b ou a supérieur ou égal à b

▪ PROPRIÉTÉS des inéquations

Pour résoudre une inéquation, on transforme son écriture. On peut :

- Ajouter une même somme algébrique aux deux membres
- Multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre strictement positif en conservant le sens de l'inéquation
- Multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre strictement négatif en changeant le sens de l'inéquation.

▪ Inéquations à une inconnue

Pour résoudre une inéquation à une inconnue, on transforme son écriture et on laisse l'expression algébrique dans un membre et un zéro dans l'autre. Après on la résout comme une équation et la solution est un intervalle ou une réunion d'intervalles

▪ SYSTÈMES D'INÉQUATIONS

C'est un ensemble d'inéquations dont le but est de calculer une solution commune.

Exemples

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 5 - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} > \frac{x-5}{6} \\ \frac{x+4}{5} - \frac{x}{6} > \frac{7}{10} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 60 - 4x - 3x > 2x - 10 \\ 6x + 24 - 5x > 21 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x < \frac{70}{9} \\ x > -3 \end{array} \right\}$$

Solution $(-3, \frac{70}{9})$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 5x - 2 \leq 0 \\ 3x + 4 > 0 \\ \frac{x+9}{2} \geq 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x \leq \frac{2}{5} \\ x > -\frac{4}{3} \\ x \geq -3 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{-4}{3} < x \leq \frac{2}{5}$$

Solution $(\frac{-4}{3}, \frac{2}{5}]$