ECUACIONES 2º GRADO, BICUADRADAS, IRRACIONALES.

ECUACIONES DE 2º GRADO, INCOMPLETAS, COMPLETAS

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

a) $\frac{x^2+1}{3} - 1 = \frac{x^2-4}{6} + x$

$$\frac{2x^2+2-6}{6} = \frac{x^2-4+6x}{6} \rightarrow x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(x-6) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{cases}$$

b) $\frac{x^2-x-4}{4} = \frac{x^2+x-2}{2}$

$$\frac{x^2-x-4}{4} = \frac{2x^2+2x-4}{4} \rightarrow x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(x+3) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

c) $x(x-3) + (x+4)(x-4) = 2 - 3x$

$$x^2 - 3x + x^2 - 16 = 2 - 3x \rightarrow 2x^2 = 18 \rightarrow x^2 = 9 \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

2.- Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:

a) $x^2 + (7 - x)^2 = 25$

$x^2 + 49 - 14x + x^2 = 25$

$2x^2 - 14x + 24 = 0$

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = 4 \\ \searrow x_2 = 3 \end{cases}$$

b) $-x^2 + 4x - 7 = 0$

$x^2 - 4x + 7 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-28}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-12}}{2} \notin \mathbb{R}$$

ECUACIONES BICUADRADAS

Forma $\boxed{ax^4 + bx^2 + c = 0}$

Las resolvemos haciendo un cambio de variable: $\boxed{x^2 = t \Rightarrow x^4 = \left(x^2\right)^2 = t^2}$

Ejemplos

a) $\mathbf{x^4 - 3x^2 + 2 = 0}$

1. Cambio de variable $x^2 = t$ y queda $t^2 - 3t + 2 = 0$
2. Resolvemos la ecuación para hallar t. $\Rightarrow t = \dfrac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \Rightarrow t = \dfrac{3 \pm 1}{2}$ $\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 1 \end{cases}$
3. Sustituimos los valores de t obtenidos para hallar los valores de x.

$$\begin{cases} t_1 = 2 \Rightarrow x^2 = t \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = -\sqrt{2} \end{cases} \\ t_2 = 1 \Rightarrow x^2 = t \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Hemos obtenido cuatro soluciones de x, los dos valores de t tienen solución.

b) $\mathbf{2x^4 + 4x^2 - 6 = 0}$

1. Cambio de variable $x^2 = t$ y queda $2t^2 + 4t - 6 = 0$
2. Resolvemos la ecuación para hallar t. $\Rightarrow t = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} \Rightarrow t = \dfrac{-4 \pm 8}{4}$ $\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -3 \end{cases}$
3. Sustituimos los valores de t obtenidos para hallar los valores de x.

$$\begin{cases} t_1 = 1 \Rightarrow x^2 = t \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \\ t_2 = -3 \Rightarrow x^2 = t \Rightarrow x^2 = -3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-3} \end{cases}$$

Hemos obtenido dos soluciones para x.

No tiene solución real.

1.- Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

$x^2 = y \rightarrow x^4 = y^2$

$$y^2 - 5y - 36 = 0 \rightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} \begin{cases} y_1 = 9 \\ y_2 = -4 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ x^2 = -4 \rightarrow \text{no hay solución} \end{array}\right\} \rightarrow \text{Soluciones: } x_1 = 3,\ x_2 = -3$$

b) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$x^2 = y \rightarrow x^4 = y^2$

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \rightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Soluciones: } x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$$

ECUACIONES IRRACIONALES

La incógnita se encuentra bajo un radical normalmente $\sqrt{\ }$.
Para resolverlas las transformamos elevando los dos miembros de la ecuación al cuadrado, tantas veces como haga falta hasta que desaparezcan todos los radicales.
Debemos comprobar si sus soluciones lo son también de la ecuación original.

Ejemplos

a) $\sqrt{x+5}+4=x+3$

1. Dejamos la raíz sola $\sqrt{x+5}=x+3-4 \Rightarrow \sqrt{x+5}=x-1$
2. Elevamos al cuadrado **los dos miembros de la ecuación** para quitar la raíz.

$$\left(\sqrt{x+5}\right)^2=(x-1)^2 \Rightarrow x+5=x^2-2x+1$$

3. Transponemos los términos y resolvemos la ecuación de segundo grado obtenida.

$$x+5=x^2-2x+1 \Rightarrow x^2-3x-4=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1} \Rightarrow x=\frac{3\pm 5}{2}\begin{cases}x_1=4\\x_2=-1\end{cases}$$

4. Comprobamos las soluciones.

$$\begin{cases}x_1=4 \Rightarrow \sqrt{4+5}+4=4+3 \Rightarrow 7=7 \Rightarrow 4 \text{ es solución}\\ x_2=-1 \Rightarrow \sqrt{-1+5}+4=-1+3 \Rightarrow 6\neq 2 \Rightarrow -1 \text{ no es solución}\end{cases}$$

b) $\sqrt{x+4}=\sqrt{x-1}+1$

1. Elevamos al cuadrado **los dos miembros de la ecuación** para quitar una de las raíces.

$$\left(\sqrt{x+4}\right)^2=\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2 \Rightarrow x+4=x-1+2\sqrt{x-1}+1$$

2. Dejamos la raíz sola como en el ejemplo anterior $4=2\sqrt{x-1} \Rightarrow 2=\sqrt{x-1}$

3. Elevamos al cuadrado y resolvemos la ecuación de primer grado obtenida.

$$2=\sqrt{x-1} \Rightarrow (2)^2=\left(\sqrt{x-1}\right)^2 \Rightarrow 4=x-1 \Rightarrow x=5$$

4. Comprobamos si el valor obtenido es solución.

$$\sqrt{5+4}=\sqrt{5-1}+1 \Rightarrow 3=3 \Rightarrow 5 \text{ es solución}$$

SISTEMAS NO LINEALES

- Despejamos la x o la y de grado uno de una de las dos ecuaciones, la más fácil.
- Sustituimos este valor en la otra.
- Resolvemos la ecuación resultante, que puede ser de primer grado, de segundo, bicuadrada...
- Sustituimos los valores obtenidos en el paso anterior en la ecuación despejada al principio para hallar los valores de la otra incógnita.

Resolver el siguiente sistema $\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x \cdot y = -3 \end{cases}$

1. Numeramos las dos ecuaciones $\Rightarrow$ $\begin{matrix} 1^a \\ 2^a \end{matrix} \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x \cdot y = -3 \end{cases}$

2. Despejamos la x o la y de primer grado. En este caso **la x de la segunda ecuación.**

$$x = \frac{-3}{y}$$

3. Sustituimos este valor en la primera.

$$x^2 - y^2 = 8 \Rightarrow \left(\frac{-3}{y}\right)^2 - y^2 = 8 \Rightarrow \frac{9}{y^2} - y^2 = 8$$

4. Reducimos a común denominador y resolvemos la ecuación bicuadrada.

$$\frac{9 - y^4}{y^2} = \frac{8\,y^2}{y^2} \Rightarrow y^4 + 8y^2 - 9 = 0$$

$$y^2 = t \Rightarrow t^2 + 8t - 9 = 0 \Rightarrow t = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow t = \frac{-8 \pm 10}{2} \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = 1 \Rightarrow y^2 = t \Rightarrow y = \pm\sqrt{1} \Rightarrow y = \pm 1 \\ t_2 = -9 \Rightarrow \text{no es solución} \end{cases}$$

5. Calculamos los valores de x, sustituyendo los valores de y en la ecuación despejada en 1.

$$x = \frac{-3}{y} \quad \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = \dfrac{-3}{1} \Rightarrow x = -3 \\ y = -1 \Rightarrow x = \dfrac{-3}{-1} \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

Solución $\begin{cases} (-3, 1) \\ (3, -1) \end{cases}$

4. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales:

1. – $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases}$ $sol: (1,4) ó (4,1)$

2. – $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$ $sol: (2,3) ó (3,2)$

3. – $\begin{cases} 3x + 2y = 15 \\ xy = 9 \end{cases}$ $sol: (3,3) ó (2, \frac{9}{2})$

4. – $\begin{cases} (5 + x)(3y - 2) = 154 \\ 2x + 3y = 28 \end{cases}$ $sol: (2,8) ó (6, \frac{16}{3})$

5. – $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 - 5xy = 25 \end{cases}$ $sol: (3,-1) ó (-1,3)$

6. – $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 9 \\ xy = -2 \end{cases}$ $sol: (-2,1) ó (2,-1) ó (\frac{\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2}) ó (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2})$

7. – $\begin{cases} xy = 24 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 1 \end{cases}$ $sol: (6,4)$

8. – $\begin{cases} (x + 2y)^2 - 5x + 3y = 26 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ $sol: (1,2) ó (25,-6)$

9. – $\begin{cases} (2x - 1)^2 - 3x(2y + 3) = -21 \\ x + y = 3 \end{cases}$ $sol: (2,1) ó (\frac{11}{10}, \frac{19}{10})$

10. – $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ xy = -3 \end{cases}$ $sol: (3,-1) ó (-3,1)$

11. – $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{2y + 1}{9} = \frac{x - y}{x} \\ \frac{2x + y}{3} - \frac{x + y}{2} = \frac{3x - y}{6} - \frac{1}{3} \end{cases}$ $sol: (1,1)$

12. – $\begin{cases} \frac{3x + y}{2} - \frac{5y + x}{x} = 2 \\ \frac{x}{5} - \frac{y + 1}{2} = -4 \end{cases}$ $sol. (5,9) ó \left(-\frac{70}{17}, \frac{91}{17}\right)$

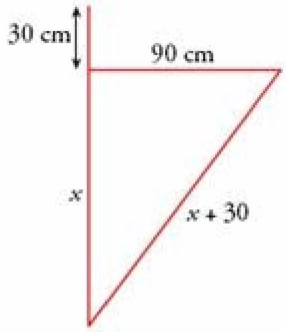
En un lago hay una flor a 90 cm de la orilla. Cuando el tallo está vertical, la flor sobresale 30 cm sobre la superficie. Inclinando la flor, con el tallo estirado, la corola toca la orilla. ¿qué profundidad tiene el lago?

Utilizando el teorema de Pitágoras:

$(x + 30)^2 = x^2 + 90^2 \rightarrow x^2 + 60x + 900 = x^2 + 8\,100$

$60x = 7\,200 \rightarrow x = \dfrac{7\,200}{60} = 120$

La profundidad del lago es de 120 m.



Los lados de un triángulo miden 18 cm, 16 cm y 9 cm. Si restamos una misma cantidad a los tres lados, obtenemos un triángulo rectángulo. ¿Qué cantidad es esa?

$(18 - x)^2 = (16 - x)^2 + (9 - x)^2$

$324 + x^2 - 36x = 256 + x^2 - 32x + 81 + x^2 - 18x \rightarrow x^2 - 14x + 13 = 0$

$x = \dfrac{14 \pm \sqrt{196 - 52}}{2} = \dfrac{14 \pm 12}{2} \begin{cases} x_1 = 13 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

$x = 13$ no puede ser, porque nos quedaría una longitud negativa $(9 - 13 < 0)$.

Solución: $x = 1$ cm es la cantidad restada.