INECUACIONES

DEFINICIÓN

Una inecuación es una desigualdad algebraica en la que sus dos miembros aparecen ligados por uno de estos signos:

<	**menor que**	**$2x - 1 < 7$**
≤	**menor o igual que**	**$2x - 1 \leq 7$**
>	**mayor que**	**$2x - 1 > 7$**
≥	**mayor o igual que**	**$2x - 1 \geq 7$**

La **solución** de una inecuación es el **conjunto de valores de la variable que verifica la inecuación**.

Podemos expresar la solución de la inecuación mediante:

Una representación gráfica.

Un intervalo.

$2x - 1 < 7$

$2x < 8 \Leftrightarrow x < 4$

Solución $x \in (-\infty, 4)$

CRITERIOS DE EQUIVALENCIA DE INECUACIONES

1.- Si a los dos miembros de una inecuación se les suma o se les resta un mismo número, la inecuación resultante es equivalente a la dada.

$3x + 4 < 5 \Leftrightarrow 3x + 4 - 4 < 5 - 4 \Leftrightarrow 3x < 1$

2.- Si a los dos miembros de una inecuación se les multiplica o divide por un mismo número positivo, la inecuación resultante es equivalente a la dada.

$2x < 6 \quad \Leftrightarrow \quad x < 3$

3.-Si a los dos miembros de una inecuación se les multiplica o divide por un mismo número negativo, la inecuación resultante **cambia de sentido** y es equivalente a la dada.

$-2x < 6 \Leftrightarrow x > -3$

INECUACIONES DE 2º GRADO

1º Obtenemos las raíces de la ecuación de segundo grado, para ello igualamos el polinomio a cero.

2º Representamos las raices obtenidas en la recta real. Tomamos un punto de cada intervalo en el que queda dividida la recta y evaluamos el signo en él:

3º Representamos estos signos en la recta real. Elegimos la solución teniendo en cuenta le inecuación inicial.

EJEMPLO

1.- Consideremos la inecuación: $\mathbf{x^2 - 6x + 8 > 0}$

Obtenemos las raíces: $x^2 - 6x + 8 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{8}{2} = 4 \\ \searrow x_2 = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

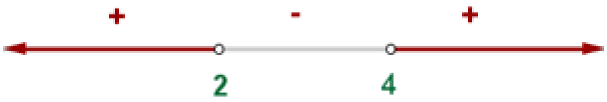
Representamos estos valores en la recta real. Tomamos un punto de cada intervalo(0, 3, 5) y evaluamos el signo en cada intervalo:

$P(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 8 > 0$

$P(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = 17 - 18 < 0$

$P(5) = 5^2 - 6 \cdot 5 + 8 = 33 - 30 > 0$

Representamos estos signos en la recta real. Evaluamos el signo de la inecuación > 0, por tanto la solución se da en dos tramos:



Solución = $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$

2.- Resuelve: $x^2 + 2x + 1 \geq 0$

$(x + 1)^2 \geq 0$

Como un número elevado al cuadrado es siempre positivo la solución es $\mathbb{R}$

		Solución
$x^2 + 2x + 1 \geq 0$	$(x + 1)^2 \geq 0$	$\mathbb{R}$
$x^2 + 2x + 1 > 0$	$(x + 1)^2 > 0$	$\mathbb{R} - \{-1\}$
$x^2 + 2x + 1 \leq 0$	$(x + 1)^2 \leq 0$	$x = -1$
$x^2 + 2x + 1 < 0$	$(x + 1)^2 < 0$	$\varnothing$

$x^2 + x + 1 > 0$

$x^2 + x + 1 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Cuando no tiene raíces reales, le damos al polinomio cualquier valor si:

El signo obtenido coincide con el de la desigualdad, la solución es $\mathbb{R}$.

$x^2 + 2x + 1 \geq 0$

INECUACIONES IRRACIONALES

Las **inecuaciones racionales** se resuelven de un modo similar a las de **segundo grado**, pero hay que tener presente que **el denominador no puede ser cero**.

EJEMPLO

1.-Resuelve la siguiente inecuación

$$\frac{x-2}{x-4} \geq 0$$

1º **Hallamos las raíces del numerador y del denominador.**

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

2º **Representamos estos valores en la recta real, teniendo en cuenta que las raíces del denominador, independientemente del signo de la desigualdad, tienen que ser abiertas.**

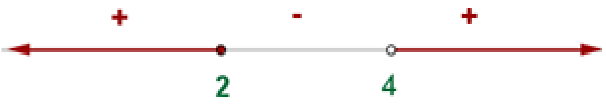
3ºTomamos **un punto de cada intervalo y evaluamos el signo** en cada intervalo:

$$\frac{x-2}{x-4} \geq 0 \qquad x \neq 4$$

$x = 0$ $\qquad \dfrac{0-2}{0-4} > 0$

$x = 3$ $\qquad \dfrac{3-2}{3-4} < 0$

$x = 5$ $\qquad \dfrac{5-2}{5-4} > 0$



4º **La solución está compuesta por los intervalos** (o el intervalo) qu**e tengan el mismo signo que la fracción polinómica**.

Solución = (-∞, 2] $\cup$ **(4, ∞)**

2.- Resuelve

$$\frac{x+3}{x-2} < 2$$

Pasamos el 2 al primer miembro y ponemos a común denominador.

$$\frac{x+3}{x-2} - 2 < 0 \qquad \frac{x+3-2(x-2)}{x-2} < 0 \qquad \frac{-x+7}{x-2} < 0$$

Hallamos las raíces del numerador y del denominador.

$-x + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 7$

$x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$

Evaluamos el signo:

$$x = 0 \qquad \frac{0+7}{0-2} < 0$$

$$x = 3 \qquad \frac{3+7}{3-2} > 0$$

$$x = 8 \qquad \frac{-8+7}{8-2} < 0$$

Solución = (-∞, 2) $\cup$ **(7, ∞)**

EJERCICIOS RESUELTOS DE INECUACIONES

Resolver las siguientes inecuaciones

1. $2(x+1)-3(x-2)<x+6$

$2x+2-3x+6<x+6$

$2x-3x-x<-2-6+6$

$-2x<-2 \Leftrightarrow 2x>2 \Leftrightarrow x>1$

Solución : $\{x \in R, x \in (1,\infty)\}$

2. $\dfrac{3x+1}{7}-\dfrac{2-4x}{3} \geq \dfrac{-5x-4}{14}+\dfrac{7x}{6}$

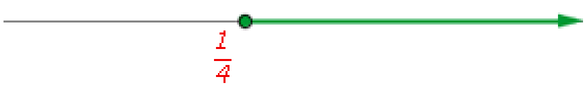
$m.c.m.(7,\ 3,\ 14,\ 6)=42$

$6(3x+1)-14(2-4x) \geq 3(-5x-4)+49x$

$18x+6-28+56x \geq -15x-12+49x$

$18x+56x+15x-49x \geq -12-6+28$

$\mathbf{40x \geq 10}$ $\qquad$ $\mathbf{4x \geq 1}$ $\qquad$ $\mathbf{x \geq \frac{1}{4}}$



Solución $\left[\frac{1}{4},\ \infty\right)$

3. $6\left(\dfrac{x+1}{8}-\dfrac{2x-3}{16}\right)>3\left(\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}\right)-\dfrac{3}{8}(3x-2)$

$\mathbf{\dfrac{6(x+1)}{8}-\dfrac{6(2x-3)}{16}>\dfrac{9}{4}x-\dfrac{3}{4}-\dfrac{9}{8}x+\dfrac{6}{8}}$

$\text{m.c.m.}(8,\ 16,\ 4)=16$

$$\cancel{12x} + 12 \cancel{-12x} + 18 > 36x \cancel{-12} - 18x \cancel{+12}$$

$$12 + 18 > 36x - 18x$$

$18x < 30 \qquad 3x < 5 \qquad\qquad x < \frac{5}{3}$ $\qquad\qquad$ Solución $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$

Resuelve el sistema:

4. $\begin{cases} (x+1) \cdot 10 + x \leq 6\,(2x+1) \\ 4(x-10) < -6(2-x) - 6x \end{cases}$

$(x+1)\,10 + x \leq 6\,(2x+1) \Leftrightarrow 10x + 10 + x \leq 12x + 6 \Leftrightarrow 10x + x - 12x \leq 6 - 10$

$-x \leq -4 \Leftrightarrow$ $\underline{x \geq 4}$

$4(x-10) < -6(2-x) - 6x \Leftrightarrow 4x - 40 < -12 + 6x - 6x \Leftrightarrow 4x - 6x + 6x < -12 + 40$

$4x < 28 \Leftrightarrow$ $\underline{x < 7}$

Ahora pasamos a representar la solución de cada una de las ecuaciones para dar la solución del sistema:

Solución : [4, 7)

5. $7x^2 + 21x - 28 < 0 \Leftrightarrow$

$x^2 + 3x - 4 < 0$

Buscamos las raices igualando a cero: $x^2 + 3x - 4 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{matrix} \nearrow x_1 = 1 \\ \searrow x_2 = -4 \end{matrix}$$

Las representamos en la recta real y elegimos un nº (-6, 0, 3)perteneciente a cada uno de los tramos en que queda dividida la recta para ver cual es su signo:

$P(-6) = (-6)^2 + 3(-6) - 4 > 0$

$P(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 - 4 < 0$

$P(3) = 3^2 + 3 \cdot 3 - 4 > 0$

Por tanto la solución es: $(-4, 1)$

6. $-x^2 + 4x - 7 < 0$

$x^2 - 4x + 7 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-28}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-12}}{2} \not\in \mathbb{R}$$

$P(0) = -0^2 + 4 \cdot 0 - 7 < 0$

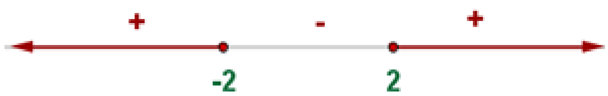
S olución= $\mathbb{R}$

7. $4x^2 - 16 \geq 0$

Resolvemos la ecuación: $4x^2 - 16 = 0$

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_1 = -2, \quad x_2 = 2.$

Las representamos en la recta real



$P(-3) = 4 \bullet (-3)^2 - 16 > 0$

$P(0) = 4 \bullet 0^2 - 16 < 0$

$P(3) = 4 \bullet 3^2 - 16 > 0$

Solución: $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

8. $x^4 + 12x^3 - 64x^3 > 0$

$x^2(x^2 + 12x - 64) > 0$

Como el primer factor es siempre positivo, sólo tendremos que estudiar el signo del 2º factor.

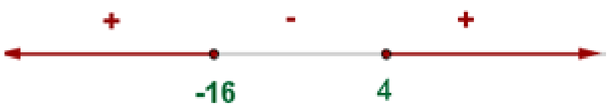
$x^2 + 12x - 64 = 0$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 256}}{2} = \frac{-12 \pm 20}{2} = \begin{cases} \nearrow x_2 = 4 \\ \searrow x_3 = -16 \end{cases}$$

$P(-17) = (-17)^2 + 12 \cdot 17 - 64 > 0$

$P(0) = 0^2 + 12 \cdot 0 - 64 < 0$

$P(5) = 5^2 + 12 \cdot 5 - 64 > 0$



Solución: $(-\infty, -16] \cup [4, \infty)$

9. $x^4 - 25x^2 - 144 < 0$

$x^4 - 25x^2 - 144 = 0$. Ecuación bicuadrada, hacemos un cambio de variable

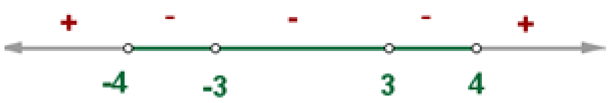
$x^2 = t$

$t^2 - 25t + 144 = 0$

$$t = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = 16 \\ \searrow t_2 = 9 \end{cases}$$

$x^2 = 16 \qquad x = \pm\sqrt{16} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = 4 \\ \searrow x_2 = -4 \end{array}$

$x^2 = 9 \qquad x = \pm\sqrt{9} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = 3 \\ \searrow x_2 = -3 \end{array}$



Solución: $(-4, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, 4)$.

10. $x^4 - 16x^2 - 225 \geq 0$

$x^4 - 16x^2 - 225 = 0$

$x^2 = t$

$t^2 - 16t - 225 = 0$

$$t = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 900}}{2} = \frac{16 \pm 34}{2} = \begin{array}{l} \nearrow t_1 = 25 \\ \searrow t_2 = -9 \end{array}$$

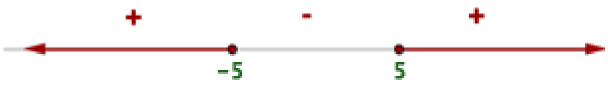
$x^2 = 25 \qquad x = \pm\sqrt{25} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = 5 \\ \searrow x_2 = -5 \end{array}$

$x^2 = -9 \qquad x = \pm\sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$

11. $(x^2 - 25) \bullet (x^2 + 9) \geq 0$

El segundo factor siempre es positivo y distinto de cero, sólo tenemos que estudiar el signo del 1er factor.

$(x^2 - 25) \geq 0$



Solución: $(-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$

12. Resuelve

$$\frac{x^2 - 1}{-x^2 + 2x - 1} \leq 0$$

$x^2 - 1 = 0$ $\qquad$ $x = \pm 1$

$-x^2 + 2x - 1 = 0$ $\qquad$ $x^2 - 2x + 1 = 0$ $\qquad$ $x = 1$

$-(x - 1)^2$

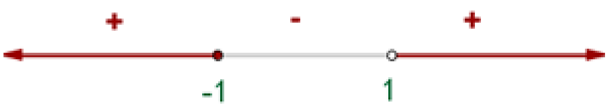
$$\frac{x^2 - 1}{-\underbrace{\boxed{(x-1)^2}}_{+}} \leq 0 \qquad x \neq 1$$

El binomio elevado al cuadrado es siempre positivo, pero al tener delante el signo menos. resultará que el denominador será siempre negativo.

$$\frac{x^2 - 1}{-1} \leq 0 \qquad x \neq 1$$

Multiplicando por −1:

$x^2 - 1 \geq 0$ $\qquad$ $x \neq 1$



Solución $(--\infty , -1] \cup (1, +\infty)$

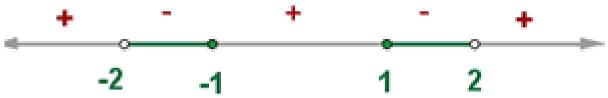
13. Resuelve

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \leq 0$$

$x^2 - 1 = 0$ $\qquad$ $x = \pm 1$

$x^2 - 4 = 0$ $\qquad$ $x = \pm 2$

$\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \leq 0$ $\qquad$ $x \neq \pm 2$



Solución $[-2, -1] \cup (1, 2)$

14.

$$\frac{2}{3}\left[x - \left(1 - \frac{x-2}{3}\right)\right] + 1 \leq x$$

$$\frac{2}{3}\left(x - 1 + \frac{x-2}{3}\right) + 1 \leq x$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} + \frac{2x - 4}{9} + 1 \leq x$$

$$6x - 6 + 2x - 4 + 9 \leq 9x$$

$-x \leq 1$ $\qquad$ $x \geq -1$

Solución $[-1, \infty)$

15.

$$\frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} \geq 0$$

$x^2 + 4 = 0 \qquad x = \pm\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$

El numerador siempre es positivo.

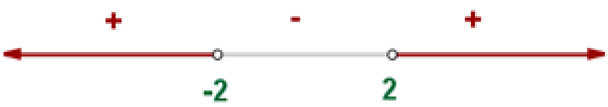
$$x^2 - 4 = 0 \qquad x = \pm\sqrt{4} \begin{cases} \nearrow x_1 = 2 \\ \searrow x_2 = -2 \end{cases}$$

El denominador no se puede anular.

$$\frac{1}{x^2 - 4} \geq 0 \qquad x \neq -2 \qquad x \neq 2$$

Por lo que la inecuación original será equivalente a:

$x^2 - 4 > 0$



$(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

16. Halla los valores de k para los que las raíces de la ecuación $x^2 - 6x + k = 0$ sean las dos reales y distintas.

El discriminante ha de ser positivo, $D = b^2 - 4ac > 0$

$(-6)^2 - 4k > 0$

$36 - 4k > 0 \Leftrightarrow -4k > -36 \Leftrightarrow k < 9$

Solución: $k \in (-\infty, 9)$