EJERCICIOS DE LOGARITMOS RESUELTOS

A) Calcular aplicando la definición de logaritmo el valor de y:

1) $\log_{\frac{1}{2}} 0.25 = y$

$\left(\frac{1}{2}\right)^y = 0.25$ $\quad\quad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^y = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\quad\quad$ $y = 2$

2) $\log_{\sqrt{5}} 125 = y$

$\sqrt{5}^y = 125$ $\quad\quad$ $5^{\frac{1}{2}y} = 5^3$ $\quad\quad$ $y = 6$

3) $\log 0.001 = y$

$10^y = 0.001$ $\quad\quad$ $10^y = 10^{-3}$ $\quad\quad$ $y = -3$

4) $\ln \frac{1}{e^5} = y$

$e^y = \frac{1}{e^5}$ $\quad\quad$ $e^y = e^{-5}$ $\quad\quad$ $y = -5$

5) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[5]{\frac{1}{81}} = y$

$\sqrt{3}^y = \sqrt[5]{\frac{1}{81}}$ $\quad\quad$ $3^{\frac{1}{2}y} = 3^{-\frac{4}{5}}$ $\quad\quad$ $y = -\frac{8}{5}$

B)Calcula el valor de x aplicando la definición de logarítmo:

1) $\log_2 32 = x$

$2^x = 32$ $\quad$ $2^x = 2^5$ $\quad$ $x = 5$

2) $\log_9 \frac{1}{3} = x$

$(9)^x = \frac{1}{3}$ $\quad$ $3^{2x} = 3^{-1}$ $\quad$ $x = -\frac{1}{2}$

3) $\log_{\frac{1}{2}} 0.25 = x$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{25}{100}$ $\quad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{4}\right)$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\quad$ $x = 2$

4) $\log_9 \sqrt[4]{3} = x$

$(9)^x = \sqrt[4]{3}$ $\quad$ $3^{2x} = 3^{\frac{1}{4}}$ $\quad$ $x = \frac{1}{8}$

5) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} = x$

$\left(\sqrt{2}\right)^x = \frac{1}{4}$ $\quad$ $2^{\frac{1}{2}x} = 2^{-2}$ $\quad$ $x = -4$

6) $\log_x 81 = -4$

$X^{-4} = 81$ $x^4 = \frac{1}{81}$ $x = \frac{1}{3}$

7) $\log_2 x^3 = 6$

$x^3 = 2^6$ $x = 4$

C) Siendo log 2 = 0'3010. Calcula:

Solo me pueden aparecer logaritmos de potencias de 10 y logaritmo de 2:

1) $\log 0.02$

$$\log\left(\frac{2}{100}\right) = \log 2 - \log 10^2 = \log 2 - 2 = 0.3010 - 2 = -1.699$$

2) $\log \sqrt[4]{8}$

$$\log \sqrt[4]{2^3} = \frac{3}{4}\log 2 = \frac{3}{4}\cdot 0.3010 = 0.2257$$

3) $\log 5$

$$\log\left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0.3010 = 0.699$$

4) $\log 0.0625$

$$\log\left(\frac{625}{10000}\right) = \log\left(\frac{5^4}{2^4 \bullet 5^4}\right) = \log\left(\frac{1}{2^4}\right) =$$

$$\log 1 - \log 2^4 = 0 - 4\log 2 = -1.2040$$

D) Calcula los logaritmos de las expresiones que se indican:

1) $$\ln \frac{x^2 \cdot y \cdot (m+n)}{m \cdot n} =$$

Aplico la propiedad del logaritmo e un cociente

$$= \ln \left[x^2 \cdot y \cdot (m+n)\right] - \ln (m \cdot n) =$$

Tenemos el logaritmo de un producto, aplico su propiedad en las dos expresiones

$$= \ln x^2 + \ln y + \ln(m+n) - (\ln m + \ln n) =$$

$$= 2\ln x + \ln y + \ln(m+n) - \ln m - \ln n$$

2) $$\log_2 \frac{a^2 - b^2}{a \cdot b} =$$

$$= \log_2 \frac{(a+b)\cdot(a-b)}{a \cdot b} =$$

$$= \log_2 \left[(a+b)\cdot(a+b)\right] - \log_2 (a \cdot b) =$$

$$= \log_2 (a+b) + \log_2 (a-b) - (\log_2 a + \log_2 b) =$$

$$= \log_2 (a+b) + \log_2 (a-b) - \log_2 a - \log_2 b$$

3) $\log\ 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

$$\log\ 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=\log\ 2+\log\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=$$

$$=\log\ 2+\frac{1}{2}\log\left(2\sqrt{2\sqrt{2}}\right)=\log\ 2+\frac{1}{2}\left[\log\ 2+\frac{1}{2}\log\left(2\sqrt{2}\right)\right]=$$

$$=\log\ 2+\frac{1}{2}\left[\log\ 2+\frac{1}{2}\left(\log\ 2+\log\sqrt{2}\right)\right]=$$

$$=\log\ 2+\frac{1}{2}\left[\log\ 2+\frac{1}{2}\left(\log\ 2+\frac{1}{2}\log 2\right)\right]=$$

$$=\log\ 2+\frac{1}{2}\log\ 2+\frac{1}{4}\log\ 2+\frac{1}{8}\log 2=\frac{15}{8}\log\ 2$$

E)Calcula mediante **logaritmos** el valor de x.

1) $x=\sqrt[5]{493}$

Aplicamos logaritmos a ambos miembros

$$\log\ x=\log\ \sqrt[5]{493}$$

Tenemos el logaritmo de un radical, aplicamos su propiedad:

$$\log\ x=\frac{1}{5}\cdot\log\ 493=\frac{1}{5}\cdot 2.6928=0.5386$$

Despejamos "x":

$$x=\text{antilog}\ 0.5386=3.456$$

2) $x=\dfrac{\sqrt[3]{0.3688}}{22.958^5}$

$$\log x = \log \frac{\sqrt[3]{0.3688}}{22.958^5}$$

$$\log x = \log \sqrt[3]{0.3688} - \log\ 22.958^5 = \frac{1}{3}\log 0.3688 - 5\log\ 22.958$$

$$\log x = -6.949$$

$$x = \text{antilog } -6.949 = 1.124 \cdot 10^{-7}$$

3) $$x = \frac{425 \cdot \sqrt{2.73}}{\sqrt[3]{48.4}}$$

$$\log x = \log \frac{425 \cdot \sqrt{2.73}}{\sqrt[3]{48.4}}$$

$$\log x = \log\left(425 \cdot \sqrt{2.73}\right) - \log\ \sqrt[3]{48.4}$$

$$\log x = 2.6284 + \frac{1}{2} \cdot 0.4362 - \frac{1}{3} \cdot 1.6848 = 2.2849$$

$$x = \text{antilog } 2.2849 = 192.71$$

ECUACIONES LOGARITMICAS

1

$$2 \log x = 3 + \log \frac{x}{10}$$

Aplicamos la propiedad del logarítmo de un cociente en el 2º miembro:

$$2 \log x = 3 + \log x - \log 10$$

2 log x - log x = 3 - log 10

$\log x = 3 - 1$ $\quad$ $\log x = 2$ $\quad$ $x = 100$

2

$$\log x + \log(x+3) = 2\log(x+1)$$

Aplico una propiedad en el 1º miembro y otra en el 2º:

$$\log\left[x(x+3)\right] = \log(x+1)^2$$

$$x(x+3) = (x+1)^2$$

$$x^2 + 3x = x^2 + 2x + 1 \qquad x = 1$$

3

$$4\log\left(\frac{x}{5}\right) + \log\left(\frac{625}{4}\right) = 2\log x$$

Aplico la misma propiedad en el 1º miembro que en el 2º:

$$\log\left(\frac{x}{5}\right)^4 + \log\left(\frac{625}{4}\right) = \log x^2 \qquad \log\left(\frac{x^4}{625}\cdot\frac{625}{4}\right) = \log x^2$$

$$\log\left(\frac{x^4}{4}\right) = \log x^2 \qquad \frac{x^4}{4} = x^2 \qquad x^4 - 4x^2 = 0$$

$x = 0$ $\quad x = -2$ $\quad x = 2$

4

$$2\log x - 2\log(x+1) = 0$$

Aplico la misma propiedad en el 1º miembro y expreso el 2º miembro como log 1:

$$\log x^2 - \log(x+1)^2 = \log 1$$

Aplico en el 1º miembro una propiedad:

$$\log \frac{x^2}{(x+1)^2} = \log 1 \qquad \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1$$

$$2x + 1 = 0 \qquad x = -\frac{1}{2} \qquad \text{Sin solución}$$

5

$$\log x = \frac{2 - \log x}{\log x}$$

log x . log x = 2 - log x → $(\log x)^2 = 2 - \log x$

Obtenemos una ecuación de 2º grado cuya incógnita es **log x,** la resolvemos haciendo el cambio de variable log x = t

$$(\log x)^2 + \log x - 2 = 0 \qquad \log x = t$$

$$t^2 + t - 2 = 0 \qquad t = 1 \qquad t = -2$$

$$\log x = 1 \qquad x = 10$$

$$\log x = -2 \qquad x = 10^{-2} = \frac{1}{100}$$

6

$$\log(25 - x^3) - 3\log(4 - x) = 0$$

$$\log(25 - x^3) = \log(4 - x)^3 \qquad (25 - x^3) = (4 - x)^3$$

$$25 - x^3 = 64 - 48x + 12x^2 - x^3$$

$$12x^2 - 48x + 39 = 0 \qquad x = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

7

$$\frac{\log\left(16 - x^2\right)}{\log(3x - 4)} = 2$$

$$\log\left(16 - x^2\right) = 2\log(3x - 4)$$

$$\log\left(16 - x^2\right) = \log(3x - 4)^2 \qquad \left(16 - x^2\right) = (3x - 4)^2$$

$$10x^2 - 24x = 0 \qquad x = 0 \qquad x = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

8

$$\frac{\log\left(35 - x^3\right)}{\log(5 - x)} = 3$$

$$\log\left(35 - x^3\right) = 3\log(5 - x)$$

$$\log\left(35 - x^3\right) = \log(5 - x)^3 \qquad \left(35 - x^3\right) = (5 - x)^3$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad x = 2 \qquad x = 3$$

9

$$\log 2 + \log\left(11 - x^2\right) = 2\log(5 - x)$$

$$\log\left[2\left(11 - x^2\right)\right] = \log(5 - x)^2$$

$$2\left(11-x^2\right)=(5-x)^2$$

$$3x^2-10x+3=0$$

$x=3$ $\qquad 11-3^2>0 \qquad 5-3>0$

$x=\dfrac{1}{3}$ $\qquad 11-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2>0 \qquad 5-\dfrac{1}{3}>0$

Las dos soluciones son válidas.

SISTEMAS LOGARÍTMICOS

Recuerda que tenemos dos incógnitas: x e y.

1

$$\begin{cases}\log x+\log y=2\\ x-y=20\end{cases}$$

En la 1ª ecuación aplico una propiedad de los logaritmos en el 1º miembro y expreso 2 en función del logaritmo como logaritmo de 100; despejo una incógnita:

$\log(xy)=\log 100 \qquad xy=100 \qquad x=\dfrac{100}{y}$

Sustituyo en la 2ª ecuación "x" t obtengo una ecuación de 2º grado con incógnita "y":

$\dfrac{100}{y}-y=20 \qquad y^2+20y-100=0$

$$y=\frac{-20\pm\sqrt{400+400}}{2}=\frac{-20\pm 20\sqrt{2}}{2}=-10+10\sqrt{2}$$

$y=10\left(\sqrt{2}-1\right) \qquad x=10\left(\sqrt{2}+1\right)$

2

$$\begin{cases} \log x + \log y = \log 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Aplicamos la propiedad de logaritmos en la 1ª ecuación:

$$\log(xy) = \log 2 \qquad xy = 2 \qquad x = \frac{2}{y}$$

Sustituimos en la 2ª ecuación la expresión de "x" y obtenemos una ecuación bicuadrada:

$$\left(\frac{2}{y}\right)^2 + y^2 = 5 \qquad y^4 - 5y^2 + 4 = 0$$

$$y^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \begin{cases} y^2 = 4 & \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases} \\ y^2 = 1 & \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$y = 2 \qquad x = 1$$

$$y = 1 \qquad x = 2$$

3

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

Aplicamos la propiedad de logaritmo en la 2ª ecuación y despejo una incógnita:

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log 10$$

$$\frac{x}{y} = 10 \qquad x = 10y$$

Sustituyo el valor de 2x" en la 1ª ecuación y resuelvo la ecuación cuadrada obtenida:

$$100y^2 - y^2 = 11$$

$$y^2 = \frac{11}{99} = \frac{1}{9} \qquad \begin{cases} y = \frac{1}{3} \qquad x = \frac{10}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

4

$$\begin{cases} \log_x(y - 18) = 2 \\ \log_y(x + 3) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Aplicando la definición, obtenemos:

$$\begin{cases} x^2 = y - 18 \\ y^{\frac{1}{2}} = x + 3 \end{cases}$$

Elevamos ambos miembros de la 2ª al cuadrado y sustituimos la expresión de y obtenida en la 1ª:

$$y = (x+3)^2 \qquad x^2 = (x+3)^2 - 18$$

Desarrollamos, se simplifican los términos cuadráticos , con lo cual :

$$x = \frac{3}{2} \qquad y = \frac{81}{4}$$