RADICALES

1.1 Radicales

La radicación es la operación inversa de la *potenciación*. Si una potencia es:

$$a^n = b$$

La radicación es la operación que tiene que obtener *a* conociendo *b* y *n*. Se expresa:

$$f : a^n = b \longrightarrow f^{-1} : a = \sqrt[n]{b}$$

> Se llama raíz n-ésima de un número real *b* a otro número real *a* cuya potencia n-ésima es igual a *b*

$$\sqrt[n]{b} = a \qquad \begin{cases} \sqrt[n]{b} : \; es\, el\, radical \\ b : es\; el\; radicando \\ n : \; es\, el\, índice \\ a : es\, la\, raíz \end{cases}$$

Un radical puede llevar coeficientes que formen parte de el como por ejemplo $3\sqrt[n]{b}$ donde 3 es el coeficiente y forma parte del radical.

Si $n = 2$, es la raíz cuadrada y se acostumbra a omitir el índice
Si $n = 3$, es la raíz cúbica
Si $n = 4$, es la raíz cuarta y así sucesivamente

Como consecuencia de las reglas sobre los signos de las potencias de exponente natural y base negativa tenemos que

- Toda raíz de índice impar de un número tiene el mismo signo que el radicando

$$\sqrt[3]{8} = 2 \;\; ya\; que\;\; 2^3 = 8$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \;\; ya\; que\;\; (-2)^3 = -8$$

- Toda raíz de índice par de un número positivo tiene doble signo

$$\sqrt{16} = \pm 4 \;\; ya\, que\; 4^2 = (-4)^2 = 16$$

- Toda raíz de índice par y radicando negativo no es real

$$\sqrt[4]{-64}$$

EJERCICIOS:

Calcula el valor de los siguientes radicales identificando en cada uno de ellos índice, radicando y raíz:

1. $\sqrt{9}$
2. $\sqrt[3]{-8}$
3. $\sqrt{64}$
4. $\sqrt[3]{125}$
5. $\sqrt{256}$
9. $\sqrt[4]{625}$
10. $\sqrt{\dfrac{256}{729}}$
11. $\sqrt[3]{-\dfrac{125}{512}}$
12. $\sqrt[5]{7776}$
13. $\sqrt[3]{0.064}$

6. $\sqrt[4]{256}$

7. $\sqrt[5]{-32}$

8. $\sqrt[4]{\dfrac{81}{256}}$

14. $\sqrt[5]{-\dfrac{1024}{243}}$

15. $\sqrt[3]{\dfrac{8}{125}}$

16. $\sqrt{0.0004}$

1.2 Transformaciones de radicales

1.2.1 Teorema fundamental de la radicación

> Si se multiplica o divide el índice de la raíz y el exponente del radicando por un mismo número entero, el valor aritmético del radical no varía.

Demostración

Sea el radical $\sqrt[n]{A^p} = b$

Por definición de raíz: $A^p = b^n$

Elevamos los dos términos de la igualdad a una potencia *q:* $\left(A^p\right)^q = \left(b^n\right)^q$

o sea: $A^{pq} = b^{nq}$.

Extraemos la raíz de *índice* $n \cdot q$: $\sqrt[nq]{A^{p \cdot q}} = \sqrt[nq]{b^{nq}} = b$

Luego queda demostrado (por definición de raíz)

$$\boxed{\sqrt[n]{A^p} = \sqrt[nq]{A^{pq}}} \qquad (1)$$

Este teorema permite la simplificación de radicales, definir la potenciación de exponente fraccionario y la reducción a índice común.

Ejemplos:

a) $\sqrt{3a} = \sqrt[4]{(3a)^2} = \sqrt[4]{9a^2}$;

b) $\sqrt[3]{2a^2(x^2+y)} = \sqrt[6]{2^2 a^4 (x^2+y)^2}$;

c) $\sqrt[5]{x^2+y^2} = \sqrt[10]{(x^2+y^2)^2}$

d) $\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{6^2} = \sqrt{6}$

e) $\sqrt[10]{32} = \sqrt[10]{2^5} = \sqrt{2}$

EJERCICIOS:

Escribe tres radicales iguales a cada uno de los siguientes radicales:

17) $\sqrt{3xy}$ 18) $\sqrt[3]{2x^2z}$ 19) $\sqrt[4]{5xy^2z}$ 20) $\sqrt[3]{2ab^2}$ 21) $\sqrt[4]{3xy^3z^2}$ 22) $\sqrt[5]{\dfrac{xy^2}{z^3}}$

1.2.2 Simplificación de radicales

Para **simplificar** un radical se divide el índice del radical y el exponente del radicando por sus factores comunes (por el m.c.d).

Ejemplos:

a) $\sqrt[6]{324} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 3^4} = \sqrt[6]{(2 \cdot 3^2)^2} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^2} = \sqrt[3]{18}$

b) $\sqrt[18]{27a^9} = \sqrt[18]{3^3 (a^3)^3} = \sqrt[18]{(3a^3)^3} = \sqrt[6]{3a^3}$

c) $\sqrt{\dfrac{9b^2}{x^2 y^4}} = \sqrt{\dfrac{3^2 b^2}{x^2 (y^2)^2}} = \sqrt{\dfrac{(3b)^2}{(xy^2)^2}} = \sqrt{\left(\dfrac{3b}{xy^2}\right)^2} = \dfrac{3b}{xy^2}$

EJERCICIOS:

23) $\sqrt{25a^4 b^6 c^{10}}$ 24) $\sqrt[3]{27a^3 b^9 c^{12}}$ 25) $\sqrt{\dfrac{x^2}{y^{20}}}$

26) $\sqrt{\dfrac{25m^2 n^6}{81a^{10} x^4}}$ 27) $\sqrt{\dfrac{16a^4}{49b^8 c^2}}$ 28) $\sqrt{\dfrac{81a^2 b^2 c^8}{144x^2 y^6}}$

29) $\sqrt[3]{-\dfrac{125x^{12}}{64(a-b)^9}}$ 30) $\sqrt[5]{-243(a+b)^{10}}$ 31) $\sqrt[4]{25x^2}$

32) $\sqrt[6]{8x^3 y^3}$ 33) $\sqrt[9]{64x^3 y^6}$ 34) $\sqrt[10]{32a^5}$

35) $\sqrt[12]{\dfrac{16a^8}{81b^4}}$ 36) $\sqrt[15]{\dfrac{27m^3 n^6}{125a^6 b^9}}$ 37) $\sqrt[5]{\dfrac{-1}{x^5 y^{15}}}$

1.2.3 Reducción de radicales a índice común

Se opera de manera similar a la de reducción a común denominador en fracciones:

- El índice común será el m.c.m de los índices.
- Se divide el índice común por cada índice y el cociente se multiplica por el exponente del radicando.

Ejemplos:

a) Reducir a índice común $\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{7}$

El m.c.m (2, 3, 4) = 12

$\dfrac{12}{2} = 6 \qquad \dfrac{12}{3} = 4 \qquad \dfrac{12}{4} = 3 \qquad \Rightarrow \sqrt[12]{3^6},\ \sqrt[12]{5^4},\ \sqrt[12]{7^3}$

b) Reducir a índice común $\sqrt{3ax^3}$, $\sqrt[6]{3(x-2a)}$ y $\sqrt[4]{5a^3 b^2}$

El m.c.m (2, 6, 4) = 12

$\frac{12}{2}=6 \quad \frac{12}{6}=2 \quad \frac{12}{4}=3$

$\sqrt[12]{(3ax^3)^6},\ \sqrt[12]{(3(x-2a))^2}\ \ y\ \sqrt[12]{(5a^3b^2)^3} \Rightarrow \sqrt[12]{3^6a^6x^{18}},\ \sqrt[12]{3^2(x-2a)^2}\ \ y\ \sqrt[12]{5^3a^9b^6}$

EJERCICIOS:

Reduce a índice común los siguientes radicales:

38) $\sqrt{m},\ \sqrt[3]{m^2},\ \sqrt[4]{m^3},\ \sqrt[6]{m^5},\ \sqrt[8]{m^3}$ 39) $\sqrt{x},\ \sqrt[5]{2x},\ \sqrt[8]{3x^3},\ \sqrt[10]{4x^7},\ \sqrt[20]{3x^9}$

40) $\sqrt[3]{3x^2y},\ \sqrt[4]{5xy^3},\ \sqrt[6]{7x^2y^5},\ \sqrt[9]{6x^5y^4}$ 41) $\sqrt{x},\ \sqrt[5]{x^3},\ \sqrt[15]{x^2}$

42) $\sqrt[4]{xy},\ \sqrt[6]{xy^3},\ \sqrt[15]{xy^2}$

1.2.3 Potenciación de exponente fraccionario

Una **potencia de exponente fraccionario** es equivalente a un radical cuyo índice es el denominador del exponente y cuyo radicando es la base elevada al numerador del exponente

$$\boxed{A^{p/n}=\sqrt[n]{A^p}} \tag{2}$$

Demostración:
Si dividimos el índice y el exponente del radicando de un radical por el índice tenemos que:

$$\sqrt[n]{A^p}=\sqrt[n/n]{A^{p/n}}=A^{p/n}$$

Esto nos permite poner los radicales en forma de potencias y operar con ellos utilizando las reglas de la potenciación.

Ejemplos:

a) $8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}$ b) $\left(ab^2\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\left(ab^2\right)^2}=\sqrt[3]{a^2b^4}$ c) $x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{x^{1/3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

EJERCICIOS:

Escribe como potencias los siguientes radicales:

43) $\sqrt{2x}$; 44) $\sqrt[3]{x^2}$; 45) $\sqrt[4]{ab^2}$; 46) $\sqrt[5]{\frac{a+1}{a-1}}$; 47) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$; 48) $\frac{2b\sqrt[3]{3x}}{3\sqrt{x}}$

Escribe como radicales las siguientes potencias:

49) $3^{\frac{2}{3}}$ 50) $(2-x)^{\frac{5}{2}}$ 51) $5^{-\frac{2}{5}}$ 52) $(-2)^{\frac{2}{3}}$ 53) $\frac{3+2^{-1}}{3-4^{-\frac{1}{5}}}$ 54) $4x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{4}}$

1.3 Operaciones con radicales

1.3.1 Producto de radicales

a) De radicales homogéneos (de igual índice)

Sean los radicales de igual índice $\sqrt[n]{A}$ y $\sqrt[n]{B}$. Se tiene que:

$$\begin{cases} \sqrt[n]{A} = r \Rightarrow r^n = A \\ \sqrt[n]{B} = s \Rightarrow s^n = B \end{cases}$$

Multiplicando ordenadamente: $r^n \cdot s^n = (r \cdot s)^n = A \cdot B$

Extrayendo la raíz *n*-ésima: $\sqrt[n]{(r \cdot s)^n} = r \cdot s = \sqrt[n]{A \cdot B}$

Sustituyendo *r* y *s* por su valor:

$$\boxed{\sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A \cdot B}} \qquad (3)$$

El **producto de radicales de igual índice** es otro radical que tiene el mismo índice y por radicando el producto de los radicandos de los factores.

b) De radicales no homogéneos

Si los radicales no tienen igual índice se reducen previamente a índice común.

Ejemplos:

a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{35}$ b) $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a^2} = \sqrt[4]{a^3}$ c) $\sqrt{3} \cdot 2\sqrt[3]{2} \cdot 5\sqrt[4]{2}$

Reducimos a índice común. m.c.m (2, 3, 4) = 12

$\sqrt[12]{3^6} \cdot 2\sqrt[12]{2^4} \cdot 5\sqrt[12]{2^3} = 10\sqrt[12]{3^6 \cdot 2^7}$

Observa que se multiplican por un lado los coeficientes (5 y 2) y por otro lado los radicales

EJERCICIOS:

Efectúa los productos siguientes:

55) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$ 56) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^5}$ 57) $\sqrt{\frac{a}{2b}} \cdot \sqrt{\frac{b^2}{a}}$ 58) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3}$

59) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5}$ 60) $\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{5}$ 61) $\sqrt{2x} \cdot \sqrt[3]{3x^2} \cdot \sqrt[6]{x^5}$

62) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ 63) $\sqrt[4]{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt[6]{\frac{y}{x}} \cdot \sqrt[3]{xy}$ 64) $\sqrt[5]{ab^2c^3} \cdot \sqrt[5]{a^2b^2c^2} \cdot \sqrt{abc}$

65) $2a\sqrt{a} \cdot ab\sqrt[3]{b} \cdot c\sqrt[5]{abc}$ 66) $3\sqrt[3]{a^2b} \cdot 2\sqrt[4]{a^2b^2}$

1.3.2.1 Extracción de factores fuera del signo radical

La expresión (3) nos permite simplificar radicales cuando uno de los factores tiene raíz *n*-ésima exacta:

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt[4]{a^7} = \sqrt[4]{a^4 \cdot a^3} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{a^3} = a\sqrt[4]{a^3}$$

- Se divide el exponente del radicando por el índice de la raíz.
- El cociente se escribe como exponente del factor fuera del signo radical.
- El resto de la división se escribe como exponente del factor dentro del radical.

Ejemplo: $\sqrt[5]{x^{17}}$

Hacemos la división 17/5 y obtenemos de cociente 3 y de resto 2 por lo tanto

$$\sqrt[5]{x^{17}} = x^3\sqrt[5]{x^2}$$

El proceso paso a paso sería:

- separamos x^{17} en dos factores , de tal forma que uno ellos sea el múltiplo del índice más próximo al exponente del radicando $\sqrt[5]{x^{17}} = \sqrt[5]{x^{15}x^2}$
- aplicamos la expresión (3) $\sqrt[5]{x^{15}} \cdot \sqrt[5]{x^2}$
- simplificamos el primer radical: $\sqrt[5/5]{x^{15/5}} \cdot \sqrt[5]{x^2} = x^3 \cdot \sqrt[5]{x^2}$

Si el radicando tiene varios factores, se efectúa la división del exponente de cada factor por el índice de la raíz

Ejemplos:

$$\sqrt{x^3y^5z^2} = xy^2z\sqrt{xy} \qquad \begin{cases} 3/2 \Rightarrow cociente 1\ resto 1 \\ 5/2 \Rightarrow cociente 2\ resto 1 \\ 2/2 \Rightarrow cociente 1\ resto 0 \end{cases}$$

$\sqrt[6]{3x^5y^8z^{15}} = z^2y\sqrt[6]{3x^5y^2z^3}$ Observa que los factores 3 y x^5 quedan íntegros dentro del radical por tener exponentes menores que el índice.

Si el radicando es un número, se descompone en factores primos y se procede como se ha indicado.

Ejemplo:

$$\sqrt{3888} = \sqrt{2^4 \cdot 3^5} = 2^2 \cdot 3^2\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$

EJERCICIOS:

67) $\sqrt{32}$	67) $\sqrt[3]{16x^5}$	68) $\sqrt[4]{64x^5y^6}$	69) $\sqrt[4]{m^6n^4}$
70) $\sqrt[6]{a^6b^9c^{12}d^{15}}$	71) $\sqrt{2a^4b^6c^2}$	72) $\sqrt[3]{81a^6b^{12}c^3d^4}$	73) $\sqrt[3]{-a^9b^6c^{10}}$
74) $\sqrt[5]{5a^{14}b^{10}c^5}$	75) $\sqrt{3a^5b^3c^2}$	76) $\sqrt[3]{27a^2b^3c^4d^5}$	77) $2\sqrt{16a^3}$
78) $5\sqrt[3]{8x^4y^3z^5}$	79) $3xy\sqrt{8x^3y^4z}$	80) $2xy^2\sqrt{x^5y^3}$	

1.3.2.2 Introducción de factores dentro del signo radical

Para introducir dentro del signo radical un factor que multiplica a una raíz, se multiplica el exponente del factor por el índice de la raíz y se escribe el producto como exponente del factor dentro de la raíz.

Demostración: $a^m\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(a^m)^n}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{nm}b}$

Ejemplos:

a) $a\sqrt[3]{a^4} = \sqrt[3]{a^3a^4} = \sqrt[3]{a^7}$

b) $7x^2\sqrt[5]{x^3} = \sqrt[5]{(7x^2)^5x^3} = \sqrt[5]{7^5x^{10}x^3} = \sqrt[5]{7^5x^{13}}$

c) $\frac{2a}{b}\sqrt[3]{\frac{3b^2}{4a^2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2a}{b}\right)^3\frac{3b^2}{4a^2}} = \sqrt[3]{\frac{2^3a^3}{b^3}\frac{3b^2}{2^2a^2}} = \sqrt[3]{\frac{2a3}{b}} = \sqrt[3]{\frac{6a}{b}}$

EJERCICIOS:

81) $2a\sqrt{2a}$ 82) $3x\sqrt[3]{4x^2}$ 83) $(a+b)\sqrt{(a+b)}$ 84) $3a^2b\sqrt{ab^2}$

85) $x\sqrt[3]{a^2bcx}$ 86) $-2ab\sqrt[5]{a^2b}$ 87) $x^2y\sqrt{2xy}$ 88) $a^2bc^3\sqrt[3]{3a^2b}$

89) $2a\sqrt{5ab^2}$ 90) $2x\sqrt{\frac{1}{3x}}$ 91) $\frac{2a}{3b}\sqrt[3]{\frac{ab^2c}{2d^3}}$ 92) $\frac{2}{5}\sqrt[3]{\frac{25x}{4y}}$

93) $\frac{2x}{3y}\sqrt{\frac{3y}{2x}}$ 94) $\frac{a}{2b}\sqrt[3]{\frac{2bc}{a}}$ 95) $\frac{3}{xy}\sqrt{\frac{xyz}{6}}$

96) $(x-y)\sqrt{\frac{x+y}{(x-y)}}$ 97) $\frac{x+y}{x-y}\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$ 98) $(a+b)\sqrt{\frac{1}{a^2-b^2}}$

99) $(a+b)\sqrt{\frac{a-b}{a^2-b^2}}$ 100) $\frac{a+1}{a-1}\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$

1.3.2 Cociente de radicales

a) De radicales homogéneos (igual índice)

Sean los radicales de igual índice $\sqrt[n]{A}$ y $\sqrt[n]{B}$. Se tiene que:

$$\begin{cases}\sqrt[n]{A} = r \Rightarrow r^n = A\\ \sqrt[n]{B} = s \Rightarrow s^n = B\end{cases}$$

Dividiendo ordenadamente: $\frac{r^n}{s^n} = \left(\frac{r}{s}\right)^n = \frac{A}{B}$

Extrayendo la raíz *n*-ésima: $\sqrt[n]{\left(\frac{r}{s}\right)^n} = \frac{r}{s} = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}$

Sustituyendo *r* y *s* por su valor:

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}\cdot = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}} \qquad (4)$$

El **cociente de radicales de igual índice** es otro radical que tiene el mismo índice y por radicando el cociente de los radicandos .

b) De radicales no homogéneos
Si los radicales no tienen igual índice se reducen previamente a índice común.

Ejemplos:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\dfrac{16}{4}} = \sqrt[3]{4}$

b) $\sqrt{\dfrac{3}{2}} : \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{3}{2} : \dfrac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{6}{2}} = \sqrt{3}$

c) $\sqrt{2} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^3} : \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{\dfrac{2^3}{2^2}} = \sqrt[6]{2}$

EJERCICIOS:

101) $\sqrt{\dfrac{a}{2b}} : \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$ 102) $\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}\right) : \sqrt[4]{\dfrac{3}{4}}$ 103) $\sqrt{8a^5bc^4} : \left(\dfrac{3}{2} a\sqrt{ab^2c^6}\right)$

104) $2\sqrt{72} : \sqrt{32}$ 105) $2\sqrt{x^2y^3} : 3\sqrt{xy}$ 106) $\sqrt{18} : \sqrt{72}$

107) $16\sqrt{x^3y^4} : 4\sqrt{x^2y^2}$ 108) $\sqrt[5]{a^2b^3c^4} : \sqrt[5]{ab^2c}$ 109) $2\sqrt[3]{a^2b} : 3\sqrt{ab}$

110) $\sqrt[3]{a^2bc^2d} : \sqrt{abcd}$ 111) $\sqrt[3]{a^2bc^3} : \sqrt[4]{a^2bc^3}$ 112) $\left(\sqrt{\dfrac{3}{4}} : \sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}\right) \cdot \sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}$

Para **extraer factores de un radical con radicando en forma de fracción** se realiza primero el cociente de radicales y después se extraen independientemente los factores del numerador y del denominador.

Ejemplos

a) $\sqrt{\dfrac{27}{16}} = \dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{16}} = \dfrac{\sqrt{3^3}}{\sqrt{2^4}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2^2}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{8x^2y^4z^5}{81a^4b}} = \dfrac{\sqrt[3]{2^3y^4z^5}}{\sqrt[3]{3^4a^4b}} = \dfrac{2yz\sqrt[3]{yz^2}}{3a\sqrt[3]{3ab}} = \dfrac{2yz}{3a}\sqrt[3]{\dfrac{yz^2}{3ab}}$

EJERCICIOS:

113) $3x^2y\sqrt{\dfrac{16x^3y^3}{9}}$ 114) $\dfrac{2ab}{5c}\sqrt{\dfrac{25a^3bc^5}{4}}$ 115) $\dfrac{3a^2bx^3}{7c^2}\sqrt{\dfrac{49ab^3c^4}{9x^6}}$ 116) $\sqrt[5]{\dfrac{-a^6b^{10}}{32b^{15}}}$

117) $\sqrt[3]{\dfrac{a^6b^8c^{10}}{27b^6}}$ 118) $\sqrt[3]{\dfrac{-a^4b^3c^2}{12d^5f^4}}$ 119) $\sqrt[5]{\dfrac{64a^6b^7c^8}{729x^3y^6z^9}}$

1.3.3 Potencia de un radical

Sea el radical $r = \sqrt[n]{A}$.
Por definición de raíz $r^n = A$
Elevando los dos miembros a la potencia *p*: m$(r^n)^p = A^p \Rightarrow r^{np} = A^p \Rightarrow (r^p)^n = A^p$

Extrayendo la raíz n-ésima: $\sqrt[n]{(r^p)^n} = \sqrt[n]{A^p} \Rightarrow r^p = \sqrt[n]{A^p}$

Sustituyendo r por su valor:

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{A}\right)^p = \sqrt[n]{A^p}} \qquad (5)$$

Otra forma de obtener esta expresión es desarrollando la potencia $\left(\sqrt[n]{A}\right)^p$ y aplicando la regla del producto de radicales:

$$\left(\sqrt[n]{A}\right)^p = \underbrace{\sqrt[n]{A}\cdot\sqrt[n]{A}\cdot\sqrt[n]{A}\ldots\ldots\cdot\sqrt[n]{A}}_{p\ veces} = \sqrt[q]{\underbrace{A\cdot A\cdot A\ldots\ldots\ldots\cdot A}_{p\ veces}} = \sqrt[n]{A^p}$$

Para elevar una raíz a una potencia se eleva el radicando a esa potencia

Una potencia muy usada es: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$. Y en particular en el caso de la raíz cuadrada $\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a^2} = a$

Ejemplo:

a) $\left(\sqrt{3ax}\right)^4 = \sqrt{(3ax)^4} = \sqrt{81a^4x^4}$

EJERCICIOS:

Calcula las potencias y simplifica el resultado haciendo:

- primos entre sí el índice y el exponente del radicando
- extrayendo todos los factores posibles

120) $\left(\sqrt{2ab}\right)^3$ 121) $\left(\sqrt[3]{3a^2b}\right)^2$ 122) $\left(3\sqrt[5]{2a^2b^2c^3}\right)^3$ 123) $\left(\frac{a}{2}\sqrt[4]{b^2c^3d}\right)^3$

124) $\left(2a\sqrt{3b^2c^3}\right)^3$ 125) $\left(\frac{2ab}{c}\sqrt[3]{\frac{bc^2}{2a}}\right)^2$ 126) $\left(ab^2\sqrt[3]{(a-b)}\right)^3$ 127) $\left((x-y)\sqrt{\frac{1}{x-y}}\right)^2$

128) $\left(3x^2y\sqrt[3]{\frac{2}{9x^2y^2}}\right)^2$ 129) $\left(4ab\sqrt{\frac{3a}{4b}}\right)^3$ 130) $\left(\sqrt[5]{\frac{2x}{y-z}}\right)^{10}$

1.3.4 Raíz de un radical

Sea el radical $r = \sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}$.

Por definición de raíz $r^m = \sqrt[n]{A}$

Elevamos a la potencia n ambos miembros : $\left(r^m\right)^n = A \Rightarrow r^{mn} = A$

Extraemos la raíz de índice $m.\ n$: $r = \sqrt[nm]{A}$

Sustituyendo r por su valor:

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[mn]{A}} \qquad (6)$$

La raíz *m*-ésima de la raíz *n*-ésima de un número es la raíz *mn*-ésima de dicho número.

Ejemplos:

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{3}{5}}} = \sqrt[12]{\frac{3}{5}}$

b) Estos ejercicios se empiezan a resolver desde el radical más interior

$$\sqrt{5+\sqrt{14+\sqrt{1+\sqrt{9}}}} = \sqrt{5+\sqrt{14+\sqrt{1+3}}} = \sqrt{5+\sqrt{14+\sqrt{4}}} = \sqrt{5+\sqrt{14+2}}$$

$$\sqrt{5+\sqrt{16}} = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3$$

c) En estos ejercicios se combina la raíz de una raíz con la introducción/extracción de factores del radical.

$\sqrt{27a^2b^3\sqrt{9a^4b^2}} = \sqrt{27a^2b^3 3a^2b} = \sqrt{81a^4b^4} = 9a^2b^2$ (Extracción)

$\sqrt{a\sqrt[3]{2a^2}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^3 2a^2}} = \sqrt[6]{2a^5}$ (Introducción)

EJERCICIOS

131) $\sqrt{\sqrt{2a^3}}$ 132) $\sqrt{\sqrt[3]{\frac{3}{2}ab^5}}$ 133) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{2}{3}ax}}$

134) $\sqrt{20+\sqrt{21+\sqrt{8+\sqrt{64}}}}$ 135) $\sqrt{19-\sqrt{4+\sqrt{32-\sqrt{49}}}}$

136) $\sqrt{5a+\sqrt{21a^2+\sqrt{16a^4}}}$ 137) $\sqrt{5x^2+\sqrt{32x^4-\sqrt{256x^8}}}$

138) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$ 139) $\sqrt{16\sqrt{8\sqrt{4}}}$ 140) $\sqrt{ab\sqrt{8ab\sqrt{4a^2b^2}}}$

141) $2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ 142) $\sqrt{\sqrt[3]{16}}$ 143) $\sqrt{2a\sqrt[5]{a^2}}$ 144) $3\sqrt{ab\sqrt[3]{2a}}$

145) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{2}}}}}$ 146) $3\sqrt{3\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{3^3}}}$ 147) $\sqrt{a\sqrt[4]{\frac{1}{a}\sqrt[3]{a}}}$ 148) $\sqrt{x\sqrt{\frac{1}{x}\sqrt[3]{x}}}$

149) $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}\sqrt{b}} \cdot \sqrt{b\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}}$ 150) $\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}\sqrt{b}} : \sqrt{b\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}}$

1.4 Racionalización de denominadores

La racionalización de denominadores es la operación que elimina las expresiones radicales que pueden aparecer en los denominadores.

1.4.1 Denominadores con monomios

1.4.1.1 Con una única raíz cuadrada

Para eliminar el radical se multiplican numerador y denominador por la raíz que aparece en el denominador.

$$\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{\left(\sqrt{b}\right)^2}=\frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Es conveniente extraer todos los factores posibles del radical antes de racionalizar.

Ejemplos:

a) $\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{5}{3\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{3\cdot 2}=\frac{5\sqrt{2}}{6}$

c) $\frac{2}{\sqrt{27}}=\frac{2}{\sqrt{3^3}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3\cdot 3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$

d) $\frac{5}{\sqrt{15}}=\frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{15}\sqrt{15}}=\frac{5\sqrt{15}}{15}=\frac{\sqrt{15}}{3}$

e) $\sqrt{\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$

EJERCICIOS:

151) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ 152) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 153) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 154) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{8}}$ 155) $\frac{3}{\sqrt{2-x}}$ 156) $\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}}$

157) $\frac{6}{3\sqrt{5xy}}$ 158) $\frac{\sqrt{xy}}{5\sqrt{zt}}$ 159) $\frac{2\sqrt{xy}}{3\sqrt{3y}}$ 160) $\frac{x-y}{2\sqrt{x+y}}$ 161) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ 162) $\frac{2\sqrt{27}}{\sqrt{8}}$

163) $\frac{2\sqrt{3a}}{3a\sqrt{a}}$ 164) $\sqrt{\frac{3a}{5}}$ 165) $\frac{3x}{2y\sqrt{x^3}}$ 166) $\frac{a\sqrt{b}}{b\sqrt{a}}$ 167) $\frac{2\sqrt{3xy}}{3\sqrt{x}}$

1.4.1.2 Con una única raíz *n*-ésima

Si el exponente del radicando es m se multiplica numerador y denominador por la raíz n-ésima del radicando elevado a n-m.

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m}\cdot\sqrt[n]{b^{n-m}}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m\cdot b^{n-m}}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{m+n-m}}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

Ejemplos:

a) $\dfrac{3}{\sqrt[4]{2}}=\dfrac{3\sqrt[4]{2^{4-1}}}{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{2^3}}=\dfrac{3\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2\cdot 2^3}}=\dfrac{3\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^4}}=\dfrac{3\sqrt[4]{2^3}}{2}$

b) $\dfrac{6x}{\sqrt[5]{ab^2x^3}}=\dfrac{6x\sqrt[5]{(ab^2x^3)^4}}{\sqrt[5]{ab^2x^3}\cdot\sqrt[5]{(ab^2x^3)^4}}=\dfrac{6x\sqrt[5]{a^4b^8x^{12}}}{ab^2x^3}=\dfrac{6xbx^2\sqrt[5]{a^4b^3x^2}}{ab^2x^3}=\dfrac{6\sqrt[5]{a^4b^3x^2}}{ab}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{2}}=\dfrac{\sqrt{3}\sqrt[5]{2^4}}{2}=\dfrac{\sqrt[10]{3^5}\cdot\sqrt[10]{(2^4)^2}}{2}=\dfrac{\sqrt[10]{3^5\cdot 2^8}}{2}$

EJERCICIOS:

168) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$ 169) $\dfrac{3}{\sqrt[4]{x^3y^2}}$ 170) $\dfrac{6xy}{\sqrt[5]{9x^3y^2z}}$ 171) $\dfrac{3x+y}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}$ 172) $\dfrac{3}{\sqrt[6]{(x+y)^5}}$

173) $\dfrac{7xa}{\sqrt[3]{x^2a^5b^2}}$ 174) $\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy^3z}}$ 175) $\sqrt[4]{x^{-3}}$ 176) $\sqrt[5]{4x^{-4}}$ 177) $\dfrac{\sqrt[7]{\dfrac{2}{3}}}{\sqrt[5]{\dfrac{3}{2}}}$ 178) $\dfrac{\sqrt[6]{\dfrac{1}{x^5}}}{\sqrt[3]{x^2}}$

179) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt[8]{2^5}}$ 180) $\dfrac{8}{\sqrt[7]{2^3}}$

1.4.2 Racionalización de binomios. Pares conjugados

Estaremos en este caso cuando el denominador sea un binomio con radical de índice dos. Se eliminan los radicales del denominador multiplicando numerador y denominador por el *conjugado* del denominador.

Pares conjugados: (a + b) y (a - b) son expresiones conjugadas entre sí. Tienen la propiedad de que su producto es igual a la diferencia de los cuadrados de a y b con lo que si a o b son radicales de índice dos, las raíces desaparecerán al realizar el producto.

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2$$

Ejemplos:

a) Si el denominador es $2+\sqrt{3}$,su conjugado es $2-\sqrt{3}$ y el producto de conjugados dará como resultado:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)=2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=4-3=1$$

con lo que desaparece el radical.

b) Si el denominador es $\sqrt{2}-3$, su conjugado es $\sqrt{2}+3$ y el producto de conjugados

$$(\sqrt{2}-3)\cdot(\sqrt{2}+3)=\left(\sqrt{2}\right)^2-3^2=2-9=-7$$

c) Si el denominador es $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ su conjugado es $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ y el producto de conjugados:

$$(\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3})=\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=2-3=-1$$

d) Si el denominador es $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$, su conjugado es $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ y el producto de conjugados:

$$(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})\cdot(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})=\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2=3^2\left(\sqrt{2}\right)^2-2^2\left(\sqrt{3}\right)^2=9\cdot 2-2\cdot 3=18-6=12$$

EJERCICIOS:

181) $\dfrac{3}{\sqrt{2}-2}$ 182) $\dfrac{\sqrt{5}}{3-\sqrt{2}}$ 183) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}+1}$ 184) $\dfrac{2}{3+\sqrt{7}}$ 185) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ 186) $\dfrac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{5}}$

187) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-5}$ 188) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ 189) $\dfrac{\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}$ 190) $\dfrac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$ 191) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

192) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ 193) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ 194) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2-\sqrt{y}}$ 195) $\dfrac{\sqrt{2y}}{\sqrt{2}-\sqrt{y}}$

196) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ 197) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

DE AHORA EN ADELANTE EN TODOS LOS EJERCICIOS DE RADICALES LOS RESULTADOS APARECERÁN SIMPLIFICADOS AL MÁXIMO, ESTO QUIERE DECIR QUE:

- **El índice y el exponente del radicando serán primos entre sí (1.2.2)**
- **Extraer del radical todos los factores posibles**
- **Racionalizar denominadores**

1.5 Adición y sustracción de radicales. Radicales semejantes

Para sumar o restar radicales estos han de ser *semejantes*.
Son radicales semejantes los que tienen el mismo índice y el mismo radicando

Son semejantes: $\sqrt[4]{2a^3}$; $x\sqrt[5]{2a^3}$ $(y-z)\sqrt[5]{2a^3}$

También son semejantes $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$ ya que $\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$

> La **adición o sustracción de radicales** semejantes da como resultado otro radical semejante, cuyo coeficiente se obtiene sumando o restando los coeficientes de los radicales

Si los radicales no son semejantes, se deja la operación indicada.

Para buscar radicales semejantes usaremos la simplificación, la extracción de factores, la introducción y la racionalización de denominadores.

Ejemplos:

a) Agrupa los radicales semejantes: $\sqrt{3}, \sqrt{12}, \sqrt{24}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{9}, \sqrt{54}$

$$\sqrt{3}, \sqrt{2^2 3}, \sqrt{2^3 3}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt[4]{3^2}, \sqrt{3^3 \cdot 2} \Rightarrow \sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}, 3\sqrt{6}$$

Son semejantes por un lado:

$$\sqrt{3}, \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt[4]{9} = \sqrt{3},$$

y por otro:

$$\sqrt{24} = 2\sqrt{6} \; y \; \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

b) $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{3} + 4\sqrt{3} = (2+3-1+4)\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

c) $7\sqrt{50} - 2\sqrt{32} - 3\sqrt{2} - 4\sqrt{18} =$

$$7\sqrt{2\cdot 5^2} - 2\sqrt{2^5} - 3\sqrt{2} - 4\sqrt{3^2\cdot 2} = 7\cdot 5\sqrt{2} - 2\cdot 2^2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 4\cdot 3\sqrt{2} =$$

$$35\sqrt{2} - 8\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = (35-8-3-12)\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

d) $\sqrt{5ab^3} + \sqrt{4a^2b^2} + \sqrt{8ab^5} + \sqrt{32a^3b^5} = b\sqrt{5ab} + 2ab + 2b^2\sqrt{2ab} + 4ab^2\sqrt{2ab} =$

$$b\sqrt{5ab} + 2ab + (2b^2 + 4ab^2)\sqrt{2ab}$$

EJERCICIOS:

198) $8\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{2}$

199) $\frac{1}{3}\sqrt{5} + \frac{3}{5}\sqrt{5} - \frac{2}{3}\sqrt{5} + \frac{1}{5}\sqrt{5}$

200) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{2} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$

201) $2\sqrt{5} - 3\sqrt{45} + 3\sqrt{20}$

202) $4\sqrt{18} + 2\sqrt{8} - 3\sqrt{32}$

203) $7\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{128}$

204) $x\sqrt{8x} - 3\sqrt{50x^3} + x\sqrt{18x}$

205) $2a\sqrt{3a} - \sqrt{27a^3} + a\sqrt{12a}$

206) $5a\sqrt{3} - 3\sqrt{3a^2} + \sqrt{12a^2}$

207) $2\sqrt[3]{16x^5} - x\sqrt[3]{54x^2} + \sqrt[6]{256x^{10}}$

208) $3\sqrt{7} - 2\sqrt{5} + 4\sqrt{7} + \sqrt{20} - \sqrt{28} + \sqrt{45}$

209) $\frac{3}{2}\sqrt{xy} - \frac{1}{3}\sqrt{4xy} + \frac{2}{5}\sqrt{9xy} - \frac{4}{3}\sqrt{xy}$

210) $\sqrt{18y} - \sqrt{\frac{y}{2}} + \sqrt{\frac{y}{8}} - \sqrt{\frac{y}{18}}$

211) $5\sqrt[6]{8} - 3(\sqrt{4} + \sqrt[10]{32}) - 8\sqrt[8]{16} + \sqrt{\frac{1}{8}}$

212) $3\sqrt{x} - \sqrt{4x} + 2\sqrt{36x} - 5\sqrt{x - \frac{9x}{25}}$

213) $\sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{2}{x}} - \sqrt{\frac{1}{2x}} + \sqrt{8x}$

214) $3\sqrt[3]{\frac{2x}{9}} - 2\sqrt[3]{\frac{3x}{4}} + 5\sqrt[3]{\frac{6x}{125}}$

215) $6\sqrt[3]{\frac{125x}{9}} - 9\sqrt[3]{\frac{x}{9}} + 5\sqrt[3]{\frac{3x}{125}}$

216) $\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{6} + \sqrt{\frac{1}{6}}$

217) $\sqrt{\frac{5a}{b}} - \sqrt{\frac{5b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{5b}} + \sqrt{\frac{5}{ab}} - \sqrt{\frac{ab}{5}}$

218) $(x-y)\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + \sqrt{9x^2 - 9y^2} + \frac{x+y}{x-y}\sqrt{\frac{25xy^2 - 25y^3}{x+y}}$