



1. Algunos datos biográficos y científicos

1765: Nace en Valentano, Estados Pontificios (hoy Italia), el 22 de septiembre.

1783: Inicia sus estudios de matemáticas, medicina y literatura en la Universidad de Modena. Entre sus profesores destacan Luigi Fantini (geometría) y Paolo Cassiani (cálculo).

1788: El 9 de junio se gradúa en filosofía, medicina y cirugía. Un poco más tarde se gradúa en matemáticas.

1791: Es nombrado profesor de Elementos de Matemáticas en la Universidad de Modena. Se le concede la licencia para practicar la medicina.

1796: Napoleón funda la República Cisalpina (Lombardía, Emilia, Modena y Bolonia) y Ruffini es propuesto para ocupar un cargo en su Consejo. Se le requiere un juramento de lealtad, pero le parece contrario a sus creencias religiosas y políticas.

A causa de ello es despedido de su puesto en la Universidad y se le prohíbe la enseñanza. Ruffini se dedica a la práctica de la medicina y a sus investigaciones sobre la resolución de la ecuación de quinto grado por radicales.

1799: Es readmitido en la Universidad de Modena y se publica su *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebrica delle equazioni generali di grado superiore al quarto*.

obra en la que utilizó métodos similares a los usados por Lagrange en sus *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*.

1802: Escribe *Riflessioni intorno alla rettificazione ed alla quadratura del*

circolo y la memoria *Della soluzione delle equazioni algebriche determinata partocolari* *di grado sup. al 4º.*

1804: Se edita la memoria *Sopra la determinazione delle radici nelle equazioni numeriche di qualunque grado*. En ella Ruffini elabora un método de aproximación de las raíces de una ecuación que se anticipa en quince años al conocido como "método de Horner" (Philosophical Transactions, 1819).

1806: Acepta una cátedra de Matemática Aplicada en la escuela militar de Modena y dedica su *Dell' immortalità dell' anima a* Pío VII.

1807: Se imprime *Algebra elementare*. (*Algebra e suo apendice*)

1813: Se publican sus *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebriche generali*.

1814: Es nombrado rector de la Universidad de Modena donde ocupa cátedras de medicina y matemáticas.

1816: Se convierte en presidente de la Sociedad Italiana "Dei Quaranta", de la que era miembro desde 1800.

1817: Durante una epidemia de tifus contrae dicha enfermedad.

1820: Escribe *Memoria sul tifo contagioso*, tratado sobre el tifus basado en su propia experiencia.

1821: Se imprimen sus *Riflessioni critiche sopra il saggio filisofico intorno alle probabilità del Sig. Conte de la Place*.

1822: El 9 de mayo muere en Modena, Ducado de Modena (hoy Italia), y es enterrado en la iglesia de Santa María de Pomposa.

2. La resolución de ecuaciones de grado inferior a cinco: perspectiva histórica

2.1. La ecuación cuadrática

La resolución de la ecuación de segundo grado se remonta a los comienzos de la matemática en general y a los del álgebra en particular. A modo de ejemplo, sirvan los siguientes testimonios históricos en los que se pone de manifiesto la habilidad de los matemáticos de otros tiempos y, además, y se detectan algunos de los tres estilos (retórico, sincopado y simbólico) que aparecen en el desarrollo y evolución del simbolismo algebraico.

2.1.1. La resolución de la ecuación de segundo grado en Babilonia

La tablilla cuneiforme BM13901 contiene abundante material relativo a la resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

En el siguiente texto se pueden apreciar los conocimientos que sobre el particular tenían los matemáticos babilonios allá por el año 2000 a. C.

BM13901 / Problema 1

Traducción al simbolismo algebraico moderno

He sumado el área y el lado del cuadrado.

Escribo 1, el coeficiente	[del lado del cuadrado].	
Divídelo en dos partes	iguales.	
Multiplica 1/2 por 1/2:	1/4.	
Añade 1/4	4 a	3/4: 1.

$$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

Esto es el cuadrado de 1.

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

Quita 1/2 de 1.

El lado del cuadrado es 1/2.

$$x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

2.1.2. La ecuación de segundo grado en la India

Para resolver la ecuación $x^2 - 10x = -9$, el matemático indio Brahmagupta (ca. 628 d. C.) propuso el siguiente procedimiento:

Multiplica el número absoluto, -9, por el [coeficiente del] cuadrado, 1; el resultado es -9.

Añádelo al cuadrado de la mitad [del coeficiente del] término medio, 25, y resulta 16; cuya raíz cuadrada, 4, menos la mitad del [coeficiente de la] incógnita,

5, es 9; y dividido por el [coeficiente del] cuadrado, 1, da como resultado el valor de la incógnita, 9.

La "regla de Brahmagupta", aplicada a la ecuación ax^2

$+ bx = c$, se puede traducir del modo siguiente:

$$ax^2 + bx = c$$

$$ax^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$ax + \frac{b}{2} = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$ax = -\frac{b}{2} + \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

2.1.3. La resolución de la ecuación cuadrática en Arabia

$$-\frac{b}{2} + \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

El matemático árabe Mohamed ibn Musa al-Khowarizmi (s. IX) utilizó la siguiente estrategia para resolver la ecuación $x^2 + 10x = 39$.

Debes tomar la mitad del número de las raíces, que es 5, y multiplicarlo por sí mismo y obtienes 25 al que le sumas el número 39, con el resultado 64. Tomas la raíz cuadrada de este número, que es 8, y le restas la mitad de las raíces, 5, y obtienes 3, que es el valor buscado.

2.1.4. La ecuación de segundo grado en el Renacimiento

Juan Pérez de Moya (ca. 1512 – 1596), en su *Aritmética Práctica y Especulativa* (1562), resolvió en versión sincopada el siguiente problema cuadrático:

Dame vn numero que juntandole 5 y por otra parte quitandole 2 y multiplicando la suma por la resta, monte 98. Pon que el numero demandado es 1.co. [= x] si le juntares 5.n. [= 5] será 1.co. p.5.n. [= x

+ 5].

Si le quitas 2 quedará 1.co.m.2.

[= x – 2]

multiplicando 1.co.p.5.n. que es la suma, por 1.co.m.2.que es la resta, (...) monta

1.ce.p.3.co.m.10.n.

[= x

2

+ 3x – 10]

lo qual igualarás a 98.n.

[= 98]

que quisieras que vinieran desta manera 1.ce.p.3.co.m.10.n. ig. a 98.n.

[x

2

+ 3x – 10 = 98].

Passa los 10.n. que vienen menos en la vna parte de la balança a la otra (...) y quedará la igualacion desta manera 1.ce.p.3.co. ig.a 108.n.

[x

2

+ 3x = 108].

Sigue la regla partiendo llanamente los 3 y los 108 que es lo que viene con los menores caracteres, por 1 que viene con el ce.

[= x

2

]

que en este exemplo es el mayor, y vendrà a los quocientes lo mismo: despues saca la mitad del quociente del mediano, que es 3, y será vno y medio, quadra vno y medio, y seràn dos y vn quarto

[= 9/4],

juntalo con 108 que es el quociente del menor carácter, y montará 110 y vn quarto

saca la r. Serà diez y medio

, quita desto la otra mitad del quociente del mediano, que es vno

y medio, y quedaran nueue

. Estos nueue es el valor de vna cosa

[= incógnita]

y respuesta de la demanda.

2.1.5. A modo de resumen

A la vista de los resultados obtenidos en los ejemplos anteriores se observa que las raíces de la ecuación de segundo grado con una incógnita se pueden obtener por una fórmula en la que los coeficientes de la ecuación están ligados únicamente por las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y radicación. Dicho en otras palabras: la ecuación cuadrática es resoluble por radicales.

2.2. La ecuación cúbica

2.2.1. Tercetos de tercer grado

Los acontecimientos que tuvieron lugar en torno al problema de la resolución de la ecuación de tercer grado configuran uno de los episodios más apasionantes de la historia del álgebra.

En 1539, Nicolò Fontana “Tartaglia” (ca. 1499 – 1557) comunicó a Girolamo Cardano (1501 – 1576), mediante unos tercetos, las reglas que permitían resolver tres tipos de ecuaciones de tercer grado [$x^3 + px = q$; $x^3 = px + q$; $x^3 + q = px$, ($p, q > 0$)].

He aquí la traducción e interpretación matemática de los tres tercetos en los que el “tartamudo de Brescia” describe la regla para calcular la única raíz positiva de la ecuación $x^3 + px = q$.

Quando el cu

$$[x^3 + px]$$

Se igualan a cualquier número discreto:

$$[x^3]$$

³

Se buscan otros dos que difieran en él:

$$[u - v = q]$$

*Luego, tendrás por costumbre
Que su producto sea siempre igual*

Al cubo de la tercera parte de las cosas conocidas:

$$[uv = (p/3)]$$

³

*Como regla general, lo que queda
De la diferencia de sus raíces cúbicas*

Será igual a tu cosa principal:

$$[x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}]$$

Cardano, como muestra de agradecimiento, se comprometió a no revelarlas hasta que Tartaglia las hiciese públicas. No obstante, ante la tardanza de dicha publicación, Cardano las dio a conocer en su *Ars Magna* (1545).

Este hecho provocó que, al año siguiente, Nicolò Fontana publicase algunos comentarios despectivos sobre Girolamo que originaron una polémica nada edificante entre Tartaglia y Ludovico Ferrari (1522 – 1565), otro de los grandes matemáticos italianos del Renacimiento.

En las líneas siguientes, utilizando el simbolismo moderno y mediante un proceso similar al de Tartaglia-Cardano, presentamos la fórmula que permite resolver la ecuación de tercer grado por radicales.

Es un hecho bien conocido que cualquier ecuación general de tercer grado se puede transformar, mediante los cambios pertinentes, en otra sin término de segundo grado y cuyo primer coeficiente es 1. En consecuencia, basta con estudiar las ecuaciones del tipo:.

$$x^3 + px + q = 0 \text{ [1]}$$

A partir de la identidad $(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$ se puede escribir la siguiente relación:

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0 \text{ [2]}$$

Comparando [1] y [2], se tiene que:

$$x = u + v$$

$$3uv = -p$$

$$u^3 + v^3 = -q$$

A partir de las dos últimas igualdades no resulta difícil obtener que:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{y} \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

De donde, por extracción de la raíz cúbica, se obtienen tres valores para u y tres valores para v , a partir de los cuales se generan nueve parejas (u, v) . De ellas sólo tres verifican las restricciones $3uv = -p$ y $u^3 + v^3 = -q$.

Con esto, las tres raíces de la ecuación [1] vienen dadas por:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Si, $\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ estamos en presencia del “caso irreducible” cuyas soluciones reales se deben calcular haciendo intervenir números complejos.

2.3. La ecuación cuártica

Se debe a Ludovico Ferrari, discípulo de Cardano, la resolución por radicales de la ecuación de cuarto grado.

En esencia, el procedimiento de Ferrari se puede resumir, utilizando el simbolismo algebraico moderno, en los siguientes términos:

Sea la cuártica $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

Entonces:

$$\begin{aligned} x^4 + px^2 + qx + r = 0 &\Rightarrow x^4 + 2px^2 + p^2 = px^2 - qx - r + p^2 \Rightarrow \\ (x^2 + p)^2 &= px^2 - qx - r + p^2 \end{aligned}$$

En esta situación, para un valor arbitrario y se tiene que

$$\begin{aligned} (x^2 + p + y)^2 &= px^2 - qx - r + p^2 + 2yx^2 + 2py + y^2 \Rightarrow \\ (x^2 + p + y)^2 &= (p + 2y)x^2 - qx - r + p^2 + 2py + y^2 \quad [3] \end{aligned}$$

Recordando que la condición necesaria y suficiente para que el polinomio de segundo grado ax^2

$+ bx + c$ sea cuadrado perfecto es que $b^2 - 4ac = 0$, resulta que para que el segundo miembro de

[3]

sea un cuadrado perfecto deberá cumplirse que:

$$q^2 - 4(p + 2y)(p^2 - r + 2py + y^2) = 0 \quad [4]$$

La ecuación **[4]**, de tercer grado en y , puede resolverse por radicales. Esto permite escribir los dos miembros de **[3]** como cuadrados perfectos y, por extracción de la raíz cuadrada en sus dos miembros, determinar las soluciones

de la ecuación cuártica propuesta. En otras palabras: la ecuación de cuarto grado con una incógnita es resoluble por radicales.

3. Ruffini matemático

Acabamos de ver que, desde el siglo XVI, se sabía que las ecuaciones polinómicas de grado inferior a cinco eran resolubles por radicales.

¿Podía afirmarse lo mismo de las ecuaciones de grado superior?

Esta cuestión mantuvo ocupado a Paolo Ruffini durante buena parte de su vida.

En su *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto*, publicada en 1799, presentó una demostración sobre la imposibilidad de resolver por radicales las ecuaciones de grado superior al cuarto. Dicha demostración fue revisada en las versiones de 1803, 1808 y 1813. En la introducción de su memoria puede leerse:

La resolución algebraica de las ecuaciones generales de grado mayor que el cuarto es siempre imposible. (...) presentar la prueba de ello es la razón principal para publicar este volumen. El inmortal Lagrange, con sus reflexiones sublimes, ha proporcionado las bases de mi demostración.

La demostración de Ruffini no fue concluyente, dado que se apoyaba en una hipótesis incompleta, ni fue bien recibida por la mayoría de sus contemporáneos (algunos de ellos ni la entendieron) y sucesores.

Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) no contestó a las cartas de Ruffini en las que le solicitaba su opinión acerca de su memoria.

Giovanni Francisco Malfatti (1731 – 1807), en su *Dubbii proposti al socio Paolo Ruffini sulla sua dimostrazione della impossibilita di risolvere le equazioni superiori al quarto grado*, manifestó sus dudas acerca de la irresolubilidad de la quintica. Adrien Marie Legendre (1752 – 1833) y Lazare Carnot (1753 – 1823) también se expresaron en similares términos.

TEORIA GENERALE
DELLE
EQUAZIONI,
IN CUI SI DEMOSTRA IMPOSSIBILE
LA SOLUZIONE ALGEBRAICA DELLE
EQUAZIONI GENERALI DI GRADO
SUPERIORE AL QUARTO
DI
PAOLO RUFFINI.

Ruffini: Teoria Generale delle equazioni

Por su parte, Niels Henrik Abel (1802–1829) al que se debe la demostración definitiva de la irresolubilidad, refiriéndose a la prueba de Ruffini se despachaba así:

BOLOGNA MDCCXCVIII.
NELLA STAMPERIA DI S. TOMMASO D' AQUINO.

El primero, si no me equivoco, el único antes de mi que ha intentado demostrar la imposibilidad de la resolución algebraica de las ecuaciones generales, es el geómetra Ruffini; pero su memoria es tan complicada que es difícil juzgar la veracidad de su razonamiento. Me parece que su razonamiento nosiempre es satisfactorio.

El único matemático de prestigio que apoyó a Ruffini fue Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) que, en una carta remitida en 1821, le decía:

(...) a mi juicio, su memoria prueba completamente la imposibilidad de resolver algebraicamente ecuaciones de grado superior al cuarto.

Lo que resulta sorprendente y extraño es que nadie descubriese el error cometido y se lo comunicase al interesado.

En su demostración Ruffini se apoyó en algunos resultados de Lagrange sobre grupos de permutaciones pero también utilizó conceptos, procedimientos y teoremas originales de Teoría de Grupos (véase el cuadro adjunto). Consideró funciones racionales de las raíces de la ecuación general de grado n y estudió el conjunto de las p permutaciones que las dejan invariantes.

RESULTADOS DE LAGRANGE

Toda función racional no simétrica de n variables admite un grupo de sustituciones cuyo orden es divisible por n .

Si una función Ψ de n variables admite un grupo de p sustituciones, entonces el número de funciones de n variables que son racionales en Ψ es $\frac{n!}{p}$.

Los valores i de una función racional de x_1, x_2, \dots, x_n son las raíces de la ecuación

$$(z - \psi)(z - \psi_1) \dots (z - \psi_{i-1}) = z^n + A_1 z^{i-1} + A_2 z^{i-2} + \dots + A_n = 0,$$

cuyos coeficientes son funciones simétricas de x_1, x_2, \dots, x_n .

APORTACIONES ORIGINALES DE RUFFINI

Conceptos: orden de un elemento, conjugación, grupo primitivo, grupo imprimitivo.

Procedimientos: descomposición de una permutación en ciclos

Teoremas:

- El orden de una permutación es el mínimo común múltiplo de las longitudes de los ciclos disjuntos
- Todo elemento de S de orden 5 es un 5-ciclo.
- Si G es un subgrupo de S y su orden es divisible por 5, entonces G tiene al menos un 5-ciclo.
- S no tiene subgrupos de índices 3, 4 y 8.

En particular, demostró que en el caso de la *quintica* el grado $n!/p$ (siendo p el número de permutaciones que dejan invariable la función) de la ecuación resolvente puede ser 2, 5 o 6, pero ni 3, ni 4. Esto significa que una resolvente (en el sentido de Lagrange) satisfaciendo una ecuación de grado 3 o 4 es imposible. Si $n!/p$ no es 2, entonces debe ser divisible por 5. Si $n!/p$ es 5, existen resolventes de Lagrange de quinto grado pero no se pueden reducir a ecuaciones binomias de grado 5. Esto equivale a decir que la *quintica* es irresoluble por radicales.

Resolver algebraicamente una ecuación es expresar sus raíces como funciones racionales de los coeficientes. Cuando todas estas ecuaciones auxiliares son binomias, la resolución algebraica se puede hacer por radicales.

J. Rey Pastor. *Lecciones de Álgebra*, p.169

Ruffini reclamó haber demostrado que la ecuación general de quinto grado es irresoluble por radicales; sin embargo, su prueba no fue concluyente dado que se basaba en la hipótesis de que estos radicales se pueden expresar como funciones racionales de las raíces. Fue Abel quien completó la demostración de Ruffini mostrando que los radicales necesarios para resolver una ecuación siempre se pueden elegir como funciones racionales de las raíces de la ecuación y de ciertas raíces de la unidad.

4. Galería de imágenes

Paulus Joannes Anno Domini 1765 die 22 Julij Jo. Baptistae
Pacifinus Hyg. Licentiatissimus Puerulus hujus Civitatis Jo. Baptistae
civitatis Bon. S. Jo. Baptistae civitatis Valentianae baptizatus
Ruffini
infantum masculinum aetate proxima hujus
quinta matam ex Jo. Baptistae Ruffini
Ruffini Doctore Physico de Regio Ratingae
P. Mariae Episcopi de Pado Archiepiscopi
P. Mariae Episcopi de Pado Archiepiscopi

Partida de nacimiento de Ruffini



Placa en la casa natal de Ruffini



http://www.valentano.com/paolo_ruffini_1765-1822_Matematicas_Ruffini.htm Milan