Sistemas de ecuaciones lineales

Una ***ecuación lineal con dos incógnitas*** es una expresión de la forma $ax+by=c$, donde a, b y c son números reales y x e y son las incógnitas. Si en la ecuación anterior se despeja la incógnita y obtenemos otra ecuación equivalente que adopta la forma $y=mx+n$. Es muy fácil darse cuenta de que, desde el punto de vista gráfico, la anterior ecuación representa una línea recta. Por tanto, toda ecuación lineal con dos incógnitas la podremos representar en el plano mediante una línea recta.

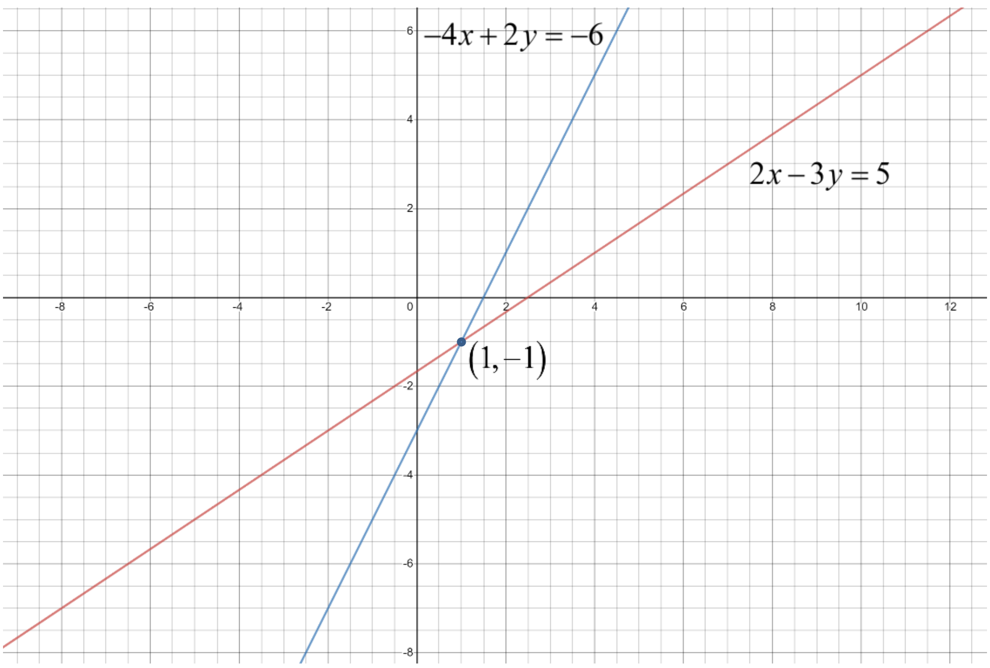
Ejemplo 1:	**Ejemplo 2:**
$2x-3y=5$ es una ecuación lineal. Si despejamos la incógnita y: $2x-5=3y \Rightarrow y=\dfrac{2x-5}{3} \Rightarrow y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{5}{3}$	$-4x+2y=-6$ es otra ecuación lineal con dos incógnitas. Si despejamos la incógnita y ahora obtenemos: $-4x+2y=-6 \Rightarrow 2y=4x-6 \Rightarrow y=\dfrac{4x-6}{2} \Rightarrow y=2x-3$

Un ***sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas*** es una expresión del tipo $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ formada por dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (expresión conocida como ***forma reducida del sistema***). Una ***solución del sistema*** es una pareja del tipo (x,y) que satisface ambas ecuaciones del sistema. Si el sistema tiene una única solución lo llamaremos ***sistema compatible determinado***. Puede ocurrir también que el sistema tenga infinitas parejas de soluciones. En este caso el sistema recibe el nombre de ***sistema compatible indeterminado***. Finalmente, si el sistema no tiene ninguna pareja solución, diremos que es ***incompatible***.

Desde el punto de vista gráfico un sistema compatible determinado viene representado por dos rectas que se cortan en un punto (la pareja solución del sistema). Un sistema compatible indeterminado viene representado por dos rectas que coinciden. Y un sistema incompatible se representa mediante dos líneas rectas paralelas.

Ejemplo 3:

Con las ecuaciones de los ejemplos 1 y 2 podemos formar el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ -4x+2y=-6 \end{cases}$. Una solución de este sistema es la pareja $(x,y)=(1,-1)$. Es decir, si $x=1$ e $y=-1$ se satisfacen las dos ecuaciones del sistema. Veámoslo: $2\cdot1-3\cdot(-1)=2+3=5$. $-4\cdot1+2(-1)=-4-3=-6$. Gráficamente el sistema viene representado del siguiente modo. Observa que las dos rectas se cortan en el punto solución $(1,-1)$ (sistema compatible determinado).



Resolución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas: método de sustitución

Resolver un sistema es un procedimiento para encontrar las soluciones del sistema, caso de que este las tenga. Hay tres métodos para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Uno de ellos es el ***método de sustitución***. Consiste en elegir una de las dos ecuaciones del sistema y despejar una de las dos incógnitas. Una vez hecho esto sustituimos su valor en la otra ecuación y despejamos la incógnita resultante. Con un ejemplo concreto se verá mucho mejor.

Ejemplo 4:

Resolvamos por sustitución el sistema del ejemplo anterior: $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ -4x+2y=-6 \end{cases}$.

Despejando x de la primera ecuación:

$$2x=3y+5 \Rightarrow x=\frac{3y+5}{2}.$$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación:

$$-4\cdot\frac{3y+5}{2}+2y=-6 \Rightarrow -2\cdot(3y+5)+2y=-6 \Rightarrow -6y-10+2y=-6 \Rightarrow -4y=4 \Rightarrow y=-1.$$

Volviendo a sustituir este valor en la expresión despejada de x:

$$x=\frac{3\cdot(-1)+5}{2}=\frac{-3+5}{2}=\frac{2}{2} \Rightarrow x=1.$$

Resolución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas: método de igualación

Este método consiste en despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones del sistema y luego igualar las expresiones correspondientes. Veamos otro ejemplo.

Ejemplo 5:

Sea el sistema siguiente: $\begin{cases} 3x-5y=-19 \\ -6x+7y=32 \end{cases}$. Para resolverlo por el método de igualación vamos a despejar la incógnita x de ambas ecuaciones.

$$3x-5y=-19 \Rightarrow 3x=5y-19 \Rightarrow x=\frac{5y-19}{3}\ ;\ -6x+7y=32 \Rightarrow -6x=-7y+32 \Rightarrow x=\frac{-7y+32}{-6}.$$

Ahora igualamos ambas expresiones:

$$\frac{5y-19}{3}=\frac{-7y+32}{-6}.$$

Para resolver esta ecuación multiplicamos en cruz:

$$-6(5y-19)=3(-7y+32) \Rightarrow -30y+114=-21y+96 \Rightarrow -30y+21y=96-114 \Rightarrow -9y=-18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{-18}{-9} \Rightarrow y=2.$$

Ahora, para obtener la incógnita x sustituimos el valor despejado de y es cualquiera de las dos expresiones despejadas anteriormente de x. Por ejemplo, en la primera:

$$x=\frac{5\cdot 2-19}{3}=\frac{10-19}{3}=\frac{-9}{3} \Rightarrow x=-3.$$

Resolución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas: método de reducción

Finalmente, el método de reducción consiste en multiplicar ambas ecuaciones por números adecuados para que, al sumar o al restar ambas ecuaciones, una de las dos incógnitas se elimine y, de este modo, podamos despejar la otra con facilidad. De nuevo un ejemplo aclarará la forma de proceder.

Ejemplo 6:

Sea el sistema $\begin{cases} -2x+11y=85 \\ 5x-3y=-41 \end{cases}$. Si multiplicamos la primera ecuación por 5 y la segunda ecuación por 2, el sistema anterior se transforma en este otro: $\begin{cases} -10x+55y=425 \\ 10x-6y=-82 \end{cases}$. Sumando ambas ecuaciones eliminamos la incógnita x y obtenemos lo siguiente: $49y=343 \Rightarrow y=\dfrac{343}{49} \Rightarrow y=7$.

De manera similar, si multiplicamos la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación por 11, el sistema se transforma ahora en este otro: $\begin{cases} -6x+33y=255 \\ 55x-33y=-451 \end{cases}$. Volviendo a sumar ambas ecuaciones, la incógnita que ahora se elimina es la y, obteniendo: $49x=-196 \Rightarrow x=\dfrac{-196}{49} \Rightarrow x=-4$.

Resolución de problemas haciendo uso de los sistemas de ecuaciones

Al igual que en el caso de las ecuaciones de primer y de segundo grado, podemos hacer uso de los sistemas de ecuaciones lineales para resolver problemas. Veamos algunos ejemplos de resolución de problemas planteando un sistema de ecuaciones.

Ejemplo 7:

La suma de dos números es 3, y su diferencia es 11. Halla el valor de ambos números

Llamamos x a uno de los números y llamamos y al otro número. Entonces, podemos plantear el siguiente sistema

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=11 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones (método de reducción), tenemos: $2x=14 \Rightarrow x=7$. Sustituyendo en la primera ecuación del sistema: $7+y=3 \Rightarrow y=-4$. Por tanto, los números que se piden son 7 y -4.

Ejemplo 8:

En un garaje hay 25 vehículos entre coches y motos. El número total de ruedas sin contar las de repuesto es 80. ¿Cuánto coches y cuantos motos hay en el garaje?

Llamemos x al número de coches, y llamemos y al número de motos. Entonces, según el enunciado podemos plantear el siguiente sistema (los coches tienen cuatro ruedas y las motos dos):

$$\begin{cases} x+y=25 \\ 4x+2y=80 \end{cases}$$

De la primera ecuación $x=25-y$. Sustituyendo en la segunda (método de sustitución):

$4(25-y)+2y=80 \Rightarrow 100-4y+2y=80 \Rightarrow -2y=-20 \Rightarrow y=10$. $\Rightarrow 27y=54 \Rightarrow y=2$. Sustituyendo en $x=25-y$ tenemos $x=25-10 \Rightarrow x=15$. Por tanto, en el garaje hay 15 coches y 10 motos.

Ejemplo 9:

Se mezcla café de tipo A, que cuesta 6 € el kilo, con café de tipo B, que cuesta a 4 € el kilo. Si tenemos 60 kilos de mezcla que sale a 4,5 € el kilo, ¿cuántos kilos de café de cada clase se han mezclado?

Llamemos x a los kilos de café de tipo A, y llamemos y a los kilos de café de tipo B que se han mezclado. El sistema que refleja la situación expresada en el enunciado es claramente el siguiente (los 60 kilos de mezcla cuesta 60·4,5 = 270 €):

$$\begin{cases} x+y=60 \\ 6x+4y=270 \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos que $x=60-y$. Sustituyendo en la segunda ecuación (método de sustitución): $6(60-y)+4y=270 \Rightarrow 360-6y+4y=270 \Rightarrow -2y=-90 \Rightarrow y=45$. Sustituyendo en $x=60-y$: $x=60-45 \Rightarrow x=15$. Por tanto, la composición de la mezcla es de 15 kilos de café tipo A y de 45 kilos de café tipo B.

Ejemplo 10:

Hoy la edad de Miguel es el doble de la edad de María. Dentro de 10 años la suma de su edades será 65. ¿Cuántos años tiene actualmente cada uno?

Llamemos x a la edad actual de Miguel y llamemos y a la edad actual de María. Dentro de 10 años Miguel tendrá $x+10$ años y María tendrá $y+10$ años. Por tanto, según los datos del enunciado, podemos plantear el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x=2y \\ x+10+y+10=65 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ x+y=45 \end{cases}$$

Observa que hemos escrito el sistema en su forma reducida. Si ahora restamos ambas ecuaciones (método de reducción tenemos): $-3y=-45 \Rightarrow y=15$. Sustituyendo este valor en la segunda ecuación: $x+y=45 \Rightarrow x+15=45 \Rightarrow x=30$

Por tanto, en la actualidad Miguel tiene 30 años y María 45 años.

Ejemplo 11:

En un triángulo isósceles cada uno de los lados iguales mide el doble del lado desigual y su perímetro mide 35 m. ¿Cuánto mide cada lado?

Llamemos x a medida de cada uno de los dos lados iguales, y llamemos y a la medida del lado desigual. Entonces:

$$\begin{cases} x=2y \\ x+x+y=35 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x de la primera ecuación en la segunda: $2y+2y+y=35 \Rightarrow 5y=35 \Rightarrow y=7$. Sustituyendo este valor en la 1ª ecuación: $x=2y \Rightarrow x=2\cdot 7 \Rightarrow x=14$. Los lados iguales miden 14 m, y el lado desigual mide 7 m.

Ejemplo 12:

Dos kilos de gambas y tres kilos de pulpo cuestan 51 €, y tres kilos de gambas y dos kilos de pulpo cuestan 54 €. ¿Cuánto cuesta cada kilo de gambas y cada kilo de pulpo?

Si llamamos x e y lo que cuestan, respectivamente, el kilo de gambas y el kilo de pulpo, podemos plantear el siguiente sistema, que en este caso resolveremos por igualación:

$$\begin{cases} 2x+3y=51 \\ 3x+2y=54 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{51-2x}{3} \\ y=\dfrac{54-3x}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{51-2x}{3}=\frac{54-3x}{2} \Rightarrow 102-4x=162-9x \Rightarrow 5x=60 \Rightarrow x=12$$

Sustituyendo en $y=\dfrac{51-2x}{3}$: $y=\dfrac{51-24}{3}=\dfrac{27}{3} \Rightarrow y=9$. Así, las gambas cuestan 12 € el kilo, y el pulpo 9 € el kilo.