

# Polinômios

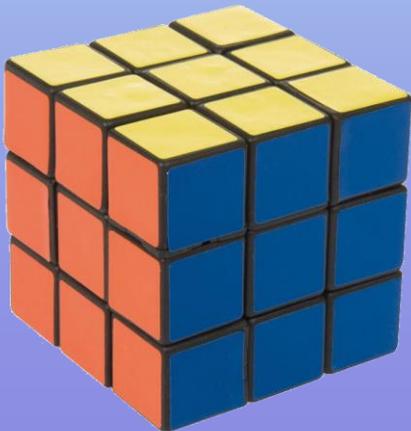


*Departamento de  
Matemáticas*

Los polinomios son una parte importante del Álgebra. Están presentes en todos los contextos científicos y tecnológicos: desde los ordenadores y la informática hasta la carrera espacial.



La fórmula para calcular el volumen de un cubo en función de la longitud ( $l$ ) de su lado viene dada por:



$$V(l) = l^3$$

La fórmula que expresa el movimiento de un cuerpo en caída libre viene dada por el siguiente polinomio:

$$P(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

t: tiempo  
g: gravedad



# Monomios

Un **monomio** es una expresión algebraica en la que la únicas operaciones que afectan a las letras son la multiplicación y la potencia de exponente natural.

Son monomios:

$$2x^2$$

$$-12x^3yz^2$$

$$\sqrt{4abc}^{15}$$

NO son monomios:

$$2x^{-2}$$

$$-7yz^2x^{\frac{2}{3}}$$

# Partes de un monomio

Los coeficientes son los números que aparecen multiplicando.

La parte literal la forman las letras y sus exponentes.

$$2x^2 \quad -12x^3yz^2 \quad \sqrt{4}abc^{15}$$

El grado del monomio es la suma de los exponentes de las letras.

$$\begin{array}{ccc} 2x^{\boxed{2}} & -12x^{\boxed{3}}y^{\boxed{1}}z^{\boxed{2}} & \sqrt{4}a^{\boxed{1}}b^{\boxed{1}}c^{\boxed{15}} \\ Gr.=2 & Gr.=3+1+2=6 & Gr.=1+1+15=17 \end{array}$$

# Tipos de monomios

Monomios semejantes:  
tienen la misma parte literal.

$$-25a^2b^3 \text{ ----- } a^2b^3$$

$$5xy \text{ ----- } -\frac{1}{7}xy$$

NO semejantes

$$3a^2b^3c \quad a^2b^3$$

Monomios opuestos:  
son semejantes y sus coeficientes  
son números opuestos.

$$-25a^2b^3 \text{ ----- } 25a^2b^3$$

$$\frac{1}{7}x^3y^2 \text{ ----- } -\frac{1}{7}x^3y^2$$

NO opuestos

$$-25a^3b^2 \quad 25a^2b^3$$

# Operaciones con monomios

La **suma (o resta)** de monomios *semejantes* se realiza sumando (o restando) los coeficientes y dejando la misma parte literal.

Ejemplo 1:  $5xy^2 + 3xy^2 - 5xy^2 + 7xy^2 =$   
 $( \quad ) xy^2 = 10xy^2$

Ejemplo 2:  $5xy^2 + 3x^2y^2$  **No** son *semejantes*,  
luego no se pueden  
sumar.

# Operaciones con monomios

Para **multiplicar** por un lado, multiplicamos sus coeficientes y, por otro, sus partes literales.

Ejemplo 3:  $-3y^2 \cdot 7y = ( \quad ) = -21y^3$

Ejemplo 4:  $5xy^2 \cdot 3x^3 = ( \quad ) = 15x^4y^2$

# Operaciones con monomios

Para **dividir** por un lado, dividimos sus coeficientes y, por otro, sus partes literales (si se puede).

$$\text{Ejemplo 5: } -21y^7 : 7y^2 = ( \quad ) ( \quad : \quad ) = -3y^5$$

$$\text{Ejemplo 6: } 25a^3b^2 : 4b = \frac{25}{4}a^3$$

# Polinomios

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma o resta de dos o más monomios no semejantes.

Coeficiente principal

Grado:  $2 + 5 = 7$

Término independiente

$$3xy^3 - 7x^2y^5 + 3xyz - 21$$

Términos

# Polinomios

Se llama coeficiente principal al coeficiente del monomio de mayor grado.

El mayor de los grados de todos sus términos se denomina grado del polinomio.

Cada uno de los monomios se llama término, y si no tiene parte literal se llama término independiente.

# Polinomios

El **valor numérico** de un polinomio  $\mathcal{P}(x)$ , para un valor  $x=a$ , lo expresamos como  $\mathcal{P}(a)$  y se obtiene sustituyendo la variable  $x$  por el valor  $a$  en el polinomio y operando.

**Ejemplo:**  $P(x) = 7x^4 - 3x^3 + 4x - 10$

$$P(2) = 7 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2 - 10 =$$
$$= 7 \cdot 16 - 3 \cdot 8 + 8 - 10 = 112 - 24 + 8 - 10 = 86$$

$$P(-1) = 7 \cdot (-1)^4 - 3 \cdot (-1)^3 + 4 \cdot (-1) - 10 =$$
$$= 7 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) - 4 - 10 = 7 + 3 - 4 - 10 = -4$$

# Polinomios

El **polinomio opuesto** de un polinomio  $\mathcal{P}(x)$ , que designamos como  $-\mathcal{P}(x)$ , se obtiene cambiando el signo de todos los términos de  $\mathcal{P}(x)$ .

*Ejemplo:*  $P(x) = 7x^4 - 3x^3 + 4x - 10$

*Polinomio opuesto:*  $-P(x) = -7x^4 + 3x^3 - 4x + 10$

# Operaciones con polinomios

Para sumar polinomios sumamos sus monomios semejantes, dejando indicada la suma de los monomios no semejantes.

**EJEMPLO:**  $P(x) = 2x^5 - x^4 + 7x^2 + 1$

$$Q(x) = 3x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 7x - 8$$

+

$$P(x) + Q(x)$$

---

$$\longrightarrow 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 7x - 7$$



# Operaciones con polinomios

Para restar polinomios sumamos al primero el opuesto del segundo.

**EJEMPLO:**  $P(x) = 2x^5 - x^4 + 7x^2 + 1$

$$Q(x) = 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 7x + 8$$



+

$$P(x) - Q(x)$$

---

$$\rightarrow 2x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 7x + 9$$

# Operaciones con polinomios

Para multiplicar un monomio por un polinomio multiplicamos el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

**EJEMPLO:**  $P(x) = 2x^5 - x^4 + 7x^2 + 1$  por  $2x^3$



×

$$\begin{array}{r} 2x^3 \cdot P(x) \\ \hline 4x^8 - 2x^7 + 14x^5 + 2x^3 \end{array}$$

# Operaciones con polinomios

El producto de dos polinomio se halla multiplicando cada uno de los términos de uno de los polinomios por el otro, y sumando después los polinomios semejantes.

**EJEMPLO:**  $P(x) = 2x^3 - 5x + 1$        $Q(x) = 3x^2 - 4$



$$P(x) \cdot Q(x) \rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \phantom{+} \phantom{6x^5} \phantom{-15x^3} \phantom{+3x^2} \phantom{+} \phantom{20x} - 4 \\ \phantom{+} \phantom{6x^5} \phantom{-15x^3} \phantom{+3x^2} \phantom{+} \phantom{20x} - 4 \\ \hline + \phantom{6x^5} - 8x^3 \phantom{+3x^2} \phantom{+} \phantom{20x} - 4 \\ \phantom{+} 6x^5 - 15x^3 + 3x^2 \phantom{+} \phantom{20x} - 4 \\ \hline 6x^5 - 23x^3 + 3x^2 + 20x - 4 \end{array}$$

# Operaciones con polinomios

Para dividir un polinomio entre un monomio, dividimos cada término del polinomio entre el monomio.

## EJEMPLOS:

$$P(x) = 6x^5 - 9x^4 + 27x^2$$

$$\begin{aligned} P(x) : 3x^2 &= (6x^5 : 3x^2) - (9x^4 : 3x^2) + (27x^2 : 3x^2) = \\ &= 2x^3 - 3x^2 + 9 \end{aligned}$$

$$Q(x) = 7x^3y - 5xy$$

$$Q(x) : (-2x) = \frac{7x^3y}{-2x} - \frac{5xy}{-2x} = -\frac{7}{2}x^2y + \frac{5}{2}y$$

# Operaciones con polinomios

Para dividir un polinomio entre un polinomio, seguiremos los siguientes pasos:

$$P(x) = -2x^3 + x^4 - 20 - 11x^2 + 30x$$

$$Q(x) = 3x + x^2 - 2$$

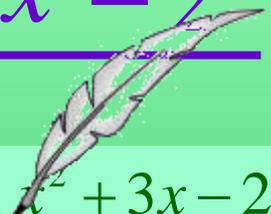
1º) Ordenamos los términos del dividendo y del divisor y los dispondremos como una división normal.

$$x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 \quad \Big| \quad \underline{x^2 + 3x - 2}$$

# Operaciones con polinomios

2º) Se divide el primer término del dividendo con el primer término del divisor, así se obtiene el primer término del cociente.

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 \\ -x^4 - 3x^3 + 2x^2 \\ \hline \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x^2 + 3x - 2 \\ x^2 \end{array} \right.$$


$$\begin{array}{r} x^2 + 3x - 2 \\ \times x^2 \\ \hline x^4 + 3x^3 - 2x^2 \end{array}$$

3º) Se multiplica el primer término del cociente por cada término del divisor y el producto pasa restando al dividendo.

# Operaciones con polinomios

4º) Se suman algebraicamente.

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 \\ -x^4 - 3x^3 + 2x^2 \\ \hline -5x^3 - 9x^2 + 30x - 20 \\ \phantom{-5x^3} + 5x^3 + 15x^2 - 10x \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x^2 + 3x - 2 \\ \hline x^2 - 5x \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 3x - 2 \\ \times \quad -5x \\ \hline -5x^3 - 15x^2 + 10x \end{array}$$

5º) Se divide el primer término del nuevo residuo, entre el primer término del divisor, así obtenemos el segundo término del divisor. Este segundo término se multiplica por el divisor y se pasa restando al dividendo.

# Operaciones con polinomios

6º) Se repite el procedimiento hasta que el grado del polinomio resto sea menor que el grado del polinomio divisor.

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & x^2 + 3x - 2 \\ -x^4 - 3x^3 + 2x^2 & \hline -5x^3 - 9x^2 + 30x - 20 & \\ 5x^3 + 15x^2 - 10x & \hline 6x^2 + 20x - 20 & \\ -6x^2 - 18x + 12 & \hline 2x - 8 & \end{array}$$

# Operaciones con polinomios

**Polinomio dividendo**

$$D(x) =$$



$$x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20$$

**Polinomio divisor**

$$x^2 + 3x - 2$$

$$x^2 - 5x + 6$$

$$d(x) =$$

**Polinomio cociente**

$$c(x) =$$

**Polinomio resto**



$$r(x) =$$

$$2x - 8$$

# Regla de Ruffini

La regla de Ruffini es un algoritmo que permite obtener fácilmente el cociente y el resto de la división de un polinomio por un binomio de la forma  $x-a$ . Veamos el algoritmo con un ejemplo.

$$D(x) = 2x^3 + x^2 - 3x - 5$$

$$d(x) = x - 1$$

1º) Ordenamos los términos del dividendo y del divisor.

# Regla de Ruffini

$$D(x) = 2x^3 + 1x^2 - 3x - 5$$

$$d(x) = x - 1$$

2º) Se colocan los coeficientes de cada término. Si no apareciese algún término entre el de mayor grado y el de menor se coloca un 0.

2	
	2

3º) A la izquierda se pone el número que se resta a  $x$  en  $d(x)$ , en nuestro caso 1 y se baja el coeficiente del término de mayor grado.

4º) Se multiplica el coeficiente que se ha bajado (2) por el que se ha colocado a la izquierda (1). El resultado del producto se coloca debajo del coeficiente del término siguiente y se suman .

# Regla de Ruffini

5º) El resultado de la suma se vuelve a multiplicar por el número situado a la izquierda y se repite el proceso.

	2	1	-3	-5
1	2	3	0	0
	2	3	0	-5

El último número (recuadro rojo) se corresponde con el resto de la división mientras que el resto de números de la fila inferior son los coeficientes del cociente.

$$D(x) = 2x^3 + x^2 - 3x - 5 \quad d(x) = x - 1$$

$$c(x) = 2x^2 + 3x \quad r(x) = -5$$

# Identidades notables

Las siguientes operaciones con binomios son simples multiplicaciones.

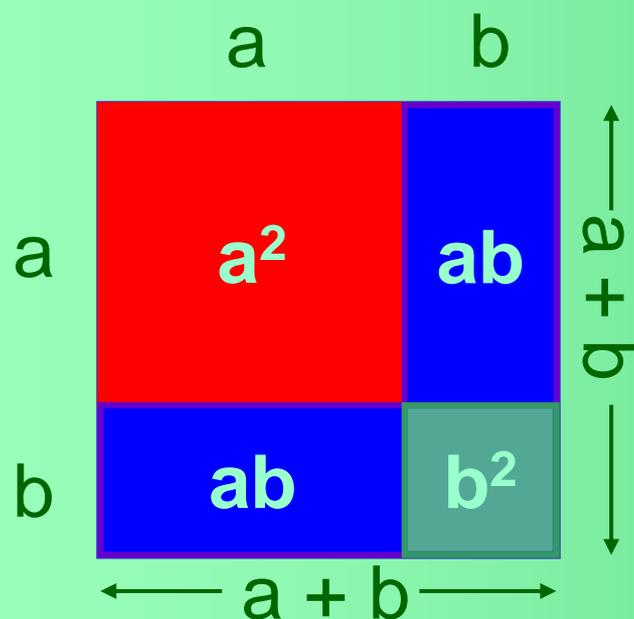
Es recomendable aprenderlas de memoria por su constante utilidad.

Uno de los errores mas frecuentes es considerar que la expresión  $(a+b)^2$  es igual a  $a^2+b^2$ . Pero es **FALSO**.

# Identidades notables

**Cuadrado de una suma:** el cuadrado de una suma es igual a:

- el cuadrado del primero,
- más el doble del primero por el segundo,
- más el cuadrado del segundo.

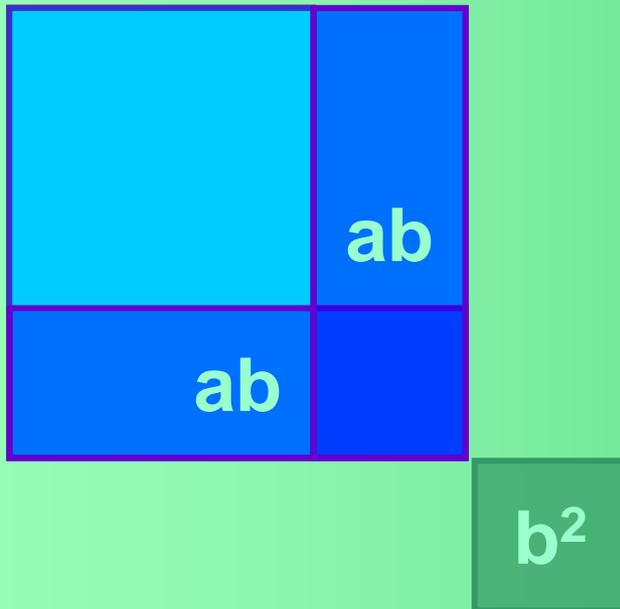


$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline ab + b^2 \\ a^2 + ab \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

# Identidades notables

**Cuadrado de una diferencia:** el cuadrado de una diferencia es igual a:

- el cuadrado del primero,
- menos el doble del primero por el segundo,
- más el cuadrado del segundo.

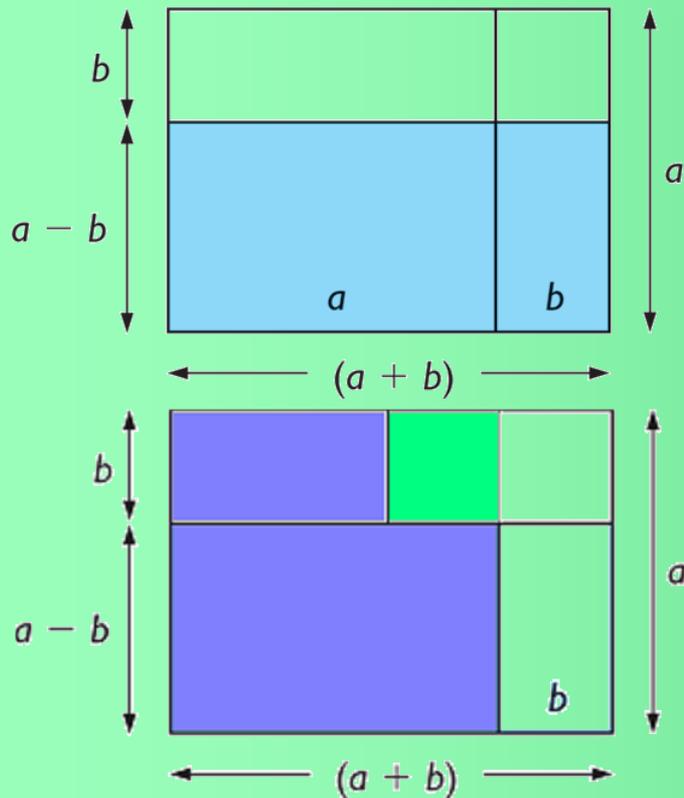


$$\begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline - ab + b^2 \\ a^2 - ab \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

# Identidades notables

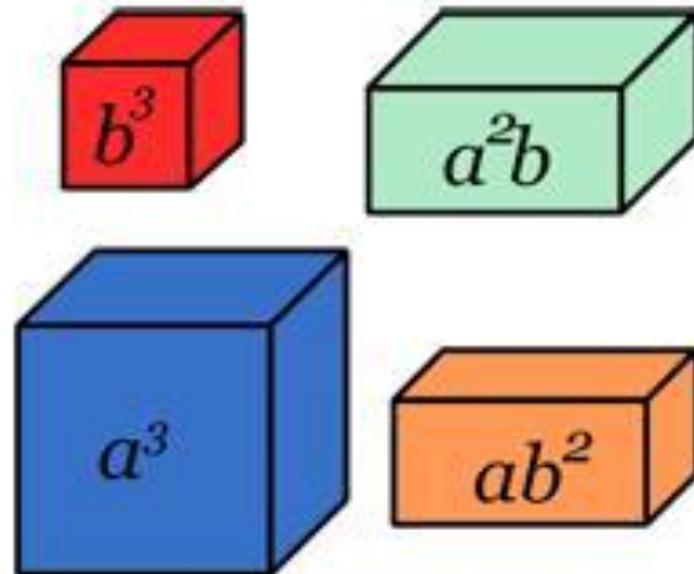
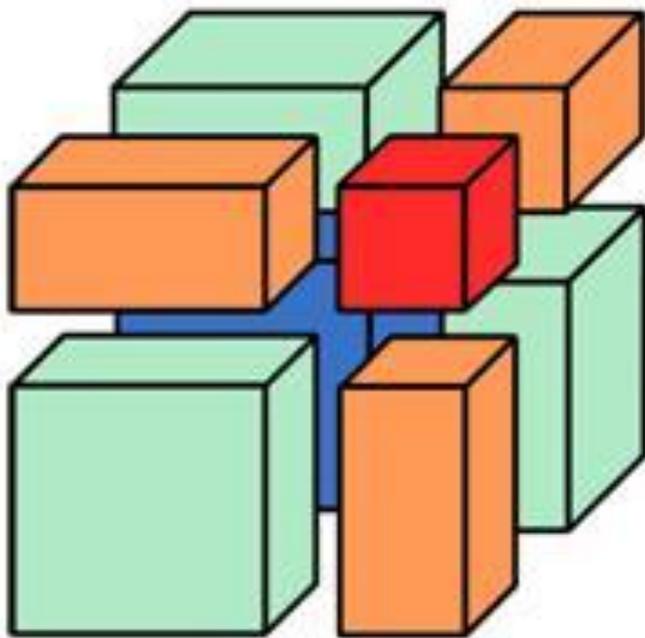
**Suma por diferencia:** una suma por una diferencia es igual a:

- el cuadrado del primero,
- menos el cuadrado del segundo.

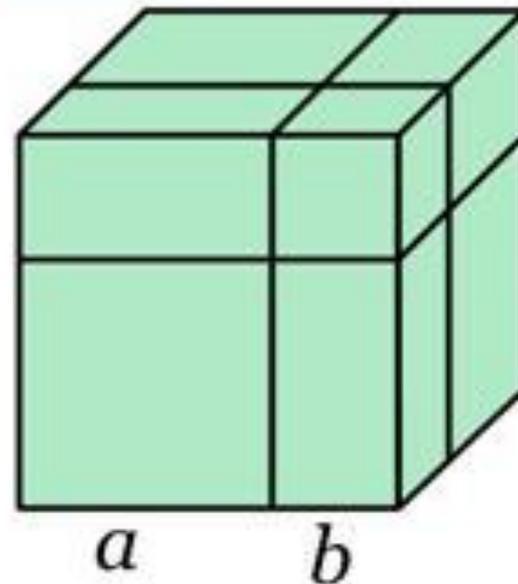


$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline - ab - b^2 \\ a^2 + ab \\ \hline a^2 - b^2 \end{array}$$

# Identidades notables



$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



# Fuentes - Biografía

<https://celsomates.files.wordpress.com>