PARA EMPEZAR

1 **Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{3x + 6}{2}$, $g(x) = 2x$**

a) Indica cuáles son sus pendientes y sus ordenadas en el origen.

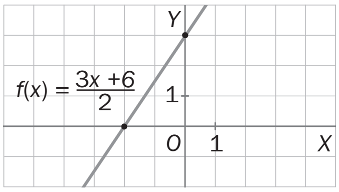
b) Dibuja sus gráficas.

c) Averigua si el punto $P(4, 9)$ pertenece a alguna de ellas.

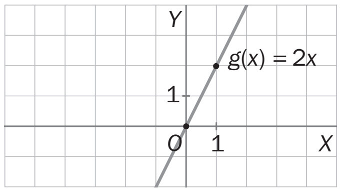
a) La pendiente de $f(x)$ es $m = \dfrac{3}{2}$. La pendiente de $g(x)$ es $m' = 2$.

b)

x	$f(x)$
0	3
−2	0



x	$g(x)$
0	0
1	2



c) $x = 4 \Rightarrow f(x) = \dfrac{3 \cdot 4 + 6}{2} = 9 \Rightarrow P(4, 9)$ pertenece a $f(x)$.

$x = 4 \Rightarrow g(x) = 2 \cdot 4 = 8 \neq 9 \Rightarrow P(4, 9)$ no pertenece a $g(x)$.

2 **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1, -3)$ y es paralela:**

a) Al eje OX.

b) Al eje OY.

c) A la recta $y = 4x - 1$.

d) A la bisectriz del primer cuadrante.

a) Por ser paralela al eje OX, será de la forma: $y = k$.
Por pasar por $A(1, -3) \Rightarrow -3 = k$. La recta es $y = -3$.

b) Por ser paralela al eje OY, será de la forma: $x = k$.
Por pasar por $A(1, -3) \Rightarrow 1 = k$. La recta es $x = 1$.

c) Por ser paralela a la recta $y = 4x - 1$, será de la forma $y = 4x + n$.
Por pasar por $A(1, -3) \Rightarrow -3 = 4 \cdot 1 + n \Rightarrow n = -7$. La recta es $y = 4x - 7$.

d) Por ser paralela a la bisectriz del primer cuadrante, será de la forma $y = x + n$.
Por pasar por $A(1, -3) \Rightarrow -3 = 1 + n \Rightarrow n = -4$. La recta es $y = x - 4$.

3 **Una de las soluciones de la ecuación $x^2 - 14x - 51 = 0$ corresponde al siglo en que nació Arquímedes. ¿En qué siglo fue?**

$$x^2 - 14x - 51 = 0,\ x = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-51)}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 + 204}}{2} = \frac{14 \pm 20}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 17 \\ x = -3 \end{cases}$$

Arquímedes nació en el siglo III antes de Cristo.

Las funciones de segundo grado Las funciones de segundo grado $y = ax^2$

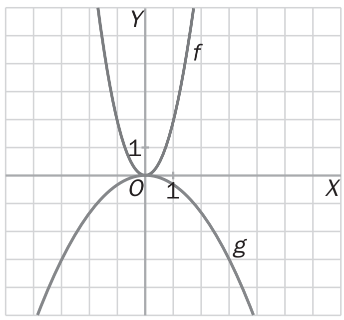
PARA PRACTICAR

Ejercicio resuelto

11.1 **Elabora las correspondientes tablas de valores y dibuja en los mismos ejes las gráficas de las siguientes funciones.**

$f(x) = 2x^2$ $\qquad$ $g(x) = -\dfrac{x^2}{3}$

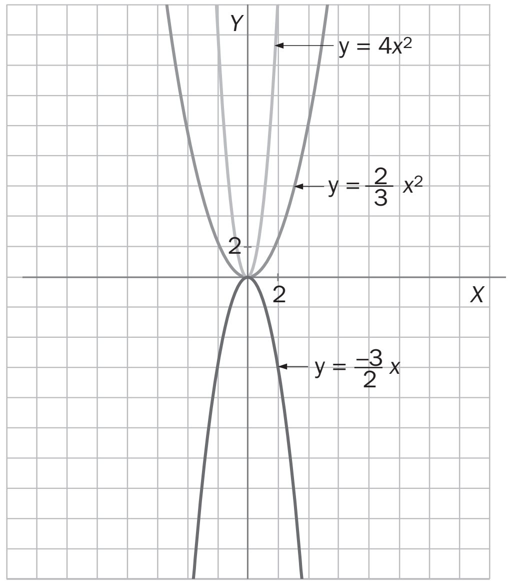
x	0	1	−1	2	−2	3	−3	…
$f(x)$	0	2	2	8	8	18	18	…
$g(x)$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	−3	−3	…



11.2 Representa en los mismos ejes de coordenadas las siguientes funciones cuadráticas.

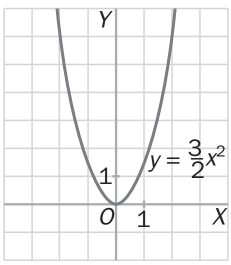
a) $y = -\frac{3}{2}x^2$ **b)** $y = \frac{2}{3}x^2$ **c)** $y = 4x^2$

x	$y = -\frac{3}{2}x^2$	$y = \frac{2}{3}x^2$	$y = 4x^2$
0	0	0	0
1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	4
-1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	4
2	-6	$\frac{8}{3}$	16
-2	-6	$\frac{8}{3}$	16
3	$-\frac{27}{2}$	6	36
-3	$-\frac{27}{2}$	6	36
...	...	...	...

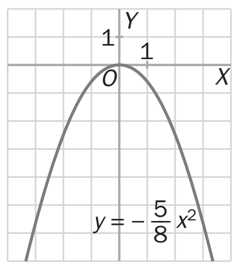


11.3 Halla el dominio, el recorrido y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las parábolas cuyas gráficas son las siguientes.

a)



b)



a) Dominio: Todos los números reales: $D = \mathbf{R}$
Recorrido: Los números reales $y \geq 0$: $R = [0, +\infty)$
Crecimiento: $(0, +\infty)$. Decrecimiento: $(-\infty, 0)$.

b) Dominio: Todos los números reales: $D = \mathbf{R}$
Recorrido: Los números reales $y \leq 0$: $R = (-\infty, 0)$
Crecimiento: $(-\infty, 0)$. Decrecimiento: $(0, +\infty)$.

11.4 Ordena las siguientes parábolas según la mayor o menor abertura de sus ramas, y averigua si tienen máximos o mínimos.

$$y = 9x^2 \qquad y = -4x^2 \qquad y = 5x^2 \qquad y = -0{,}8x^2$$

La más abierta (hacia abajo) es $y = -0{,}8x^2$; le sigue $y = -4x^2$ (abierta hacia abajo); luego $y = 5x^2$ (abierta hacia arriba) y después $y = 9x^2$ (abierta hacia arriba).

Las funciones $y = 9x^2$, $y = 5x^2$ tienen un mínimo en el punto $O(0, 0)$.

Las funciones $y = -4x^2$; $y = 0{,}8x^2$ tienen un máximo en el punto $O(0, 0)$.

11.5 Halla la intersección de la parábola $y = x^2$:

a) Con la bisectriz del primer cuadrante.

b) Con la parábola $y = -x^2$.

a) Se resuelve el sistema: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases}$ $x^2 = x \Rightarrow x = 0, x = 1.$ Si $x = 0 \Rightarrow y = 0$; si $x = 1 \Rightarrow y = 1$.
Hay dos puntos de intersección: $O(0, 0)$ y $A(1, 1)$.

b) La única solución del sistema $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases}$ es $x = 0$, $y = 0$.
Hay un punto de intersección: $O(0, 0)$.

11.6 Dos parábolas vienen expresadas por la misma función $y = ax^2$. La primera pasa por el punto $P(2, -6)$, y la segunda, por el punto $Q(-2, 6)$.

a) Halla la ecuación de cada una de ellas.

b) ¿Cómo son entre sí sus gráficas?

a) Primera parábola: $-6 = a \cdot 2^2 \Rightarrow a = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow f(x) = -\dfrac{3}{2}x^2$

Segunda parábola: $6 = a \cdot (-2)^2 \Rightarrow a = \dfrac{3}{2} \Rightarrow g(x) = \dfrac{3}{2}x^2$

b) Las gráficas son simétricas respecto del eje OX.

PARA APLICAR

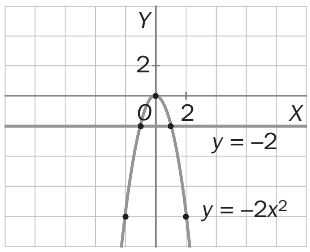
11.7 Desde el nivel del suelo, se deja caer una pelota a un pozo, y a los 2 segundos se encuentra a 19,6 metros de profundidad. Sabiendo que la distancia recorrida en función del tiempo viene dada por una parábola del tipo $y = mt^2$, halla el valor de m.

$x = 2 \Rightarrow y = -19{,}6$, luego: $-19{,}6 = m \cdot 2^2 \Rightarrow -19{,}6 = 4m \Rightarrow m = 4{,}9$.

11.8 Los vértices de un triángulo son el origen de coordenadas y los puntos de intersección de la parábola $y = -2x^2$ con la recta $y = -2$. Halla el área del triángulo.

Dibujamos la parábola $y = -2x^2$, y la recta $y = -2$.

x	y
0	0
1	-2
-1	-2
2	-8
-2	-8
…	…



Para hallar los puntos de intersección se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow -2x^2 = -2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

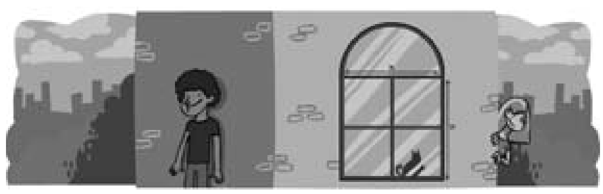
Si $x = 1 \Rightarrow y = -2$. Si $x = -1 \Rightarrow y = -2$. Los puntos de intersección son $P(-1, -2)$ y $Q(1, -2)$.

El área del triángulo OPQ es: $A = \dfrac{1}{2}PQ \cdot MO = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$. El área del triángulo es 2 unidades de superficie.

11.9 El cristal de una ventana tiene la forma de un cuadrado de lado x unido a un semicírculo de diámetro x. Halla la función que expresa el área del cristal en términos de x y dibuja su gráfica.

Área del cuadrado: x^2.

Área del semicírculo: $\dfrac{\pi}{2} \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi x^2}{8}$.

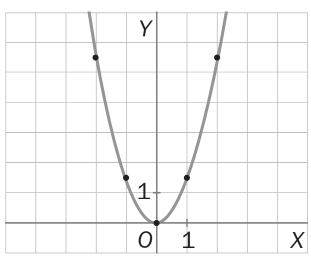


Función que expresa el área de la figura:

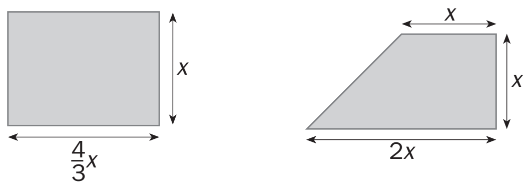
$y = x^2 + \dfrac{\pi x^2}{8} \Rightarrow y = \left(1 + \dfrac{\pi}{8}\right)x^2$

Aproximadamente: $y = \left(1 + \dfrac{3{,}1416}{8}\right)x^2 \simeq 1{,}4x^2$

x	y
0	0
1	1,4
-1	1,4
2	5,6
-2	5,6
…	…



11.10 Halla la función que expresa el área de los siguientes polígonos en términos de *x*. ¿Cuál de las dos funciones tiene sus ramas más abiertas?



Área del rectángulo: $A = \frac{4x}{3} \cdot x = \frac{4x^2}{3}$. Función: $f(x) = \frac{4x^2}{3}$.

Área del trapecio: $A' = \frac{x + 2x}{2} \cdot x = \frac{3x^2}{2}$. Función: $g(x) = \frac{3x^2}{2}$.

Las dos funciones son parábolas. Como $\frac{4}{3}$ y $\frac{3}{2}$ son positivos y $\frac{4}{3} < \frac{3}{2}$, $y = \frac{4}{3}x^2$ tiene las ramas más abiertas que $y = \frac{3x^2}{2}$.

11.11 Un vendedor de enciclopedias cobra como complemento de su sueldo una cantidad proporcional al cuadrado del número de enciclopedias que vende. Este mes ha vendido 16 y ha percibido 320 euros de complemento.

a) Halla la función que expresa el complemento en términos del número de enciclopedias.

b) Si el mes siguiente vende un 25% más, ¿en qué porcentaje se incrementa el complemento con respecto al del mes anterior?

a) La función que expresa el complemento del sueldo es del tipo: $y = ax^2$.

$x = 16 \Rightarrow y = 320$, luego $320 = a \cdot 16^2$, $a = \frac{320}{256} = \frac{5}{4}$. La función es $y = \frac{5}{4}x^2$.

b) Un 25% más de enciclopedias que 16 son $16 + 0{,}25 \cdot 16 = 20$.

Si vende 20 enciclopedias, el incremento del complemento es: $\frac{5}{4} \cdot 20^2 - \frac{5}{4} \cdot 16^2 = 500 - 320 = 180$ €.

Esta cantidad corresponde a un $180 \cdot \frac{100}{320}$% de incremento: $180 \cdot \frac{100}{320} = 56{,}25$%.

El complemento del sueldo se incrementa en un 56,25 %.

Traslaciones de la parábola $y = ax^2$

PARA PRACTICAR

11.12 ¿Qué traslaciones hay que realizar en la parábola $y = 4x^2$ para transformarla en estas otras?

a) $y = 4x^2 - 3$ **b)** $y = 4(x + 5)^2$ **c)** $y = 4(x - 1)^2 + 2$

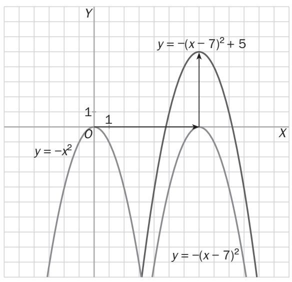
a) Hay que realizar una traslación vertical de 3 unidades hacia abajo.

b) Hay que realizar una traslación horizontal de 5 unidades hacia la izquierda.

c) Hay que hacer una traslación vertical de 2 unidades hacia arriba y una traslación horizontal de 1 unidad hacia la derecha.

Ejercicio resuelto

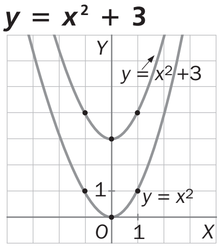
11.13 Efectuando las traslaciones oportunas, dibuja la gráfica de la siguiente función: $y = -(x - 7)^2 + 5$



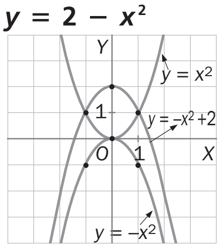
11.14 Mediante traslaciones, dibuja las gráficas de las siguientes funciones.

a) $y = x^2 + 3$ **b)** $y = 2 - x^2$ **c)** $y = (x + 2)^2$ **d)** $y = -(x - 3)^2$

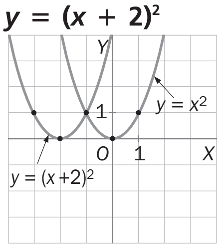
a)



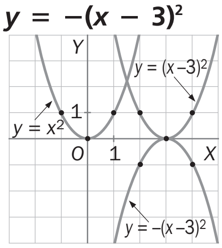
b)



c)



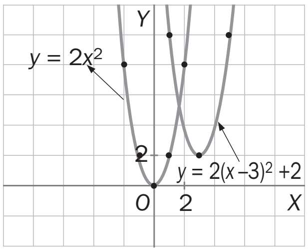
d)

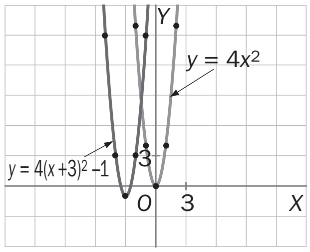


11.15 **Mediante traslaciones, dibuja las gráficas de estas funciones.**

a) $y = 2(x - 3)^2 + 2$

b) $y = 4(x + 3)^2 - 1$



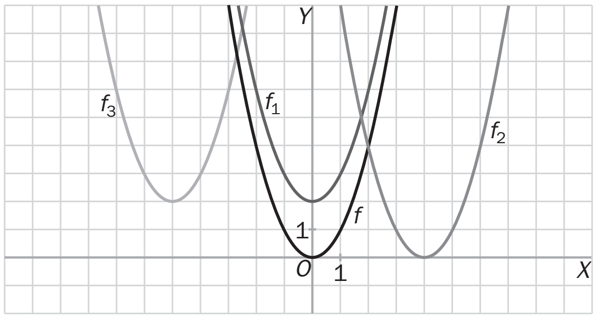


11.16 **Escribe las expresiones algebraicas de las funciones f_1, f_2 y f_3 de la figura, sabiendo que son trasladadas de la función $f(x) = x^2$.**

$f_1(x) = x^2 + 2$

$f_2(x) = (x - 4)^2$

$f_3(x) = (x + 5)^2 + 2$



11.17 **Halla las coordenadas del vértice y las ecuaciones del eje de las siguientes parábolas.**

a) $y = x^2 - 3$

b) $y = -4x^2 + 1$

c) $y = (x + 7)^2 - 2$

d) $y = -3(x - 1)^2 + 5$

a) Vértice: $V(0, -3)$, eje: $x = 0$.

b) Vértice: $V(0, 1)$, eje: $x = 0$.

c) Vértice: $V(-7, -2)$, eje: $x = -7$.

d) Vértice: $V(1, 5)$, eje: $x = 1$.

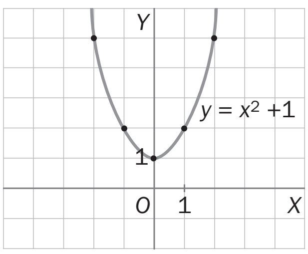
PARA APLICAR

11.18 **Una parábola de ecuación de la forma $y = ax^2 + a^2$ pasa por el punto $P(1, 2)$. Halla el valor de a y dibuja su gráfica.**

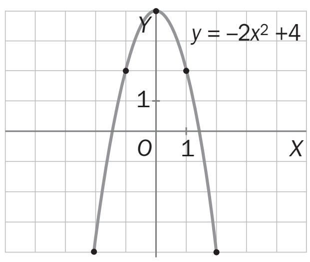
Por pasar por P: $2 = a \cdot 1^2 + a^2 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0$, $a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

Podría ser $y = x^2 + 1$ ó $y = -2x^2 + 4$.

Gráfica de $y = x^2 + 1$:



Gráfica de $y = -2x^2 + 4$:



11.19 **Una parábola cuya ecuación es $y = (x + p)^2 + q$ pasa por los puntos $A(0, 2)$ y $B(1, -3)$. Halla p y q, y representa su gráfica.**

Por pasar por A: $\left.\begin{array}{r} 2 = p^2 + q \\ -3 = (1 + p)^2 + q \end{array}\right\}$

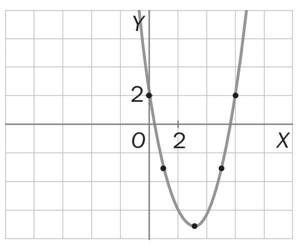
Restamos de la segunda ecuación la primera:

$-5 = (1 + p)^2 - p^2 \Rightarrow -5 = 1 + 2p \Rightarrow -6 = 2p \Rightarrow p = -3$

$\Rightarrow 2 = (-3)^2 + q \Rightarrow q = -7$.

La ecuación es: $y = (x - 3)^2 - 7$.

Gráfica:

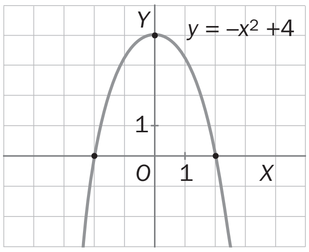


11.20 Dada la parábola de ecuación $y = -x^2 + 4$.

a) Dibuja su gráfica.

b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección de la gráfica de la parábola con los ejes de coordenadas.

a)



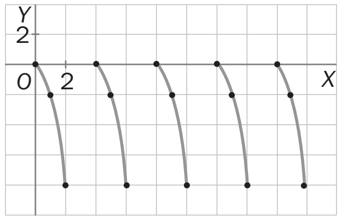
b) Los puntos de intersección son: $V(0, 4)$, $A(-2, 0)$ y $B(2, 0)$.

$$\text{Área} = \frac{AB \cdot OV}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$$

El área del triángulo es 8 unidades de superficie.

11.21 Si k es un número natural, las gráficas de las parábolas $y = -2(x - 4k)^2$ comprendidas entre $y = 0$ e $y = -8$ se dibujan en los azulejos de una franja horizontal para decorar un cuarto de baño. Representa el dibujo correspondiente entre $x = 0$ y $x = 20$.

Habrá que dibujar en unos mismos ejes, desde $x = 0$ hasta $x = 20$, las parábolas $y = -2x^2$, $y = -2(x - 4)^2$, $y = -2(x - 8)^2$, $y = -2(x - 12)^2$, $y = -2(x - 16)^2$, $y = -2(x - 20)^2$, que se obtienen de la primera por traslación horizontal hacia la derecha.



11.22 Halla el dominio y el recorrido, mediante razonamientos algebraicos, de las siguientes funciones.

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad\qquad g(x) = 3(x + 1)^2 - 2$$

La función $f(x)$ está definida cualquiera que sea x. El dominio son todos los números reales: $D(f) = \mathbf{R}$.

Se despeja x: $x^2 = y - 1$, $x = \pm\sqrt{y - 1}$: x está definido si $y - 1 \geq 0 \Rightarrow y \geq 1$.

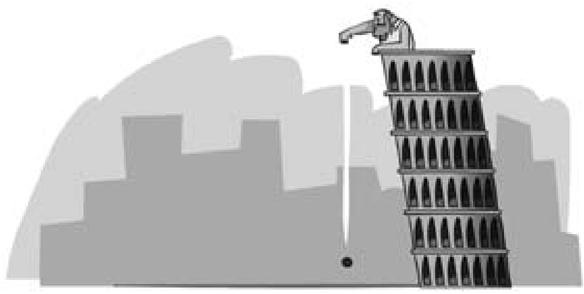
El recorrido de $f(x)$ son todos los números mayores o iguales que 1: $R(f) = [1, \infty)$.

El dominio de $g(x)$ son todos los números reales: $D(g) = \mathbf{R}$.

Se despeja x: $y + 2 = 3(x + 1)^2$, $x + 1 = \pm\sqrt{\dfrac{y + 2}{3}}$, $x = \pm\sqrt{\dfrac{y + 2}{3}} - 1$: x está definido si $y + 2 \geq 0 \Rightarrow y \geq -2$.

El recorrido de $g(x)$ son todos los números mayores o iguales que -2: $R(g) = [-2, +\infty)$.

11.23 La distancia del suelo, en metros, a la que se encuentra un cuerpo que cae desde lo alto de un edificio viene dada por una función del tipo $f(t) = a + bt^2$, donde t significa el tiempo en segundos transcurridos desde la caída. Si pasado 1 segundo, el cuerpo se encuentra a 39,2 metros del suelo, y transcurridos 2 segundos está a 24,5 metros, halla:



a) La expresión de la función.

b) La altura del edificio.

c) El tiempo que tarda el cuerpo en caer al suelo.

d) La gráfica de la función.

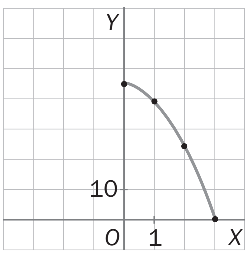
a) $\left.\begin{array}{l} t = 1 \Rightarrow 39{,}2 = a + b \cdot 1^2 \\ t = 2 \Rightarrow 24{,}5 = a + b \cdot 2^2 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 39{,}2 = a + b \\ 24{,}5 = a + 4b \end{array}\right\}$ $-14{,}7 = 3b$; $b = -4{,}9 \Rightarrow a = 39{,}2 + 4{,}9 = 44{,}1$

La función es: $f(t) = 44{,}1 - 4{,}9t^2$

b) $t = 0 \Rightarrow f(0) = 44{,}1$. El edificio tiene 44,1 metros de altura.

c) $f(t) = 0 \Rightarrow 44{,}1 - 4{,}9t^2 = 0 \Rightarrow t = \pm 3$. Tarda 3 segundos en caer al suelo.

d) Gráfica:



La función general de segundo grado

Problema resuelto

11.24 Dada la función y = x^2 + x + 1:

a) Averigua si su gráfica corta el eje *OX*.

b) Halla el eje y el vértice de la parábola.

a) $x^2 + x + 1 = 0,\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$: como no tiene solución real, no corta el eje *OX*.

b) Los coeficientes son $a = 1$, $b = 1$ y $c = 1$. Se sustituye en $x = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow$ Eje: $x = -\dfrac{1}{2}$

Si $x = -\dfrac{1}{2}$, le corresponde $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 1 = \dfrac{3}{4} \Rightarrow$ Vértice: $V\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$

PARA PRACTICAR

11.25 Contesta a las siguientes preguntas relativas a la parábola $y = ax^2 + bx + c$.

a) ¿Cuándo tiene un mínimo?

b) ¿Cuándo es tangente al eje *OX*?

c) ¿Cuándo corta el eje *OY*?

a) Tiene un mínimo si $a > 0$.

b) Es tangente al eje *OX* cuando $ax^2 + bx + c = 0$ tiene solo una raíz, es decir: $D = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow b^2 = 4ac$

c) Siempre corta al eje *OY*: si $x = 0 \Rightarrow y = c$. El punto de corte es siempre el punto $C(0, c)$.

11.26 Halla la ecuación del eje y las coordenadas del vértice de cada una de las siguientes parábolas.

a) $y = x^2 + 6x - 1$

b) $y = \dfrac{5}{3}x^2 + 2$

c) $y = -x^2 + 8x$

d) $y = 3x^2 + 4x - 2$

a) $a = 1$, $b = 6$, $c = -1$; eje: $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{2} = -3$. $f(-3) = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) - 1 = -10$.

Ecuación del eje: $x = -3$, coordenadas del vértice: $V(-3, -10)$.

b) $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{0}{2 \cdot \frac{5}{3}} = 0,\ f(0) = 2$. Eje: $x = 0$, vértice: $V(0, 2)$.

c) $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{8}{2 \cdot (-1)} = 4,\ f(4) = -4^2 + 8 \cdot 4 = 16$. Eje: $x = 4$, vértice: $V(4, 16)$.

d) $x = -\dfrac{4}{2 \cdot 3} = -\dfrac{2}{3},\ f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right) - 2 = 3 \cdot \dfrac{4}{9} - \dfrac{8}{3} - 2 = \dfrac{4}{3} - \dfrac{8}{3} - 2 = -\dfrac{4}{3} - 2 = -\dfrac{10}{3}$.

Eje: $x = -\dfrac{2}{3}$, vértice: $V\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{10}{3}\right)$.

11.27 Averigua si las siguientes parábolas son secantes al eje *OX* o tangentes o no lo cortan.

a) $y = x^2 + 6x - 7$

b) $y = 4x^2 - 1$

c) $y = x^2 - x + 1$

d) $y = 16x^2 - 24x + 9$

a) $x^2 + 6x - 7 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 + 4 \cdot 7}}{2} = \dfrac{-6 \pm 8}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -7 \end{cases} \Rightarrow$ 2 soluciones. La parábola corta al eje *OX*.

b) $4x^2 - 1 = 0,\ x^2 = \dfrac{1}{4},\ x = \pm\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ 2 soluciones. La parábola corta al eje *OX*.

c) $x^2 - x + 1 = 0,\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \Rightarrow$ no tiene soluciones $\Rightarrow$ La parábola no corta al eje *OX*.

d) $16x^2 - 24x + 9 = 0,\ x = \dfrac{24 \pm \sqrt{576 - 4 \cdot 9 \cdot 16}}{32} = \dfrac{24 \pm 0}{32} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow$ 1 solución.

La parábola es tangente al eje *OX*.

11.28 Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas, la ecuación del eje y las coordenadas del vértice de las siguientes parábolas.

a) $y = -x^2 + 3x + 10$ **b) $y = 9x^2 - 6x + 1$**

a) Puntos de corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 10$. Corta al eje OY en el punto $C(0, 10)$.

Puntos de corte con el eje OX: $-x^2 + 3x + 10 = 0$, $x^2 - 3x - 10 = 0$, $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \dfrac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$.

Corta al eje OX en los puntos $A(5, 0)$ y $B(-2, 0)$.

$x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{3}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{3}{2}$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \dfrac{3}{2} + 10 = -\dfrac{9}{4} + \dfrac{9}{2} + 10 = \dfrac{49}{4}$.

Eje: $x = \dfrac{3}{2}$, vértice: $V\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{49}{4}\right)$.

b) Puntos de corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 1$. Corta al eje OY en el punto $C(0, 1)$.

Puntos de corte con el eje OX: $9x^2 - 6x + 1 = 0$, $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \dfrac{1}{3}$.

Es tangente al eje OX en el punto $A\left(\dfrac{1}{3}, 0\right)$, por tanto A es su vértice.

Eje: $x = \dfrac{1}{3}$, vértice: $V\left(\dfrac{1}{3}, 0\right)$.

11.29 La parábola $y = x^2 + bx + c$ pasa por los puntos $A(2, 3)$ y $B(-1, 1)$. Halla b y c.

Por pasar A y por B tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3 = 2^2 + 2b + c \\ 1 = (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 = 4 + 2b + c \\ 1 = 1 - b + c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -1 = 2b + c \\ 0 = -b + c \end{array}\right\} \text{ restando: } -1 = 3b, \quad b = -\frac{1}{3}, \quad c = -\frac{1}{3}.$$

Ejercicio resuelto

11.30 Dibuja la gráfica de la función $y = x^2 + 2x - 3$.

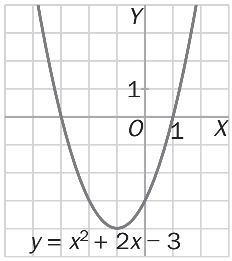
Como $a = 1 > 0$, la parábola está abierta hacia arriba.

Puntos de corte: $x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow C(0, -3)$

$y = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -3, x = 1 \Rightarrow A(-3, 0), B(1, 0)$

Eje: $x = \dfrac{-2}{2} = -1$

Vértice: $x = -1 \Rightarrow y = (-1)^2 + 2 \cdot 1 - 3 = -4 \Rightarrow V(-1, -4)$



11.31 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones.

a) $y = -x^2 + 6x - 5$ **b) $y = \dfrac{1}{4}x^2 - x - 3$**

a) $a = -1 < 0$: la parábola está abierta hacia abajo.

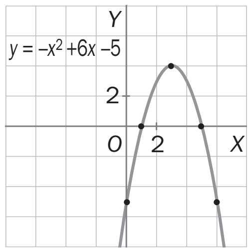
Puntos de corte: $x = 0 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow C(0, -5)$

$y = 0 \Rightarrow -x^2 + 6x - 5 = 0$, $x^2 - 6x + 5 = 0$,

$x = \dfrac{6 \pm \sqrt{26 - 20}}{2} = \dfrac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} x = 5 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow A(5, 0), B(1, 0)$

Eje: $x = -\dfrac{6}{2 \cdot (-1)} = 3$

Vértice: $x = 3 \Rightarrow y = -3^2 + 6 \cdot 3 - 5 = 4 \Rightarrow V(3, 4)$.



b) $a = \dfrac{1}{4} > 0$: la parábola está abierta hacia arriba.

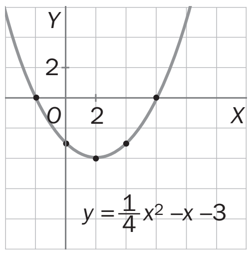
Puntos de corte: $x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow C(0, -3)$

$y = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{4}x^2 - x - 3 = 0$, $x^2 - 4x - 12 = 0$,

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} = \dfrac{4 \pm 8}{2} = \begin{cases} x = 6 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow A(6, 0), B(-2, 0)$

Eje: $x = -\dfrac{-1}{2 \cdot \dfrac{1}{4}} = 2$

Vértice: $x = 2 \Rightarrow y = \cdot\, 2^2 - 2 - 3 = -4 \Rightarrow V(2, -4)$



11.32 Halla la ecuación de la parábola que tenga su vértice en el punto $V(1, -2)$ y pase por el punto $P(0, -3)$.

Si la parábola es: $y = ax^2 + bx + c$

Por pasar por P: $-3 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = -3$.

Por pasar por V: $-2 = a + b + c$, $-2 = a + b - 3 \Rightarrow a + b = 1$.

Por ser V el vértice: $1 = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow b = -2a$.

Sustituyendo en la ecuación anterior: $a - 2a = 1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = 2$.

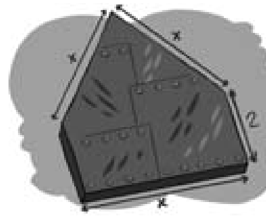
La ecuación de la parábola es: $y = -x^2 + 2x - 3$.

PARA APLICAR

11.33 Un fabricante diseña piezas de metal de la forma que se indica en la figura.

a) Halla la función que expresa el área de la pieza.

b) Comprueba que es una parábola y halla las coordenadas de su vértice.



a) El área de la pieza, A, es igual al área de un rectángulo, A_1, más el área de un triángulo equilátero, A_2:

$$A_1 = 2x;\ A_2 = \frac{x \cdot h}{2}, \text{ siendo } h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_2 = \frac{x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

$A = A_1 + A_2 = 2x + \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$. La función que expresa el área de la pieza es: $f(x) = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} + 2x$.

b) $f(x)$ es una función polinómica de segundo grado, luego se trata de una parábola.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}} = -\frac{4}{\sqrt{3}} = -\frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$f(x) = \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{16}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Las coordenadas del vértice son: $V\left(-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

11.34 La base y la altura de un triángulo suman 4 centímetros. ¿Qué longitud deben tener ambas para que el área del triángulo sea máxima?

Si x es la base y h la altura, $x + h \Rightarrow h = 4 - x$.

El área del triángulo es: $S = \dfrac{1}{2}xh = \dfrac{1}{2}x(4 - x) = \dfrac{1}{2}(4x - x^2) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x$.

Esta función es una parábola, cuyo máximo es el vértice, de abscisa $x = -\dfrac{b}{2a}$.

En nuestro caso: $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = 2$, luego $x = -\dfrac{2}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2$.

La base debe medir 2 cm y la altura $h = 4 - 2 = 2$ cm.

11.35 Dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x$.

a) Halla las coordenadas de sus puntos de intersección.

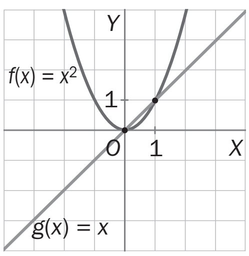
b) Dibuja en unos mismos ejes de coordenadas las gráficas de las dos funciones.

c) A la vista de lo anterior, razona cuándo un número es mayor que su cuadrado.

a) Se resuelve el sistema: $\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = x,\ x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1 \Rightarrow f(0) = 0,\ f(1) = 1$.

Los puntos de intersección son $O(0, 0)$ y $A(1, 1)$.

b)



c) Se observa que la gráfica de f está siempre por encima de la gráfica de g, salvo entre $x = 0$ y $x = 1$ que sucede al revés. Por tanto, $x^2 \geq x$, salvo entre 0 y 1, que $x^2 < x$.

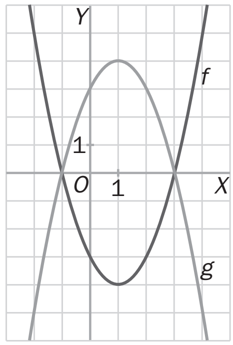
Es decir, un número es mayor que su cuadrado si el número está comprendido entre 0 y 1.

Problema resuelto

11.36 Dada la parábola $f(x) = x^2 - 2x - 3$:

a) Dibuja su gráfica.

b) Dibuja la gráfica y halla la ecuación de la parábola $g(x)$, simétrica de la anterior respecto del eje *OX*.



a) $a > 0$,

puntos de corte: $C(0, -3)$, $A(3, 0)$, $B(-1, 0)$.

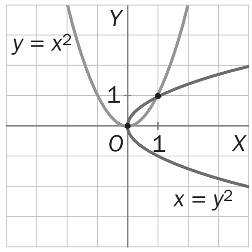
Eje: $x = 1$.

Vértice: $V(1, -4)$.

b) Si g es la simétrica de f respecto de OX, $g(x) = -f(x)$, luego: $g(x) = -x^2 + 2x + 3$.

11.37 Dadas las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$, represéntalas según el eje correspondiente, pero en un mismo sistema de ejes coordenados.

Determina los puntos de corte de ambas parábolas.



La gráfica de la parábola $x = y^2$ es la misma que la de $y = x^2$ intercambiando los ejes X e Y.

En la figura se representan las gráficas de las dos parábolas.

Para hallar los puntos de corte se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ x = y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow y = (y^2)^2 \Rightarrow y^4 - y = 0 \Rightarrow y(y^3 - 1) = 0 \Rightarrow y = 0,\ y^3 - 1 = 0$$

Resolvemos la ecuación: $y^3 - 1 = 0 \Rightarrow (y - 1)(y^2 + y + 1) = 0$

$$y^2 + y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\text{: no tiene raíces reales.}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Luego la ecuación $y^4 - y = 0$ tiene dos raíces reales: $y_1 = 0$, $y_2 = 1$.

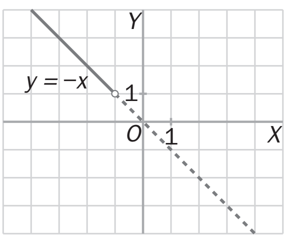
Sustituyendo: $x = y^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow$ Los puntos de corte son $O(0, 0)$ y $A(1, 1)$.

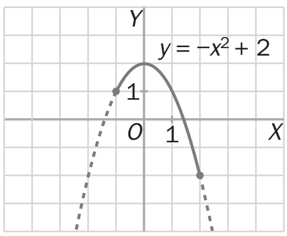
Funciones polinómicas definidas a trozos

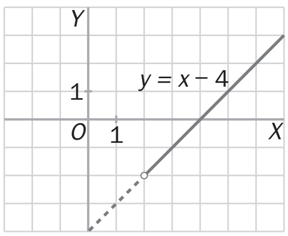
Problemas resueltos

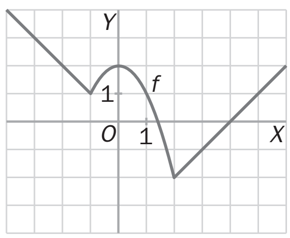
11.38 Representa la gráfica de la siguiente función. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + 2 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ x - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Se representa primero cada uno de los trozos de la función, y en la última figura, la función completa.

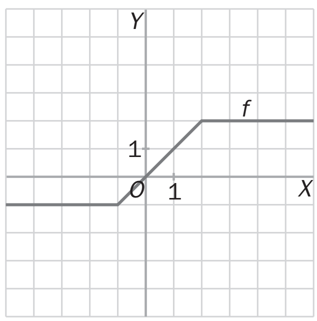








11.39 Halla la expresión algebraica de la función cuya gráfica es la siguiente.



La función está definida a trozos y consta de tres partes.

El trozo de la izquierda corresponde a la recta $y = -1$, si $x < -1$.

El trozo del centro corresponde a la recta $y = x$, si $-1 \le x \le 2$.

El trozo de la derecha corresponde a la recta $y = 2$, si $x > 2$.

La expresión algebraica de la función es: $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

11.40 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 4 & \text{si } x = 0 \\ -x + 3 & \text{si } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

a) Halla $f(-1)$, $f(0)$, $f(0{,}1)$, $f(2{,}9)$, $f(3)$ y $f(4)$.

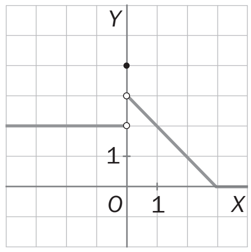
b) Dibuja su gráfica.

a) $f(-1) = 2$ $\quad f(0) = 3$

$f(0{,}1) = -0{,}1 + 3 = 2{,}9$ $\quad f(3) = 0$

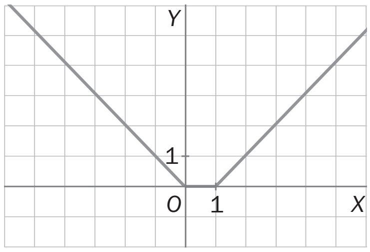
$f(2{,}9) = -2{,}9 + 3 = 0{,}1$ $\quad f(4) = 0$

b)



11.41 Dibuja la gráfica de la siguiente función.

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

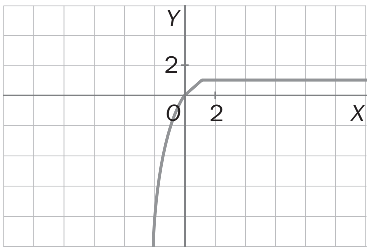


11.42 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones.

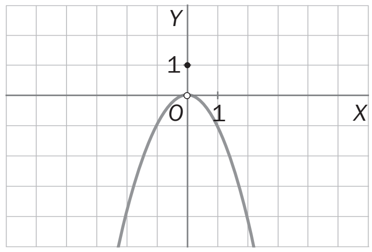
a) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a)

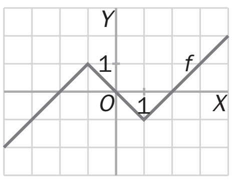


b)

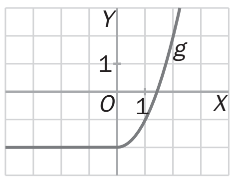


11.43 Halla la expresión algebraica de las funciones, formadas por trozos de rectas o parábolas, que tienen estas gráficas.

a)



b)



a) La función consta de tres trozos de rectas.

El trozo de la izquierda es paralela a la recta $y = x$, y pasa por $A(-2, 0)$,

luego: $y = x + n \Rightarrow 0 = -2 + n$, $n = 2 \Rightarrow y = x + 2$.

La parte central corresponde a la recta $y = -x$.

El trozo de la derecha es una recta paralela a $y = x$, y que pasa por $B(2, 0)$,

luego: $y = x + n \Rightarrow 0 = 2 + n$, $n = -2 \Rightarrow y = x - 2$.

La expresión algebraica de la función es: $f(x) = \begin{cases} x + 2 \text{ si } x < -1 \\ -x \text{ si } -1 \leq x \leq 1 \\ x - 2 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

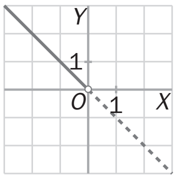
b) El trozo de la izquierda corresponde a la recta $y = -2$. El trozo de la derecha corresponde a la parábola $y = x^2 - 2$.

La ecuación de la función es: $f(x) = \begin{cases} -2 \text{ si } x \leq 0 \\ x^2 - 2 \text{ si } x > 0 \end{cases}$

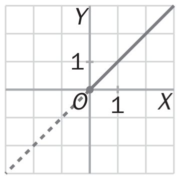
Ejercicio resuelto

11.44 Representa la gráfica de la función valor absoluto $f(x) = |x|$, que está definida del siguiente modo:

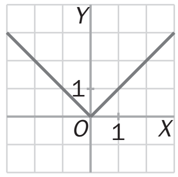
$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



$y = -x$



$y = x$



$y = |x|$

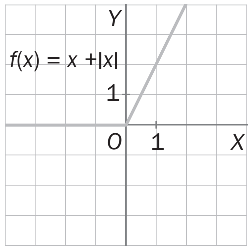
11.45 Representa la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x + |x|$ **b) $f(x) = x - 2|x|$**

a) $f(x) = x + |x| = x - x = 0$, si $x < 0$

$f(x) = x + |x| = x + x = 2x$, si $x \geq 0$

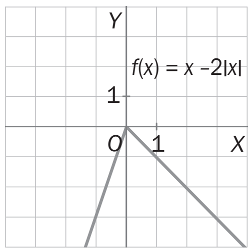
luego: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



b) $f(x) = x - 2\,|x| = x - 2\,(-x) = x + 2x = 3x$, si $x < 0$

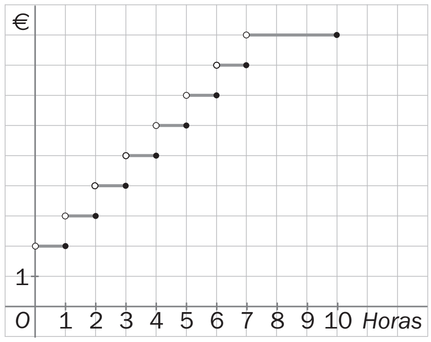
$f(x) = x - 2\,|x| = x - 2x = -x$, si $x \geq 0$

luego: $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 0 \\ -x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

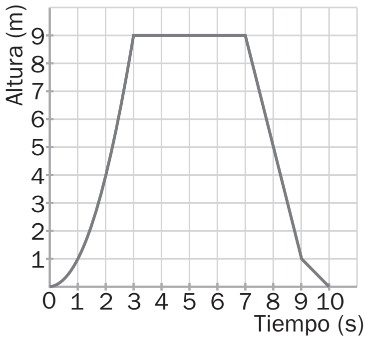


PARA APLICAR

11.46 El precio por el estacionamiento de un vehículo en un aparcamiento público es de 2 euros por la primera hora, 1 euro más por cada hora añadida o fracción, y hasta un máximo de 8 euros por día. Dibuja la gráfica de esa función correspondiente a las 10 primeras horas.



11.47 Una paloma vuela desde el suelo hasta la terraza de una casa, permanece en ella un tiempo y luego regresa al suelo. La gráfica, formada por trozos de rectas o parábolas, muestra la variación en el tiempo de la altura a la que se encuentra la paloma.



Halla la expresión algebraica de la función correspondiente a la trayectoria seguida por la paloma.

Está formada por 4 trozos:

Primer trozo: $y = x^2$, si $0 \le x < 3$

Segundo trozo: $y = 9$, si $3 \le x \le 7$

El tercer trozo es un segmento de la recta que pasa por los puntos $A(7, 9)$ y $B(9, 1)$:

$$\frac{x-7}{9-7} = \frac{y-9}{1-9} \Rightarrow \frac{x-7}{2} = \frac{y-9}{-8}$$

Operando y simplificando: $y = -4x + 37$, si $7 < x < 9$

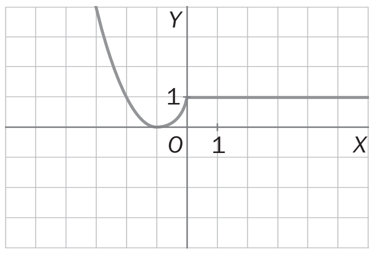
El cuarto trozo es un segmento de la recta paralela a $y = -x$, pasa por el punto $C(10, 0)$.

$y = -x + n \Rightarrow 0 = -10 + n \Rightarrow n = 10$. La ecuación es $y = -x + 10$, si $9 \le x \le 10$

La expresión algebraica de la función es: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x < 3 \\ 9 & \text{si } 3 \le x \le 7 \\ -4x + 37 & \text{si } 7 < x < 9 \\ -x + 10 & \text{si } 9 \le x \le 10 \end{cases}$

11.48 Dibuja la gráfica y escribe la expresión de la función simétrica respecto del origen de coordenadas de la siguiente función.

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}}$$



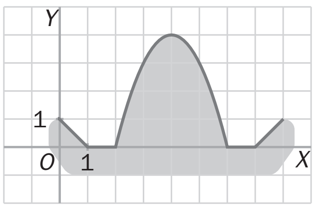
La simétrica respecto del origen de la función $f(x)$ es una función $g(x) = -f(x)$:

$-(-x + 1)^2 = -(x - 1)^2$ si $-x < 0 \Rightarrow x > 0$

La simétrica respecto del origen de $f(x) = 1$ si $x \ge 0$ es $g(x) = -1$ si $x < 0$.

Por tanto: $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ -(x-1)^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

11.49 Escribe la expresión algebraica de la función cuya gráfica es el perfil de este sombrero, compuesto por segmentos y un trozo de parábola.



El primer trozo de la función pertenece a la recta paralela a $y = -x$ que pasa por $A(1, 0)$: $y = -x + n \Rightarrow 0 = -1 + n$, $n = 1$. La recta es: $y = -x + 1$.

El segundo y el cuarto trozo son partes de la recta $y = 0$.

El quinto trozo pertenece a la recta paralela a $y = x$ que pasa por $B(7, 0)$: $y = x + n' \Rightarrow 0 = 7 + n'$, $N' = -7$.

La recta es: $y = x - 7$.

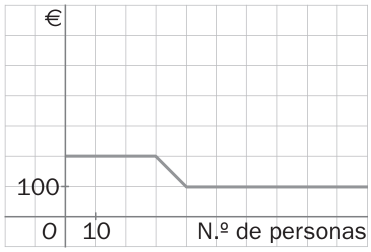
El tercer trozo es una parte de la parábola trasladada de $y = -x^2$ cuatro unidades hacia arriba y cuatro unidades hacia la derecha; o sea, un trozo de la parábola $y = -(x - 4)^2 + 4$.

La expresión algebraica de la función es: $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < 2 \\ -(x-4)^2 + 4 & \text{si } 2 \le x \le 6 \\ 0 & \text{si } 6 < x < 7 \\ x - 7 & \text{si } 7 \le x \le 8 \end{cases}$

11.50 El precio del viaje de fin de curso de 4.º de ESO es de 200 euros por persona si van 30 personas o menos. En cambio, si viajan más de 30 y menos de 40, rebajan un 5% por cada persona que sobrepase el número de 30, y si asisten 40 o más, el precio por persona es de 100 euros.
Halla la expresión y dibuja la gráfica de la función que hace corresponder al número de viajeros el precio del viaje.

Si $n = 31$, el precio es:
$200 - 0{,}05 \cdot (31 - 30) \cdot 200 = 200 - 0{,}05 \cdot 31 \cdot 200 + 0{,}05 \cdot 30 \cdot 200 =$
$= 200(2{,}5 - 0{,}05 \cdot 31) = 200 \cdot 0{,}5(50-31) = 10 \cdot 19 = 190$ €
Si $n = 32$, el precio es $200(2{,}5 - 0{,}05 \cdot 32) = 10(50 - 32) = 180$ €

La expresión de la función es: $f(x) = \begin{cases} 200 & \text{si } 0 < x \leq 30 \\ 10(50 - x) & \text{si } 30 < x < 40 \\ 100 & \text{si } x \geq 40 \end{cases}$



MATEMÁTICAS APLICADAS

PARA APLICAR

11.51 En el campeonato de Matemáticas del centro nos proponen la siguiente prueba.
Tienes 30 bolas que hay que repartir en dos cajas, de forma que el producto del número de bolas que haya en cada caja sea el mayor posible.
¿Cómo hay que distribuir las bolas para superar la prueba?

Si x es el número de bolas de la primera caja e y el número de bolas de la segunda: $x + y = 30$.
Hay que maximizar: producto $= x \cdot y$.
Se despeja y de la primera, y la función es: $f(x) = x \cdot (30 - x) = -x^2 + 30x$.
El coeficiente de x^2 es negativo. La parábola tiene el máximo en el vértice:
$V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-30}{2 \cdot (-1)} = 15 \Rightarrow x = 15 \Rightarrow y = 15.$
Hay que distribuir las bolas poniendo 15 bolas en cada caja.

11.52 Calcula las dimensiones de una ventana rectangular de 6 metros de perímetro para que tenga la máxima superficie posible y así pueda entrar más luz.

Perímetro: $2x + 2y = 6 \Rightarrow x + y = 3$.
Maximizar: área $= x \cdot y$.
Se despeja y de la primera y se sustituye en la segunda. La función es: $f(x) = x \cdot (3 - x) = -x^2 + 3x$.
El coeficiente de x^2 es negativo $\Rightarrow$ La parábola tiene el máximo en el vértice.
Vértice: $V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-3}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow y = \dfrac{3}{2}$.
La máxima superficie posible se obtiene cuando los dos lados del rectángulo miden 1,5 metros cada uno. La ventana entonces es cuadrada.

ACTIVIDADES FINALES

PARA PRACTICAR Y APLICAR

11.53 Sin dibujar sus gráficas, contesta a las siguientes preguntas relativas a las parábolas.

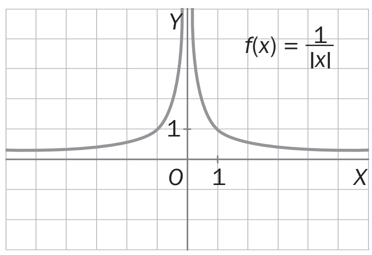
$f(x) = \dfrac{3}{4}x^2 \qquad g(x) = -\dfrac{4}{3}x^2$

a) ¿Tienen máximos o mínimos?
b) ¿En qué intervalos son crecientes y en cuáles son decrecientes?
c) ¿Cuál tiene sus ramas más abiertas?

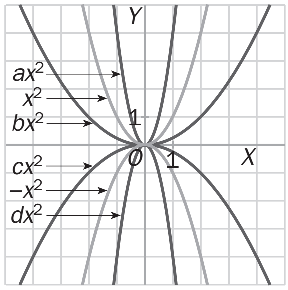
a) f tiene un mínimo en $O(0, 0)$, g tiene un máximo en $O(0, 0)$.
b) f es creciente en $(0, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$, g es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.
c) f está abierta hacia arriba y g está abierta hacia abajo; pero como $\dfrac{3}{4} < \dfrac{4}{3}$, f está más abierta que g.

11.54 ¿Qué puedes decir sobre los valores de *a*, *b*, *c* y *d* de las parábolas $y = ax^2$, $y = bx^2$, $y = cx^2$ e $y = dx^2$, que están representadas en el dibujo adjunto?

a y b son mayores que 0; c y d son menores que 0.
a es mayor que 1 y b es menor que 1; c es mayor que -1 y d es menor que -1.
Así: $a > 1$, $0 < b < 1$, $-1 < c < 0$, $d < -1$.



11.55 Las funciones de la figura son trasladadas de las funciones $y = x^2$ o $y = -x^2$. Halla sus ecuaciones.



f_1: $y = x^2 + 1$

f_2: $y = -x^2 - 2$

f_3: $y = (x - 3)^2$

f_4: $y = -(x + 4)^2$

11.56 Halla el vector de traslación que transforma la parábola $y = 9x^2$ en las siguientes parábolas.

a) $y = 9x^2 + 4$

b) $y = 9(x - 5)^2$

c) $y = 9(x + 2)^2 - 3$

d) $y = 9x^2 + 18x + 9$

a) $\vec{v} = (0, 4)$

b) $\vec{v} = (5, 0)$

c) $\vec{v} = (-2, -3)$

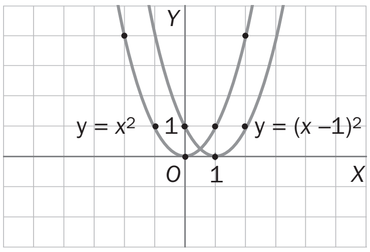
d) $y = 9x^2 + 18x + 9 = 9(x^2 + 2x + 1) = 9(x + 1)^2 \Rightarrow \vec{v} = (-1, 0)$

11.57 Mediante traslaciones, dibuja las gráficas de las siguientes funciones.

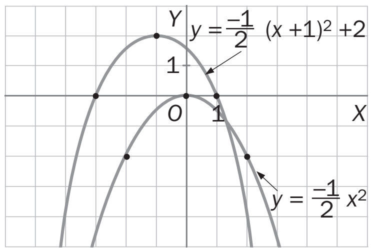
a) $y = x^2 - 2x + 1$

b) $y = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 2$

a) $y = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$



b)



11.58 Halla el eje, el vértice, los puntos de corte con los ejes de coordenadas –si existen–, el dominio y el recorrido de las siguientes parábolas.

a) $y = -x^2 - 11x - 10$

b) $y = x^2 + 2x + 3$

a) Eje: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-11}{2 \cdot (-1)} = -\frac{11}{2}$.

Vértice: $x = -\frac{11}{2} \Rightarrow y = -\left(-\frac{11}{2}\right)^2 - 11 \cdot \left(-\frac{11}{2}\right) - 10 = -\frac{121}{4} + \frac{121}{2} - 10 = \frac{81}{4} \Rightarrow V\left(-\frac{11}{2}, \frac{81}{4}\right)$.

Puntos de corte con los ejes: $x = 0 \Rightarrow y = -10 \Rightarrow C(0, -10)$.

$y = 0 \Rightarrow -x^2 - 11x - 10 = 0,\ x^2 + 11x + 10 = 0,\ x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 40}}{2} = \frac{-11 \pm 9}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -10 \end{cases}$

$\Rightarrow A(-1, 0),\ B(-10, 0)$

Dominio: todos los números reales: $D(f) = \mathbf{R}$. Como $a = -1 < 0$, la parábola presenta un máximo en su vértice; luego el recorrido es el conjunto de los números y tales que $y \leq \frac{81}{4}$: $R(f) = \left(-\infty, \frac{81}{4}\right]$

b) Eje: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1$ Vértice: $x = -1 \Rightarrow y = (-1)^2 + 2(-1) + 3 = 2 \Rightarrow V(-1,2)$.

Puntos de corte con los ejes: $x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow C(0, 3)$.

$y = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0,\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$: no corta al eje OX.

Dominio: todos los números reales: $D = \mathbf{R}$. Como $a = 1 > 0$, la parábola presenta un mínimo en su vértice; luego el recorrido es el conjunto de los números y tales que $y \geq 2$: $R(f) = [2, +\infty)$.

11.59 Dibuja la gráfica de la función: $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$

Como $a = \frac{1}{2} > 0$, está abierta hacia arriba.

Puntos de corte con el eje OX:

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2}\text{: no corta al eje } OX.$$

Puntos de corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(0, 3)$.

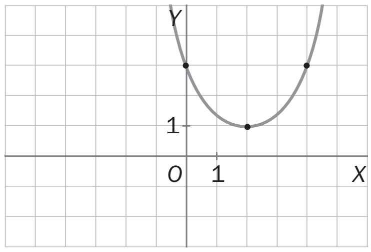
Eje: $x = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{1} = 2$; el eje es la recta $x = 2$.

Vértice: $x = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 1 \Rightarrow V(2, 1)$.

Como no hay puntos de corte con el eje OX, conviene que tengamos las coordenadas de algún punto más de la parábola. Por ejemplo:

$$x = -2 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot 4 + 4 + 3 = 9 \Rightarrow B(-2, 9)$$

$$x = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot 16 - 8 + 3 = 3 \Rightarrow C(4, 3)$$



11.60 Representa la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x) = |x - 1|$

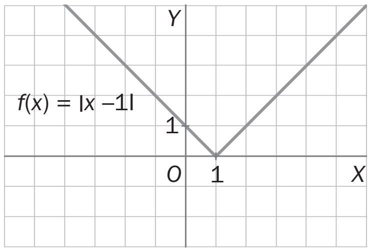
b) $f(x) = |x + 1|$

c) $f(x) = |2x - 4|$

d) $f(x) = \frac{1}{|x|}$

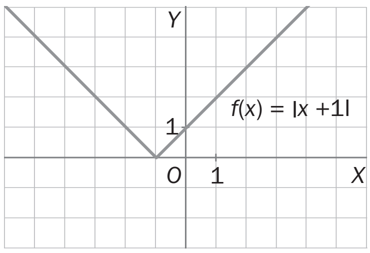
a) $f(x) = \begin{cases} -(x - 1) & \text{si } x - 1 < 0 \\ x - 1 & \text{si } x - 1 \geqslant 0 \end{cases}$

luego: $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$



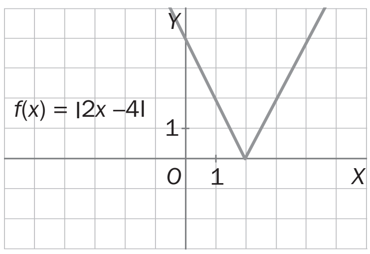
b) $f(x) = |x + 1| = \begin{cases} -(x + 1) & \text{si } x + 1 < 0 \\ x + 1 & \text{si } x + 1 \geqslant 0 \end{cases}$

luego: $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } x \geqslant -1 \end{cases}$



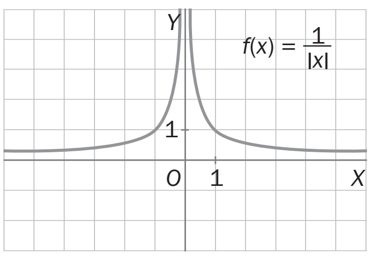
c) $f(x) = |2x - 4| = \begin{cases} -(2x - 4) & \text{si } 2x - 4 < 0 \\ 2x - 4 & \text{si } 2x - 4 \geqslant 0 \end{cases}$

luego: $f(x) = \begin{cases} -2x + 4 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 4 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$



d) $f(x) = \frac{1}{|x|} = \begin{cases} \frac{1}{-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

luego: $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$



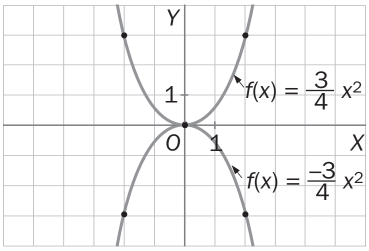
11.61 Una parábola de vértice el origen de coordenadas pasa por el punto $A(2, -3)$. Halla la ecuación y la representación gráfica de la parábola que resulta cuando la parábola anterior se refleja sobre el eje de abscisas.

La ecuación de la parábola es del tipo $y = ax^2$. Por pasar por A: $-3 = a \cdot 2^2 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$.

La ecuación de la parábola es $y = -\frac{3}{4}x^2$.

Cuando se refleja sobre el eje de abscisas, la ecuación es: $y = -\frac{3}{4}x^2$.

x	$y = \frac{3}{4}x^2$
0	0
1	$\frac{3}{4}$
-1	$\frac{3}{4}$
2	3
-2	3



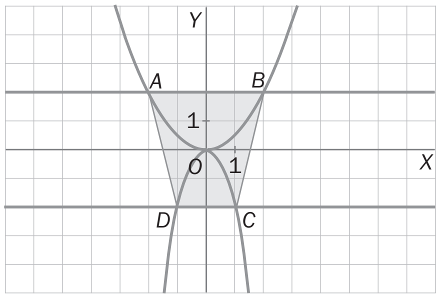
11.62 Sean A y B los puntos, respectivamente, del segundo y primer cuadrantes en que la recta $y = 2$ corta la parábola $y = \frac{x^2}{2}$. Y sean D y C los puntos del tercero y cuarto cuadrante, respectivamente, en que la recta $y = -2$ corta la parábola $y = -2x^2$. Halla el área del trapecio *ABCD.*

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{x^2}{2} \\ y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{2} = 2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow B(2, 2) \text{ y } A(-2, 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = -2x^2 \\ y = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x^2 = -2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow C\ (1, -2) \text{ y } D(-1, -2)$$

Área del trapecio: área $= \frac{AB + DC}{2} \cdot MN = \frac{4 + 2}{2} \cdot 4 = 12$

El área del trapecio *ABCD* es 12 unidades de superficie.

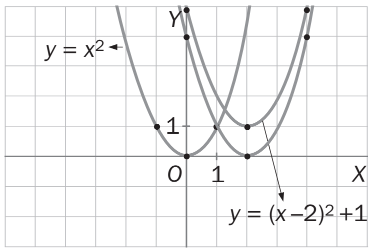


11.63 Expresa $x^2 - 4x + 5$ como suma del cuadrado de un binomio y de un número, y dibuja la gráfica de la función $y = x^2 - 4x + 5$ mediante traslaciones.

Si el cuadrado del binomio es $(ax + b)^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2$,
a^2 debe ser 1, luego puede ser $a = 1$;
$y - 4 = 2ab$, luego $b = -2$.

Por tanto: $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + k$; $x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + k \Rightarrow k = 1$.

Por tanto: $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$.



11.64 Dada la parábola de ecuación $y = -x^2 + 4x - 5$:

a) Halla el vértice y el eje.

b) Halla las coordenadas de los puntos de corte con los ejes.

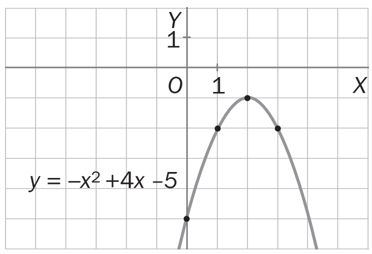
c) Halla las coordenadas de otro punto de la parábola y dibuja su gráfica.

a) Eje: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-1)} = 2$. Vértice: $x = 2 \Rightarrow y = -2^2 + 4 \cdot 2 - 5 = -1 \Rightarrow V(2, -1)$.

b) Puntos de corte con los ejes: $x = 0 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow C(0, -5)$.

$y = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x - 5 = 0$, $x^2 - 4x + 5 = 0$, $x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$: no corta al eje OX.

c) Hacemos, por ejemplo, $x = 3 \Rightarrow y = -3^2 + 4 \cdot 3 - 5 = -2 \Rightarrow A(3, -2)$.
Señalamos en los ejes de coordenadas los datos que hemos obtenido y, a partir de ellos, dibujamos la gráfica de la parábola.



11.65 Halla la ecuación de la parábola que pasa por el origen de coordenadas y por los puntos $A(2,\ 2)$ y $B(-1,\ -7)$.

Si la ecuación de la parábola es $y = ax^2 + bx + c$, por pasar por el origen es: $0 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 0$.

Por tanto, la parábola es de la forma $y = ax^2 + bx$.

Por pasar por $A(2, 2) \Rightarrow 2 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 \Rightarrow 2 = 4a + 2b$.

Por pasar por $B(-1, -7) \Rightarrow -7 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) \Rightarrow -7 = a = b$.

Despejamos a de la segunda ecuación: $a = b - 7$, y sustituimos en la primera:
$2 = 4(b - 7) + 2b$, $2 = 4b - 28 + 2b$, $30 = 6b$, $b = 5 \Rightarrow a = -2$.

La ecuación de la parábola es: $y = -2x^2 + 5x$.

11.66 La parábola $y = x^2 + bx + c$ corta el eje OX en el punto $A(4,\ 0)$ y tiene como eje la recta $x = 1$.

a) ¿En qué otro punto corta el eje OX?

b) Halla la ecuación de la parábola.

c) ¿Cuáles son las coordenadas del vértice?

d) ¿En qué punto corta el eje OY?

a) El punto de corte del eje de la parábola con el eje OX es el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos de corte de la parábola con el eje OX. Por tanto, si el otro punto de corte es $B(x_1, 0)$, se tiene:
$1 = \dfrac{4 + x_1}{2} \Rightarrow x_1 = -2$. Luego corta al eje OX en $B(-2, 0)$.

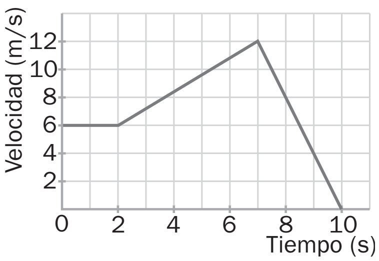
b) La abscisa del vértice es: $1 = -\dfrac{b}{2a}$. Como $a = 1 \Rightarrow b = -2$.
La parábola es $y = x^2 - 2x + c$.
Como pasa por $A(4, 0) \Rightarrow 0 = 16 - 8 + c \Rightarrow c = -8$. La parábola es $y = x^2 - 2x - 8$.

c) La abscisa del vértice es: $y = 1^2 - 2 \cdot 1 - 8 = -9$. El vértice es $V(1, -9)$.

d) Se hace $x = 0$ en la ecuación de la parábola $\Rightarrow y = -8$. El punto de corte con el eje OY es $C(0, -8)$.

11.67 La siguiente gráfica representa la velocidad de un cuerpo en función del tiempo. Escribe la expresión de la función que corresponde a la gráfica.

La gráfica está formada por tres segmentos. El primero pertenece a la recta $y = 6$.



El segundo pertenece a la recta que pasa por los puntos $A(2, 6)$ y $B(7, 12)$:

$$\frac{x-2}{7-2} = \frac{y-6}{12-6} \Rightarrow \frac{x-2}{5} = \frac{y-6}{6}$$

Operando y simplificando: $y = \dfrac{6}{5}x + \dfrac{18}{5}$.

El tercer trozo pertenece a la recta que pasa por los puntos $B(7, 12)$ y $C(10, 0)$:

$$\frac{x-7}{10-7} = \frac{y-12}{0-12} \Rightarrow \frac{x-7}{3} = \frac{y-12}{-12}$$

Operando y simplificando: $y = -4x + 40$.

La expresión de la función es: $f(x) = \begin{cases} 6 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ \dfrac{6}{5}x + \dfrac{18}{5} & \text{si } 2 < x < 7 \\ -4x + 40 & \text{si } 7 \leqslant x \leqslant 10 \end{cases}$

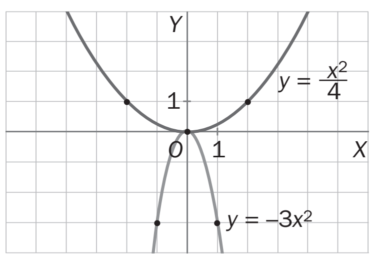
PARA REFORZAR

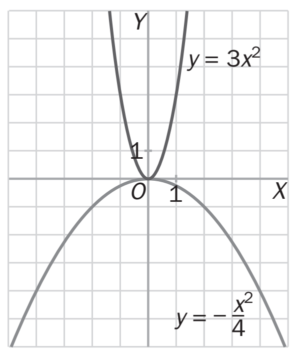
11.68 Sin elaborar previamente una tabla de valores, y a partir de las representaciones de la figura, dibuja la gráfica de las siguientes funciones.

a) $y = -3x^2$

b) $y = \dfrac{x^2}{4}$

Las gráficas de las funciones $y = -3x^2$, $y = \dfrac{x^2}{4}$ son, respectivamente, las simétricas respecto del eje OX de las gráficas de $y = 3x^2$, $y = -\dfrac{x^2}{4}$





11.69 Determina qué función del tipo $y = ax^2$ pasa por los siguientes puntos.

a) $A\left(-1, \frac{4}{5}\right)$ **b)** $B(3, -45)$ **c)** $C(-3, 9\sqrt{2})$

a) $\frac{4}{5} = a \cdot (-1)^2 \Rightarrow a = \frac{4}{5}$. La función es $y = \frac{4}{5}x^2$.

b) $-45 = a \cdot 3^2 \Rightarrow a = -5$. La función es $y = -5x^2$.

c) $9\sqrt{2} = a \cdot (-3)^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$. La función es $y = \sqrt{2}x^2$.

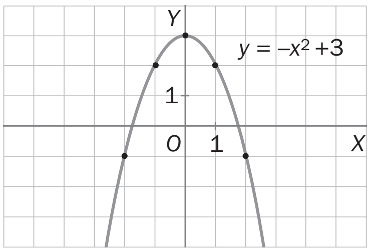
11.70 La parábola $y = (x + h)^2 + k$ tiene su vértice en el punto $V(2, -4)$. Halla h y k.

El vértice es el punto $V(-h, k)$, luego $\left.\begin{matrix} -h = 2 \\ k = -4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow h = -2,\ k = -4$.

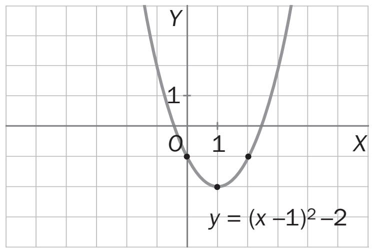
11.71 Halla las coordenadas del vértice, determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y representa las parábolas de las siguientes funciones.

a) $y = -x^2 + 3$ **b)** $y = (x - 1)^2 - 2$

a) Vértice: $V(0, 3)$. Es creciente en $(-\infty, 0)$ y es decreciente en $(0, +\infty)$.



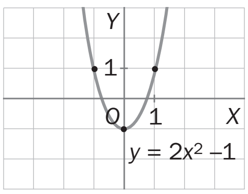
b) Vértice: $V(1, -2)$. Es es decreciente en $(-\infty, 1)$ y creciente en $(1, +\infty)$.



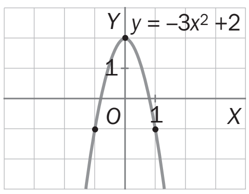
11.72 Dibuja las gráficas de las siguientes funciones.

a) $y = 2x^2 - 1$ **b)** $y = -3x^2 + 2$ **c)** $y = (x + 2)^2 - 3$ **d)** $y = 2(x - 3)^2 + 1$

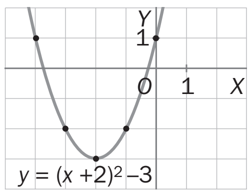
a)



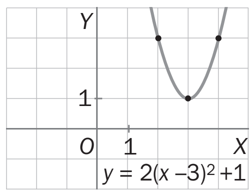
b)



c)



d)



11.73 Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas de las siguientes parábolas.

a) $y = x^2 + x - 2$ **b)** $y = 9x^2 - 1$ **c)** $y = 2x^2 - x$ **d)** $y = -x^2 - 2x + 15$

a) $x = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow C(0, -2)$

$y = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0,\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow A(1, 0),\ B(-2, 0)$.

Puntos de corte: $A(1, 0)$, $B(-2, 0)$, $C(0, -2)$.

b) $x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow C(0, -1)$

$y = 0 \Rightarrow 9x^2 - 1 = 0,\ x^2 = \frac{1}{9},\ x = \pm\frac{1}{3} \Rightarrow A\left(\frac{1}{3}, 0\right), B\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$.

Puntos de corte: $A\left(\frac{1}{3}, 0\right)$, $B\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$, $C(0, -1)$.

c) $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$.

$y = 0 \Rightarrow 2x^2 - x = 0,\ x(2x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow O(0, 0), A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Puntos de corte: $O(0, 0)$, $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

d) $x = 0 \Rightarrow y = 15 \Rightarrow C(0, 15)$.

$y = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0,\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = -5 \end{cases} \Rightarrow A(3, 0),\ B(-5, 0)$.

11.74 La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos $A(2, 0)$ y $B(4, 0)$, y la ordenada de su vértice es -1. Halla su ecuación.

Por pasar por A y B, su eje es la recta de ecuación $x = 3$, luego su vértice es el punto $V(3, -1)$.

Por tanto: $-\dfrac{b}{2a} = 3 \Rightarrow b = -6a$.

Por pasar por A: $4a + 2b + c = 0$.

Por pasar por V: $9a + 3b + c = -1$.

Sustituyendo b por $-6a$:

$$\left.\begin{array}{l} 4a - 12a + c = 0 \\ 9a - 18a + c = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c = 8a \\ c = -1 + 9a \end{array}\right\} 8a = -1 + 9a \Rightarrow a = 1, \quad c = 8, \quad b = -6$$

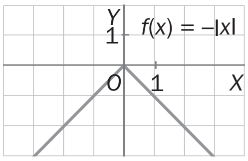
La ecuación es: $y = x^2 - 6x + 8$.

11.75 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones.

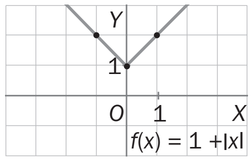
a) $f(x) = -|x|$

b) $f(x) = 1 + |x|$

a) $f(x) = -|x| = \begin{cases} -(-x) = x & \text{si } x < 0 \\ -x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$



b) $f(x) = 1 + |x| = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 0 \\ 1 + x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$



11.76 Halla el dominio y el recorrido de la función $y = a(x + h)^2 + k$ según los valores de a.

Sea cual sea a, el dominio es el conjunto de todos los números reales: $D(f) = \mathbb{R}$.

Si $a > 0$, la parábola tiene un mínimo en el vértice $V(-h, k)$, luego el recorrido son todos los números reales $y \geq k$: $R(f) = [k, +\infty)$.

Si $a < 0$, la parábola tiene un máximo en el vértice $V(-h, k)$, luego el recorrido son todos los números reales $y \leq k$: $R(f) = (-\infty, k]$.

PARA AMPLIAR

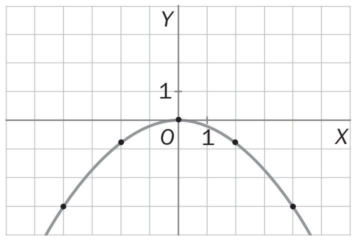
11.77 Dada la parábola de ecuación $y = -\dfrac{3}{16}x^2$.

a) Dibuja su gráfica.

b) Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la parábola, comprueba que la distancia de P al punto $F\left(0, -\dfrac{4}{3}\right)$ es igual a la distancia de P a la recta r de ecuación $y = \dfrac{4}{3}$.

a)

x	0	1	-1	2	-2	3	-3	…
y	0	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{27}{16}$	$-\frac{27}{16}$	…

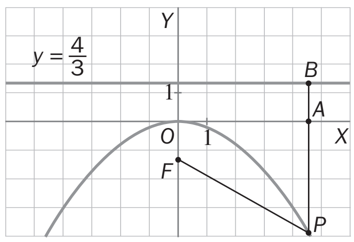


b) Si P es un punto de la parábola, sus coordenadas serán: $P\left(x, -\dfrac{3x^2}{16}\right)$.

$$d(P,F) = \sqrt{(0-x)^2 + \left(-\frac{4}{3} + \frac{3x^2}{16}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{16}{9} - 2\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3x^2}{16} + \frac{9x^4}{256}} = \sqrt{\frac{9x^4}{256} + \frac{x^2}{2} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\left(\frac{3x^2}{16} + \frac{4}{3}\right)^2} = \frac{3x^2}{16} + \frac{4}{3}$$

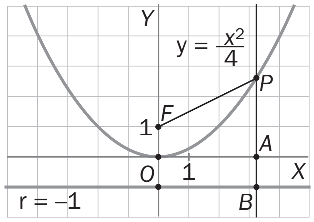
La distancia de P a la recta r es: $d(P, r) = PB = PA + AB = -y + \dfrac{4}{3} = \dfrac{3x^2}{16} + \dfrac{4}{3}$.

Por tanto, la distancia de P a F es igual a la distancia de P a r.



11.78 **Sea la parábola de ecuación $f(x) = \frac{x^2}{2p}$, donde p es un número positivo. Considera entonces el punto $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ y la recta r de ecuación $y = -\frac{p}{2}$. Calcula las distancias de un punto cualquiera de la parábola al punto F y a la recta r. ¿Qué observas? Representa gráficamente la situación si $p = 2$.**

Sea $P\left(x, \frac{x^2}{2p}\right)$ un punto de la parábola:



$$d(P, F) = \sqrt{(0-x)^2 + \left(\frac{p}{2} - \frac{x^2}{2p}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{p^2}{4} - 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot \frac{x^2}{2p} + \frac{x^4}{4p^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{x^4}{4p^2} + \frac{x^2}{2} + \frac{p^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{x^2}{2p} + \frac{p}{2}\right)^2} = \frac{x^2}{2p} + \frac{p}{2}$$

La distancia de P a la recta r es: $d(P, r) = PB = PA + AB = \frac{x^2}{2p} + \frac{p}{2}$.

Por tanto, la distancia de un punto P cualquiera de la parábola al punto F es igual a la distancia de P a la recta r.

11.79 **La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el punto $A(1, -1)$, y las coordenadas de su vértice son $V(2, -3)$. Halla a, b y c.**

La abscisa del vértice es: $x = -\frac{b}{2a} = 2$, luego $b = -4a$.

La parábola es: $y = ax^2 - 4ax + c$.

Como pasa por $V(2, -3)$: $-3 = 4a - 8a + c \Rightarrow -4a + c = -3$.

Como pasa por $A(1, -1)$: $-1 = a - 4a + c \Rightarrow -3a + c = -1$.

Se resuelve el sistema: $\left.\begin{array}{l} -4a + c = -3 \\ -3a + c = -1 \end{array}\right\}$

Restando: $-a = -2 \Rightarrow a = 2$

Luego $-8 + c = -3 \Rightarrow c = 5$

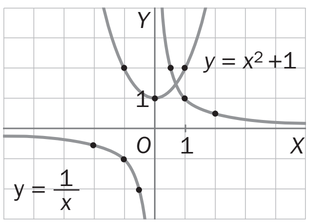
Por tanto: $a = 2$, $b = -8$, $c = 5$

11.80 **Sean las funciones: $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = x^3 + 1$.**

a) Dibuja sus gráficas en unos mismos ejes de coordenadas.

b) Averigua cuántas soluciones tiene la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$.

a)

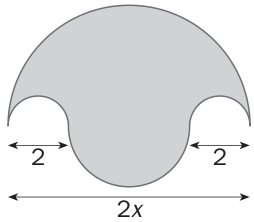


b) Los puntos de intersección de las funciones $y = f(x)$, $y = g(x)$, son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} = x^2 + 1 \Rightarrow 1 = x^3 + x \Rightarrow x^3 + x - 1 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son los puntos de intersección de las funciones $y = f(x)$, $y = g(x)$. Como en su representación gráfica se observa que se cortan en un solo punto, la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene una única solución.

11.81 La siguiente región está limitada por semicircunferencias. Escribe la fórmula de la función que expresa su área en términos de x y representa su gráfica.

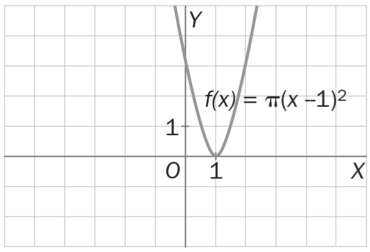


El área es el área del semicírculo grande, de radio x, más el área del semicírculo de radio $\frac{2x-2-2}{2} = x - 2$, menos el doble del área del semicírculo de radio $\frac{2}{2} = 1$.

$A = \frac{\pi}{2}x^2 + \frac{\pi}{2}(x-2)^2 - 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}[x^2 + (x-2)^2 - 2] = \frac{\pi}{2}(x^2 + x^2 - 4x + 4 - 2) = \frac{\pi}{2}(2x^2 - 4x + 2) = \pi\,(x-1)^2$

La función es $f(x) = \pi(x-1)^2$.

x	y
1	0
0	$\pi \simeq 3{,}14$
2	$\pi \simeq 3{,}1$
-1	12,56
3	12,56



11.82 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x) = |x^2 - 1|$

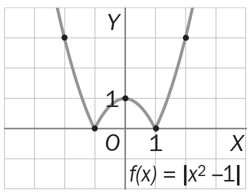
b) $f(x) = |-x^2 + 4|$

a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } x^2 - 1 < 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x^2 - 1 \geqslant 0 \end{cases}$

Como $x^2 - 1 < 0$ si $-1 < x < 1$, y $x^2 - 1 \geqslant 0$ si $x \leqslant -1$ ó $x \geqslant 1$, se tiene:

$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \leqslant -1 \text{ ó } x \geqslant 1 \end{cases}$

Gráfica:

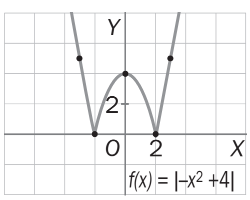


b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x^2 + 4 < 0 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -x^2 + 4 \geqslant 0 \end{cases}$

Como $-x^2 + 4 < 0$ si $x^2 - 4 > 0$, o sea, si $x < -2$ ó $x > 2$; $y - x^2 + 4 \geqslant 0$ si $-2 \leqslant x \leqslant 2$, se tiene:

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \text{ ó } x > 2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

Gráfica:



11.83 La manguera

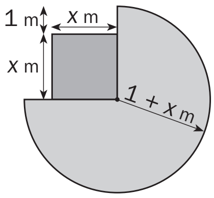
El extremo de entrada de agua de una manguera de riego se encuentra en la esquina de una casa que tiene forma cuadrada de *x* metros de lado. La manguera mide un metro más que dicho lado.

a) Representa mediante un dibujo la zona del terreno que incluye todos los puntos adonde puede llegar el extremo de salida de la manguera.

b) Escribe la ecuación de la función que relaciona la longitud de *x* con el área de la zona descrita en el apartado anterior.

Calcula dicha área para el caso de que la manguera mida 4 metros.

a)



b) La zona del terreno adonde puede llegar el extremo de salida de la manguera es igual a las tres cuartas partes del círculo de radio $x + 1$ metros. La función es: $f(x) = \frac{3}{4}(x + 1)^2 \cdot \pi$.

Si $x + 1 = 4 \Rightarrow f(3) = \frac{3}{4} \cdot 4^2 \cdot \pi = 12\pi$. Si la manguera mide 4 m, el área es 12π m^2.

11.84 Los tramos de la renta

Durante el mes de mayo, los habitantes de un país deben pagar los impuestos anuales en relación con la renta total que han ganado. La ley determina las siguientes disposiciones.

- **Se considera una cantidad fija exenta de pago de 5050 euros, considerada como necesaria para cubrir algunos gastos esenciales.**
- **A la cantidad anterior se debe sumar una de las siguientes, según el número de hijos que dependan del declarante.**

1 hijo	2 hijos	3 hijos
1800	3800	7400

- **La renta restante tributa según la siguiente tabla.**

De 0 a 17 360 euros	24%
De 17 360 a 32 360 euros	28%
De 32 360 a 52 360 euros	37%
De 52 360 euros en adelante	43%

a) Calcula los impuestos que debe pagar una persona que ha ganado 37 500 euros según tenga 0, 1, 2 ó 3 hijos.

b) Escribe la función que relaciona la renta anual conseguida por una persona y los impuestos que debe abonar sabiendo que tiene dos hijos.

a) Sea cual sea el número de hijos, tiene que tributar a lo sumo por $37\,500 - 5050 = 32\,450$ €.

- 0 hijos: tiene que pagar de impuestos $0{,}37 \cdot 32\,450 = 12\,006{,}50$ €
- 1 hijo: $32\,450 - 1800 = 30\,650$ €. Tiene que pagar de impuestos $0{,}28 \cdot 30\,650 = 8582$ €.
- 2 hijos: $32\,450 - 3800 = 28\,650$ €. Tiene que pagar de impuestos $0{,}28 \cdot 28\,650 = 8022$ €.
- 3 hijos: $32\,450 - 7400 = 25\,050$ €. Tiene que pagar de impuestos $0{,}28 \cdot 25\,050 = 7014$ €

b) Como tiene dos hijos, la cantidad exenta de pago es $5050 + 3800 = 8850$ €

Si la renta anual es de *x* euros, los impuestos que debe pagar vienen dados por la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}24(x - 8850) & \text{si } 0 \leqslant x - 8850 < 17\,360 \\ 0{,}28(x - 8850) & \text{si } 17\,360 \leqslant x - 8850 < 32\,360 \\ 0{,}37(x - 8850) & \text{si } 32\,350 \leqslant x - 8850 < 52\,360 \\ 0{,}43(x - 8850) & \text{si } 52\,360 \leqslant x - 8850 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}24(x - 8850) & \text{si } 8850 \leqslant x < 26\,210 \\ 0{,}28(x - 8850) & \text{si } 26\,210 \leqslant x < 41\,210 \\ 0{,}37(x - 8850) & \text{si } 41\,210 \leqslant x < 61\,210 \\ 0{,}43(x - 8850) & \text{si } 61\,210 \leqslant x \end{cases}$$

11.A1 Una parábola de vértice el origen de coordenadas pasa por el punto $P(-2, -5)$. Averigua si pasa también por alguno de los siguientes puntos.

a) $A(-2, 5)$ **b) $B(2, 5)$** **c) $C(2, -5)$**

La ecuación de la parábola será del tipo: $y = ax^2$. Por pasar por P: $-5 = a \cdot (-2)^2 \Rightarrow a = -\frac{5}{4}$.

La ecuación de la parábola es: $y = -\frac{5}{4}x^2$.

a) $-\frac{5}{4} \cdot (-2)^2 = -\frac{5}{4} \cdot 4 = -5 \neq 5$, luego la parábola no pasa por A.

b) $-\frac{5}{4} \cdot 2^2 = -\frac{5}{4} \cdot 4 = -5 \neq 5$, luego la parábola no pasa por B.

c) $-\frac{5}{4} \cdot 2^2 = -\frac{5}{4} \cdot 4 = -5$, luego la parábola sí pasa por C.

11.A2 Escribe la ecuación de las funciones que expresan el área de un círculo en términos del radio y en términos de la longitud de la circunferencia. ¿Cuál de las dos tiene sus ramas más abiertas?

Área del círculo: $A = \pi r^2$. Longitud de la circunferencia: $L = 2\pi r$.

La función que expresa el área del círculo en términos del radio es: $f(x) = \pi x^2$, siendo x el radio.

Como $L = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{L}{2\pi}$, luego $A = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi}$

La función que expresa el área del círculo en términos de la longitud de la circunferencia es: $g(x) = \frac{x^2}{4\pi}$, siendo x la longitud de la circunferencia.

$f(x)$ y $g(x)$ son parábolas.

Como $\pi > \frac{1}{4\pi}$, $g(x)$ tiene las ramas más abiertas que $f(x)$.

11.A3 Halla las coordenadas del vértice y las ecuaciones del eje de las siguientes parábolas.

a) $y = -x^2 + 4$ **b) $y = 2x^2 - 1$** **c) $y = -(x - 7)^2$** **d) $y = (x + 3)^2 + 1$**

a) Eje: $x = 0$. Vértice: $V(0, 4)$.

b) Eje: $x = 0$. Vértice: $V(0, -1)$.

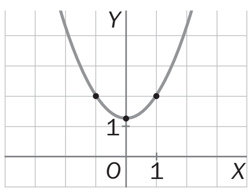
c) Eje : $x = 7$. Vértice: $V(7, 0)$.

d) Eje : $x = -3$. Vértice: $V(-3, 1)$.

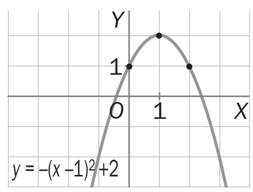
11.A4 Dibuja las gráficas de las siguientes funciones.

a) $y = \frac{3x^2 + 5}{4}$ **b) $y = 2 - (x - 1)^2$**

a) $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{4}$



b) $y = -(x - 1)^2 + 2$



11.A5 Calcula el área del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos de intersección con los ejes de coordenadas de las siguientes parábolas.

a) $y = 4x^2 - 1$ **b) $y = -4x^2 + 1$**

a) Puntos de corte con los ejes: $x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow C(0, -1)$

$y = 0 \Rightarrow 4x^2 - 1 = 0,\ x = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}, 0\right), B\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

b) Puntos de corte con los ejes:

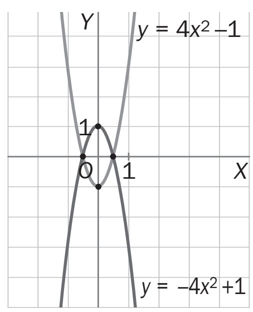
$x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow D(0, 1)$

$y = 0 \Rightarrow -4x^2 + 1 = 0,\ x = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}, 0\right), B\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

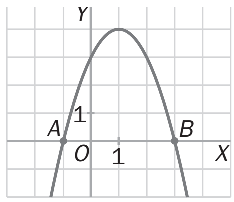
El cuadrilátero es un rombo de diagonales BA y CD:

Área $= \frac{BA \cdot CD}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$

El área del cuadrilátero es 1 unidad de superficie.



11.A6 Halla la ecuación de la parábola cuya gráfica es la siguiente.



El vértice es $V(1, 4)$ y pasa por los puntos $A(-1, 0)$ y $B(0, 3)$.

Si la ecuación es $y = ax^2 + bx + c$, la abscisa del vértice es: $\frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a$.

Luego la ecuación es $y = ax^2 - 2ax + c$.

Por pasar por $V(1, 4)$: $4 = a - 2a + c$, $4 = -a + c$.

Por pasar por $A(-1, 0)$: $0 = a(-1)^2 - 2a \cdot (-1) + c$.

Hay que resolver el sistema: $\left.\begin{array}{r} -a + c = 4 \\ 3a + c = 0 \end{array}\right\}$

Restando: $-4a = 4 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow c = 3$, $b = 2$.

La ecuación es: $y = -x^2 + 2x + 3$.

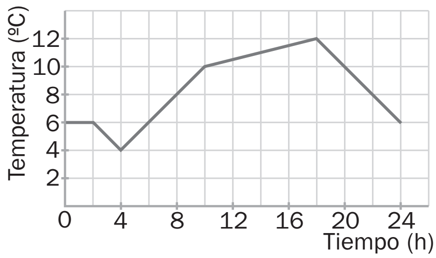
11.A7 El eje de la parábola $(m + 6)x^2 - 2m^2x + 1 = 0$ es la recta $x = 1$. ¿Cuánto vale m?

El eje de la parábola es la recta $x = -\frac{b}{2a}$, luego $-\frac{-2\,m^2}{2(m + 6)} = 1$.

$2\,m^2 = 2(m + 6)$, $m^2 = m + 6$, $m^2 - m - 6 = 0$, $m = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -2 \end{cases}$

m vale 3 ó -2.

11.A8 En la gráfica se muestra la evolución de la temperatura en una ciudad durante un día.



Escribe la expresión algebraica de la función correspondiente.

La función está formada por cinco trozos:

Primer trozo: perteneciente a la recta $y = 6$.

Segundo trozo: perteneciente a la recta paralela a $y = -x$ que pasa por $A(2, 6)$:

$y = -x + n$, $6 = -2 + n \Rightarrow n = 8$. La recta es $y = -x + 8$.

Tercer trozo: perteneciente a la recta que pasa por los puntos $B(4, 4)$ y $C(10, 10)$:

$\frac{x - 4}{10 - 4} = \frac{y - 4}{10 - 4} \Rightarrow x = y$. La recta es $y = x$.

Cuarto trozo: perteneciente a la recta que pasa por los puntos $C(10, 10)$ y $D(18, 12)$:

$\frac{x - 10}{18 - 10} = \frac{y - 10}{12 - 10}$, $\frac{x - 10}{8} = \frac{y - 10}{2}$, $x - 10 = 4\,(y - 10) \Rightarrow y = \frac{x}{4} + \frac{15}{2}$.

Quinto trozo: perteneciente a la recta que pasa por los puntos $D(18, 12)$ y $E(24, 6)$:

$\frac{x - 18}{24 - 18} = \frac{y - 12}{6 - 12}$, $\frac{x - 18}{6} = \frac{y - 12}{-6}$, $x - 18 = -y + 12 \Rightarrow y = -x + 30$

La expresión algebraica de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{si } 0 \leqslant x < 2 \\ -x + 8 & \text{si } 2 \leqslant x < 4 \\ x & \text{si } 4 \leqslant x < 10 \\ \frac{x}{4} + \frac{15}{2} & \text{si } 10 \leqslant x < 18 \\ -x + 30 & \text{si } 18 \leqslant x < 24 \end{cases}$$

El juego de los quince

En su libro *Aventuras Matemáticas*, Miguel de Guzmán saca mucho partido a este juego que causó furor a finales del siglo XIX.

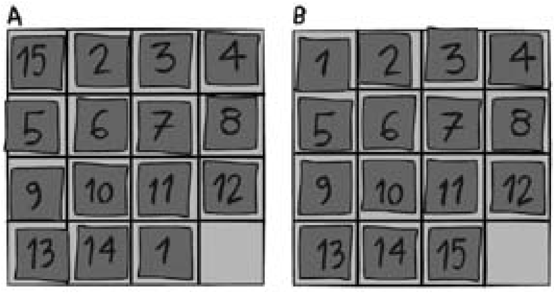
Tú mismo puedes fabricar uno:

1. Pinta una cuadrícula de 4 × 4.

2. Recorta 15 fichas de cartón un poco más pequeñas que las cuadrículas y escribe en ellas los números del 1 al 15.

3. Colócalas en la cuadrícula igual que en la figura A.

El juego consiste en deslizar las piezas sin levantarlas, aprovechando el hueco, para conseguir colocar los números como en la figura B.



El creador del juego ofreció una enorme suma de dinero al primero que le presentase una solución. ¿Lo consigues tú?

Miguel de Guzmán en su libro Aventuras Matemáticas, saca mucho partido a este juego al que dedica un capítulo completo.

Si los alumnos se han fabricado un juego de los 15, después de un rato largo jugando puede que empiecen a sospechar que el inventor del juego tenía asegurado su dinero: no se puede conseguir el objetivo propuesto.

Una forma mas sencilla de abordar este problema es reduciendo la dificultad del tablero. Si en lugar de trabajar con una cuadrícula de 4 × 4 lo hacemos con una de 2 × 2, (de la que surgirá el juego de los 3) comprobaremos que es imposible llevar a cabo la tarea propuesta.

3	2
1	

? ☞

1	2
3	

Haciendo todos los movimientos posibles hasta llegar a terminar con el cuadro vacío en la parte inferior derecha, vemos que de la posición de partida se puede llegar a:

2	1
3	

O bien a:

1	3
2	

Pero nunca a ninguna de estas otras tres opciones:

1	2
3	

3	1
2	

2	3
1	