EJERCICIOS RESUELTOS TRIGONOMETRÍA I

Cuestión 1.-

a) Pasa a radianes los siguientes ángulos: 210° y 70°

b) Pasa a grados los ángulos: $\frac{7\pi}{6}$ rad y 3,5 rad

Solución:

$$a)\ 210^\circ = 210 \cdot \frac{\pi}{180}\ \text{rad} = \frac{7\pi}{6}\ \text{rad}$$

$$70^\circ = 70 \cdot \frac{\pi}{180}\ \text{rad} = \frac{7\pi}{18}\ \text{rad}$$

$$b)\ \frac{7\pi}{6}\ \text{rad} = \frac{7\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 210^\circ$$

$$3{,}5\ \text{rad} = 3{,}5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 200^\circ\, 32'\, 7''$$

Cuestión 2.-

Completa la siguiente tabla:

GRADOS	35°		120°	
RADIANES		2π / 3		2

Solución:

$$35^\circ = \frac{35 \cdot \pi}{180}\ \text{rad} = \frac{7\pi}{36}\ \text{rad}$$

$$\frac{2\pi}{3}\ \text{rad} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 120^\circ \quad \rightarrow \quad 120^\circ = \frac{2\pi}{3}\ \text{rad}$$

$$2\ \text{rad} = 2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 114^\circ\, 35'\, 30''$$

Por tanto:

GRADOS	**35º**	120º	**120º**	114º35'30''
RADIANES	7π / 36	**2π / 3**	2π / 3	**2**

Cuestión 3.-

a) Expresa en grados los siguientes ángulos dados en radianes $\frac{5\pi}{6}$ y 3

b) Expresa en radianes los ángulos: 225° y 100°

Solución:

a) $\frac{5\pi}{6}\text{ rad} = \frac{5\pi}{6}\cdot\frac{180^\circ}{\pi} = 150^\circ$

$3\text{ rad} = 3\cdot\frac{180^\circ}{\pi} = 171^\circ 53'14''$

b) $225^\circ = 225\cdot\frac{\pi}{180}\text{ rad} = \frac{5\pi}{4}\text{ rad}$

$100^\circ = 100\cdot\frac{\pi}{180}\text{ rad} = \frac{5\pi}{9}\text{ rad}$

Cuestión 4.-

Calcular todas las razones trigonométricas en los siguientes casos:

a. $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{3} : \alpha < 90^\circ$

b. $\cos\alpha = -\frac{3}{5} : \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

c. $\text{tag}\,\alpha = 2 : 180^\circ < \alpha < 270^\circ$

d. $\text{cosec}\,\alpha = -\frac{3}{2} : 270^\circ < \alpha < 360^\circ$

e. $\sec\alpha = -2 : \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

f. $\text{cotag}\,\alpha = -1 : 270^\circ < \alpha < 360^\circ$

Solución.

a. $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{3}$ Sí $\alpha < 90^\circ \Rightarrow \alpha \in 1^\circ$ Cuadrante: $\begin{cases} \text{sen}\,\alpha ;\ \text{cosec}\,\alpha > 0 \\ \cos\alpha ;\ \sec\alpha > 0 \\ \text{tag}\,\alpha ;\ \text{cotag}\,\alpha > 0 \end{cases}$

Conocido el valor del seno se calcula el coseno mediante la ecuación fundamental.

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = +\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Conocido el seno y el coseno se calcula la tangente por su definición.

$$\text{tag}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1/3}{2\sqrt{2}/3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Conocidas las razones directas (seno, coseno y tangente) se calculan la inversas (cosecante, secante y cotangente) mediante su definición.

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{1}{1/3} = 3 \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{2}/3} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{cotag}\,\alpha = \frac{1}{\text{tag}\,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}/4} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

b. $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$: Sí $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \alpha \in 2^o$ Cuadrante: $\begin{cases} \text{sen}\,\alpha\,;\ \text{cosec}\,\alpha > 0 \\ \cos\alpha\,;\ \sec\alpha < 0 \\ \text{tag}\,\alpha\,;\ \text{cotag}\,\alpha < 0 \end{cases}$

Conocido el valor del coseno se calcula el seno mediante la ecuación fundamental.

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\text{sen}\,\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = +\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

Conocido el seno y el coseno se calcula la tangente por su definición.

$$\text{tag}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4/5}{-3/5} = -\frac{4}{3}$$

Conocidas las razones directas (seno, coseno y tangente) se calculan la inversas (cosecante, secante y cotangente) mediante su definición.

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{1}{4/5} = \frac{5}{4} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{-3/5} = -\frac{5}{3}$$

$$\text{cotag}\,\alpha = \frac{1}{\text{tag}\,\alpha} = \frac{1}{-4/3} = -\frac{3}{4}$$

c. $\text{tag}\,\alpha = 2$: Sí $180^o < \alpha < 270^o \Rightarrow \alpha \in 3^o$ Cuadrante: $\begin{cases} \text{sen}\,\alpha\,;\ \text{cosec}\,\alpha < 0 \\ \cos\alpha\,;\ \sec\alpha < 0 \\ \text{tag}\,\alpha\,;\ \text{cotag}\,\alpha > 0 \end{cases}$

Conocido el valor de la tangente se obtienen la cotangente y la secante.

$$\text{cotag}\,\alpha = \frac{1}{\text{tag}\,\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tag}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha : \ \sec\alpha = \pm\sqrt{\text{tag}^2\alpha + 1} = -\sqrt{2^2+1} = -\sqrt{5}$$

Con la secante se obtiene el coseno

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} : \ \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{-\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Conocidas la tangente y el coseno se obtiene el seno mediante la definición de tangente.

$$\text{tag}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} : \ \text{sen}\,\alpha = \cos\alpha \cdot \text{tag}\,\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} \cdot 2 = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Por último del seno se obtiene la cosecante.

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{1}{-2\sqrt{5}/5} = -\frac{5}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

d. $\operatorname{cosec}\alpha = -\frac{3}{2}$: Si $270^\circ < \alpha < 360^\circ \Rightarrow \alpha \in 4^\circ$ Cuadrante: $\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha\,;\ \operatorname{cosec}\alpha < 0 \\ \cos\alpha\,;\ \sec\alpha > 0 \\ \operatorname{tag}\alpha\,;\ \operatorname{cotag}\alpha < 0 \end{cases}$

De la definición de cosecante se obtienen el seno y la cotangente.

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} : \ \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha} = \frac{1}{-\,{}^{3}\!/_{2}} = -\frac{2}{3}$$

Conocido el valor del seno se calcula el coseno mediante la ecuación fundamental.

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = +\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Conocido el seno y el coseno se calcula la tangente por su definición.

$$\operatorname{tag}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\,{}^{2}\!/_{3}}{{}^{\sqrt{5}}\!/_{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Conocidas las razones directas (coseno y tangente) se calculan la inversas (secante y cotangente) mediante su definición.

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{{}^{\sqrt{5}}\!/_{3}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \qquad \operatorname{cotag}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tag}\alpha} = \frac{1}{-\,{}^{2\sqrt{5}}\!/_{5}} = -\frac{5}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

e. $\sec\alpha = -2$: Si $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \alpha \in 3^\circ$ Cuadrante: $\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha\,;\ \operatorname{cosec}\alpha < 0 \\ \cos\alpha\,;\ \sec\alpha < 0 \\ \operatorname{tag}\alpha\,;\ \operatorname{cotag}\alpha > 0 \end{cases}$

Conocida la secante se calcula el coseno y la tangente.

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} : \ \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tag}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha : \ \operatorname{tag}\alpha = \pm\sqrt{\sec^2\alpha - 1} = +\sqrt{(-2)^2-1} = \sqrt{3}$$

Conocidas la tangente y el coseno se obtiene el seno mediante la definición de tangente.

$$\operatorname{tag}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} : \ \operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha\cdot\operatorname{tag}\alpha = -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Conocidas las razones directas (seno y tangente) se calculan la inversas (cosecante y cotangente) mediante su definición.

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{-\,{}^{\sqrt{3}}\!/_{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} : \ \operatorname{cotag}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tag}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

f. $\text{cotag}\ \alpha = -1$: Si $270^\circ < \alpha < 360^\circ \Rightarrow \alpha \in 4^\circ$ Cuadrante: $\begin{cases} \text{sen}\ \alpha;\ \text{cosec}\ \alpha < 0 \\ \cos\alpha;\ \sec\alpha > 0 \\ \text{tag}\ \alpha;\ \text{cotag}\ \alpha < 0 \end{cases}$

Conocida la cotangente se calcula la tangente y la cosecante.

$$\text{cotag}\ \alpha = \frac{1}{\text{tag}\ \alpha} \qquad \text{tag}\ \alpha = \frac{1}{\text{cotag}\ \alpha} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\text{cotag}^2\alpha + 1 = \text{cosec}^2\alpha \qquad \text{cosec}\ \alpha = \pm\sqrt{\text{cotag}^2\alpha + 1} = -\sqrt{(-1)^2 + 1} = -\sqrt{2}$$

Conocida la cosecante se calcula el seno

$$\text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha} \qquad \text{sen}\ \alpha = \frac{1}{\text{cosec}\ \alpha} = \frac{1}{-\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Con el seno y la tangente se calcula el coseno con la definición de tangente.

$$\text{tag}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\text{tag}\ \alpha} = \frac{-\sqrt{2}/2}{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Conocido el coseno se calcula la secante.

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}/2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

<u>Cuestión 5</u>.- Sabiendo que cos α = ¼ , y que 270º <α <360°. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α.

$$\text{sen}\ \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{15}}{4} \qquad \text{cosec}\ \alpha = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{4} \qquad \sec\alpha = 4$$

$$\text{tg}\ \alpha = -\frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} = -\sqrt{15} \qquad \text{cotg}\ \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}$$

<u>Cuestión 6</u>.- Sabiendo que tg α = 2, y que 180º < α <270°. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α.

$$\sec\alpha = -\sqrt{1+4} = -\sqrt{5} \qquad \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{sen}\ \alpha = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \text{cosec}\ \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{tg}\ \alpha = 2 \qquad \text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{2}$$

Cuestión 7.- Sabiendo que sec α = 2, 0< α < π /2, calcular las restantes razones trigonométricas.

$$\cos\ \alpha = \frac{1}{2} \qquad \sec\ \alpha = 2$$

$$\text{sen}\ \alpha = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{cosec}\ \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \qquad \text{cotg}\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Cuestión 8.- Calcula las razones de los siguientes ángulos:

a) 225°

$$\sin(225^\circ) = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(225^\circ) = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(225^\circ) = \tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

b) 330°

$$\sin(330^\circ) = \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(330^\circ) = \cos(360^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(330^\circ) = \tan(360^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

c) 655°

$$\begin{array}{l|l} 2655^\circ & 360^\circ \\ \hline 135^\circ & 7 \end{array}$$

$$sen 2655^\circ = sen 135^\circ = sen(180^\circ - 45^\circ) = sen 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\ 2655^\circ = \cos\ 135^\circ = \cos\ (180^\circ - 45^\circ) = -\cos\ 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg 2655^\circ = -1$$

d) −840º

$$\begin{array}{ll} -840^\circ & \underline{|\,360^\circ} \\ -120^\circ & \quad -2 \end{array}$$

$$sin(-840^\circ) = sin(-120^\circ) = -sin(180^\circ - 60^\circ) = -sin\,60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-840^\circ) = \cos(-120^\circ) = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos\,60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan(-840^\circ) = \tan(-120^\circ) = -\tan(120^\circ) = \sqrt{3}$$

Cuestión 9.-

Calcula las razones trigonométricas de 140º y de 220º, sabiendo que:

$$\boldsymbol{sen\,40^\circ = 0{,}64;\ cos\,40^\circ = 0{,}77;\ tg\,40^\circ = 0{,}84}$$

Solución:

Como $140^\circ = 180^\circ - 40^\circ$ y $220^\circ = 180^\circ + 40^\circ$, entonces

$$sen\,140^\circ = sen\,40^\circ = 0{,}64$$
$$cos\,140^\circ = -cos\,40^\circ = -0{,}77$$
$$tg\,140^\circ = -tg\,40^\circ = -0{,}84$$

$$sen\,220^\circ = -sen\,40^\circ = -0{,}64$$
$$cos\,220^\circ = -cos\,40^\circ = -0{,}77$$
$$tg\,220^\circ = tg\,40^\circ = 0{,}84$$

Cuestión 10.-

Sabiendo que *sen* 50º = 0,77, *cos* 50º = 0,64 y *tg* 50º = 1,19, calcula (sin utilizar las teclas trigonométricas de la calculadora):

a) $\boldsymbol{cos\,130^\circ}$ **b)** $\boldsymbol{tg\,310^\circ}$ **c)** $\boldsymbol{cos\,230^\circ}$ **d)** $\boldsymbol{sen\,310^\circ}$

Solución:

a) $cos130^\circ = cos(180^\circ - 150^\circ) = -cos50^\circ = -0{,}64$

b) $tg310^\circ = tg(360^\circ - 50^\circ) = -tg50^\circ = -1{,}19$

c) $cos230^\circ = cos(180^\circ + 50^\circ) = -cos50^\circ = -0{,}64$

d) $sen310^\circ = sen(360^\circ - 50^\circ) = -sen50^\circ = -0{,}77$

Cuestión 11.-

Si $sen\ \alpha = 0{,}35$ y $0° < \alpha < 90°$ halla (sin calcular α):

a) $sen(180° - \alpha)$ b) $cos(180° + \alpha)$

Solución:

$$a)\ sen(180° - \alpha) = sen\,\alpha = 0{,}35$$
$$b)\ cos(180° + \alpha) = -cos\,\alpha$$

Necesitamos saber cuánto vale $cos\ \alpha$:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow 0{,}35^2 + cos^2\alpha = 1$$
$$0{,}1225 + cos^2\alpha = 1 \rightarrow cos^2\alpha = 0{,}8775$$
$$cos\alpha = 0{,}94 \text{ (es positivo, pues } 0° < \alpha < 90°)$$

$$\text{Por tanto } cos(180° + \alpha) = -cos\alpha = -0{,}94$$

Cuestión 12.-

Si $tg\,\alpha = \frac{1}{3}$ y α es un ángulo que está en el primer cuadrante, calcula (sin hallar α):

a) $tg(180° - \alpha)$ b) $tg(180° + \alpha)$ c) $tg(360° - \alpha)$ d) $tg(360° + \alpha)$

Solución:

$$a)\ tg(180° - \alpha) = -tg\,\alpha = -\frac{1}{3}$$
$$b)\ tg(180° + \alpha) = tg\,\alpha = \frac{1}{3}$$
$$c)\ tg(360° - \alpha) = -tg\,\alpha = -\frac{1}{3}$$
$$d)\ tg(360° + \alpha) = tg\,\alpha = \frac{1}{3}$$

Cuestión 13.- Comprobar las identidades:

a) $tg\,\alpha + \text{cotg}\,\alpha = \sec\alpha\ \text{cosec}\,\alpha$

$$tg\,\alpha + \text{cotg}\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{sen\,\alpha} = \frac{sen^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha \cdot sen\,\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha \cdot sen\,\alpha} = \sec\alpha \cdot \text{cosec}\,\alpha$$

b) $\text{cotg}^2 a = \cos^2 a + (\text{cotg}\ a \cdot \cos a)^2$

$$\cos^2 a + (\text{cotg}\ a \cdot \cos a)^2 = \cos^2 a + \text{cotg}^2\ a \cdot \cos^2 a =$$

$$\cos^2 a\left(1+\text{cotg}^2\ a\right)=\cos^2 a\cdot\text{cosec}^2\ a=\frac{\cos^2 a}{\text{sen}^2\ a}=\text{cotg}^2\ a$$

c) $\frac{1}{\sec^2 a}=\text{sen}^2 a\cdot\cos^2 a+\cos^4 a$

$$\text{sen}^2 a\cdot\cos^2 a+\cos^4 a=\cos^2 a\left(\text{sen}^2 a+\cos^2 a\right)=\cos^2 a=\frac{1}{\sec^2 a}$$

d) $\text{cotg}\,a\cdot\sec a=\text{cosec}\,a$

$$\text{cotg}\,a\cdot\sec a=\frac{\cos a}{\text{sen}\,a}\cdot\frac{1}{\cos a}=\frac{1}{\text{sen}\,a}=\text{cosec}\,a$$

e) $\sec^2 a+\text{cosec}^2 a=\frac{1}{\text{sen}^2 a\cdot\cos^2 a}$

$$\sec^2 a+\text{cosec}^2 a=\frac{1}{\cos^2 a}+\frac{1}{\text{sen}^2 a}=\frac{\text{sen}^2 a+\cos^2 a}{\text{sen}^2 a\cdot\cos^2 a}=\frac{1}{\text{sen}^2 a\cdot\cos^2 a}$$

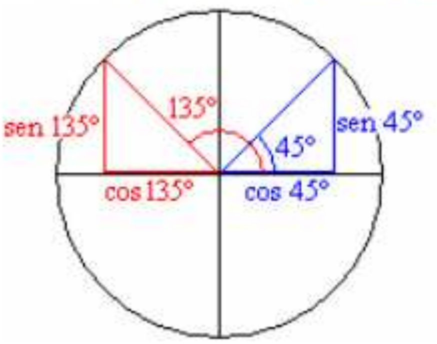
Cuestión 14.-

Calcular las razones trigonométricas de los siguientes ángulos en función de sus ángulos asociados agudos.

- **a)** 135º
- **b)** 120º
- **c)** 330º
- **d)** 240º
- **e)** 150º
- **f)** 1290º
- **g)** Sabiendo que tg 18º = 0,32 calcular la razones trigonométricas de los siguientes ángulos:
  - **i)** 72º
  - **ii)** 108º
  - **iii)** 162º
  - **iv)** 198º
  - **v)** 252º
  - **vi)** 288º
  - **vii)** 342º

Solución.

a. 135º es suplementario con 45º (135º + 45º =180º). Las razones trigonométricas de 135º están relacionadas con las de 45º, la forma más sencilla de encontrar esta relación es de forma gráfica.

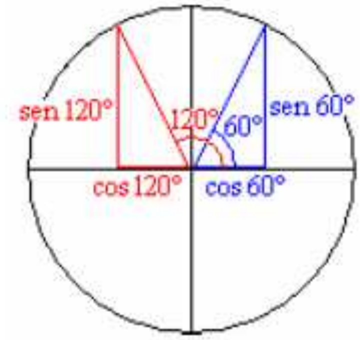


$$\text{sen}\,135º=\text{sen}\,45=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135º=-\cos 45º=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg}\,135º=\frac{\text{sen}\,135º}{\cos 135º}=\frac{\text{sen}\,45º}{-\cos 45º}=-\text{tg}\,45º=-1$$

b. 120º es suplementario con 60º (120º + 60º =180º). Las razones trigonométricas de 120º están relacionadas con las de 60º, la forma más sencilla de encontrar esta relación es de forma gráfica.

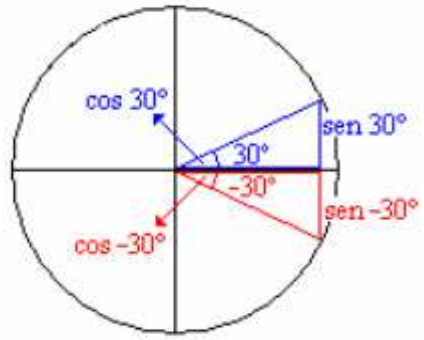


$$\text{sen}\,120° = \text{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\,135° = \frac{\text{sen}\,120°}{\cos 120°} = \frac{\text{sen}\,60°}{-\cos 60°} = -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}$$

c. 330º equivalente a −30º, asociado a 30º

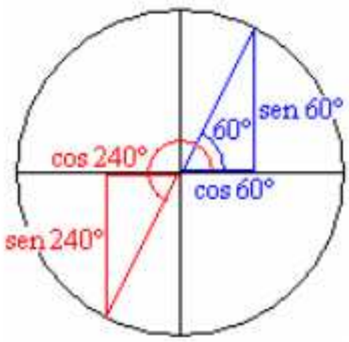


$$\text{sen} - 30° = -\text{sen}\,30° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos - 30° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg}\left(-30°\right) = \frac{\text{sen}\left(-30°\right)}{\cos\left(-30°\right)} = -\text{tg}30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

d. 240º se asocia a 60º porque se diferencia del él en 180º (240º = 60º +180º).

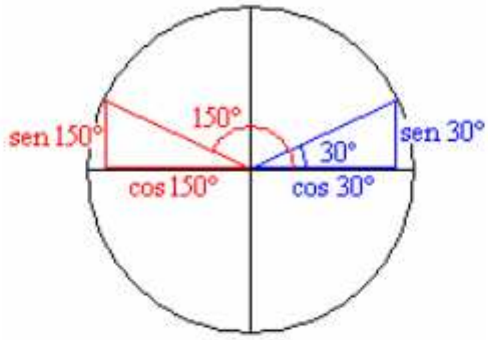


$$\text{sen}\,240° = -\text{sen}\,60 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\,240° = \frac{\text{sen}\,240°}{\cos 240°} = \frac{-\text{sen}\,60°}{-\cos 60°} = \text{tg}\,60 = \sqrt{3}$$

e. 150º suplementario de 30º (150º + 30º = 180º)



$$\text{sen}\,150° = \text{sen}\,30° = \frac{1}{2}$$

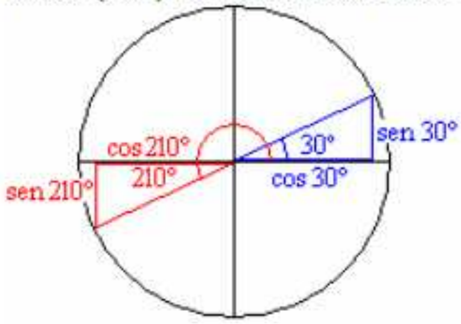
$$\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg}\,150° = \frac{\text{sen}\,150°}{\cos 150°} = \frac{\text{sen}\,30°}{-\cos 30°} = -\text{tg}\,30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

f. 1290. Por ser un ángulo superior a 360º, se divide por 360 y nos quedamos con el resto.

$$1260º = 3\times 360º+210$$

Las razones trigonométricas de 1290º coinciden con las de 210º, (relación entre las razones trigonométricas de ángulos que se diferencian en un número entero de vueltas, 360º ó 2π radianes) y las de este (210º) se relacionan con las de 30º (210º = 180º+30º).



$$\operatorname{sen} 1290º = \operatorname{sen}(360º\times 3 + 210º) = \operatorname{sen} 210º = -\operatorname{sen} 30º = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 1290º = \cos(360º\times 3 + 210º) = \cos 210º = -\cos 30º = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 1290º = \operatorname{tg}(360º\times 3 + 210º) = \operatorname{tg} 210º = \frac{\operatorname{sen} 210º}{\cos 210} = \frac{-\operatorname{sen} 30º}{-\cos 30º} = \operatorname{tg} 30º = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

g. Lo primero es calcular el seno y el coseno de 18º conocida la tangente (tg 18º = 0,32). Por ser un ángulo del primer cuadrante, todas sus razones trigonométricas son positivas.

Conocido el valor de la tangente se obtienen la secante.

$$\operatorname{tag}^2 18º+1 = \sec^2 18º : \ \sec 18º = \pm\sqrt{\operatorname{tag}^2 18º+1} = +\sqrt{0{,}32^2+1} = 1{,}05$$

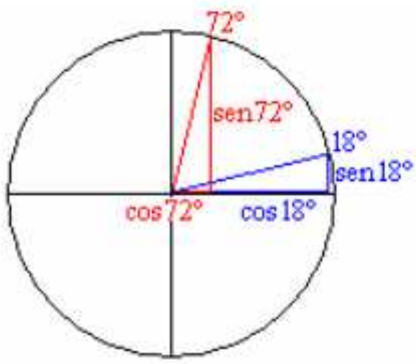
Con la secante se obtiene el coseno

$$\sec 18º = \frac{1}{\cos 18º} : \ \cos 18º = \frac{1}{\sec 18º} = \frac{1}{1{,}05} = 0{,}95$$

Conocidas la tangente y el coseno se obtiene el seno mediante la definición de tangente.

$$\operatorname{tag} 18º = \frac{\operatorname{sen} 18º}{\cos 18º} : \ \operatorname{sen} 18º = \cos 18 \cdot \operatorname{tag} 18 = 0{,}95 \cdot 0{,}32 = 0{,}30$$

i. 72º = 90º − 18º

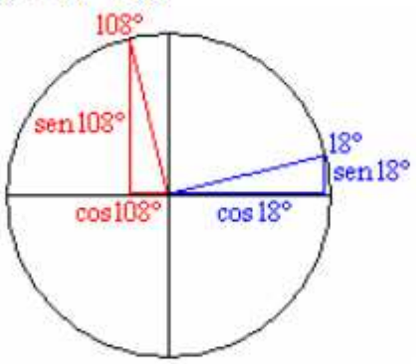


$$\operatorname{sen} 72º = \cos 18º = 0{,}95$$

$$\cos 72º = \operatorname{sen} 18º = 0{,}30$$

$$\operatorname{tg} 72º = \frac{\operatorname{sen} 72º}{\cos 72º} = \frac{\cos 18º}{\operatorname{sen} 18º} = \frac{1}{\operatorname{tg} 18º} = \frac{1}{0{,}32} = 3{,}12$$

ii. 108º = 90º + 18º

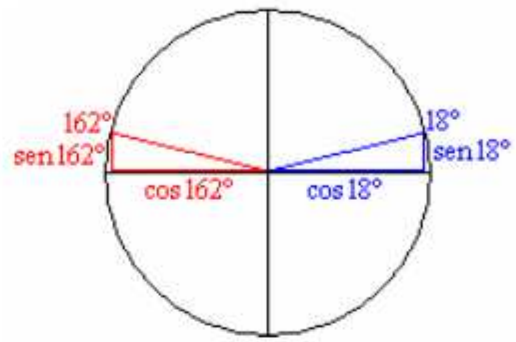


$$\operatorname{sen} 108º = \cos 18 = 0{,}95$$

$$\cos 108º = -\operatorname{sen} 18º = -0{,}30$$

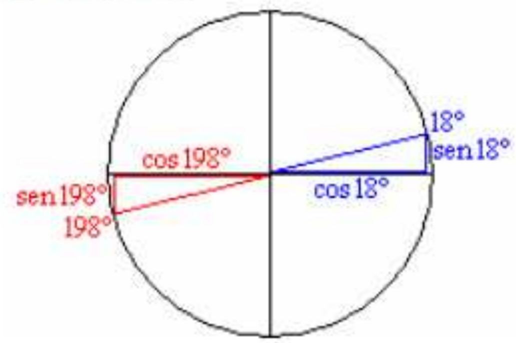
$$\operatorname{tg} 108º = \frac{\operatorname{sen} 108º}{\cos 108º} = \frac{\cos 18º}{-\operatorname{sen} 18º} = -\frac{1}{\operatorname{tg} 18º} = -\frac{1}{0{,}32} = -3{,}12$$

iii. $162° = 180° - 18°$



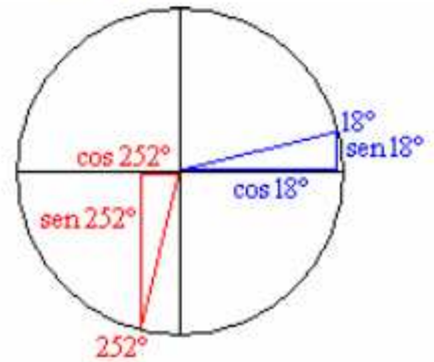
$$\text{sen}\,162° = \text{sen}\,18° = 0{,}30$$
$$\cos 162° = -\cos 18° = -0{,}95$$
$$\text{tg}\,162° = \frac{\text{sen}162°}{\cos 162°} = \frac{\text{sen}\,18°}{-\cos 18°} = -\text{tg}\,18° = -0{,}32$$

iv. $198° = 180° + 18°$



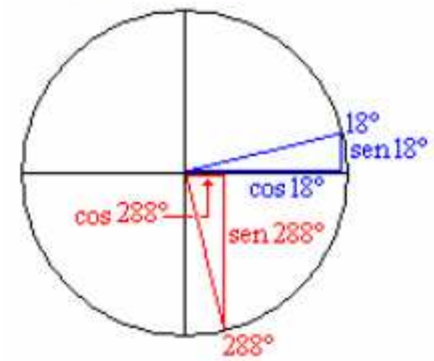
$$\text{sen}\,198° = -\text{sen}\,18° = -0{,}30$$
$$\cos 198° = -\cos 18° = -0{,}95$$
$$\text{tg}\,198° = \frac{\text{sen}198°}{\cos 198°} = \frac{-\text{sen}\,18°}{-\cos 18°} = \text{tg}\,18° = 0{,}32$$

v. $252° = 270° - 18°$



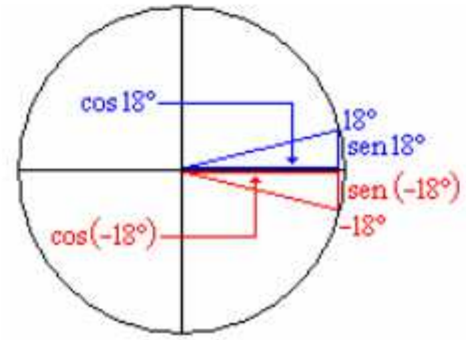
$$\text{sen}\,252° = -\cos 18 = -0{,}95$$
$$\cos 252° = -\text{sen}18° = -0{,}30$$
$$\text{tg}\,252° = \frac{\text{sen}\,252°}{\cos 252°} = \frac{-\cos 18°}{-\text{sen}\,18°} = \frac{1}{\text{tg}\,18°} = \frac{1}{0{,}32} = 3{,}12$$

vi. $298° = 270° + 18°$



$$\text{sen}\,288° = -\cos 18 = -0{,}95$$
$$\cos 288° = \text{sen}18° = 0{,}30$$
$$\text{tg}\,288° = \frac{\text{sen}\,288°}{\cos 288°} = \frac{-\cos 18°}{\text{sen}\,18°} = -\frac{1}{\text{tg}\,18°} = -\frac{1}{0{,}32} = -3{,}12$$

vii. $342^\circ = -18^\circ$



$$\text{sen}\,(-18^\circ) = -\text{sen}\,18^\circ = -0{,}30$$
$$\cos(-18^\circ) = \cos 18^\circ = 0{,}95$$
$$\text{tg}\,(-18^\circ) = \frac{\text{sen}(-18^\circ)}{\cos(-18)^\circ} = \frac{-\text{sen}\,18^\circ}{\cos 18^\circ} = -\text{tg}\,18^\circ = -0{,}32$$

C**uestión 15**.- Simplificar las siguientes expresiones:

a)

$$\text{sen}\,\alpha \cdot \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$$

$$\text{sen}\,\alpha \cdot \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \text{sen}\,\alpha \cdot \frac{1}{\text{sen}\alpha / \cos\alpha} = \text{sen}\,\alpha \cdot \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \cos\alpha$$

b)

$$\sqrt{1-\text{sen}\alpha} \cdot \sqrt{1+\text{sen}\alpha}$$

$$\sqrt{1-\text{sen}\alpha} \cdot \sqrt{1+\text{sen}\alpha} = \sqrt{(1-\text{sen}\alpha)\cdot(1+\text{sen}\alpha)} = \sqrt{1^2 - \text{sen}^2\alpha} = \sqrt{\cos^2\alpha} = \cos\alpha$$

c)

$$\frac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{\cos^4\alpha - \text{sen}^4\alpha}$$

$$\frac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{\cos^4\alpha - \text{sen}^4\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)\cdot(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha)} = \frac{1}{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha} = \frac{1}{1} = 1$$

d)

$$\frac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha}$$

$$\frac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{-(\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha)}{\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha} = -1$$

e)

$$\frac{\sec^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sec^2\alpha - \cos^2\alpha}$$

$$\frac{\sec^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sec^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\frac{1}{\cos^2\alpha} + \cos^2\alpha}{\frac{1}{\cos^2\alpha} - \cos^2\alpha} = \frac{\frac{1+\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{1-\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1+\cos^4\alpha}{1-\cos^4\alpha}$$

f)

$$\frac{\cos ec\alpha}{1+\text{ctg}^2\alpha}$$

$$\frac{\operatorname{cosec}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}}{1+\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}}=\frac{\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}}{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}}=\frac{\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}}=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\operatorname{sen}\alpha$$

g)

$$\frac{\cos^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\frac{\cos^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}=\frac{1-\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}=\frac{(1+\operatorname{sen}\alpha)\cdot(1-\operatorname{sen}\alpha)}{1-\operatorname{sen}\alpha}=1+\operatorname{sen}\alpha$$

Cuestión 16.-

Demostrar si son verdaderas o falsas las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$$

b) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}$

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\frac{\cos\alpha\cdot\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\cos 2\alpha}=\sec 2\alpha$$

c) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}=\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$$

d) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}-\cos^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha\cdot(1-\operatorname{sen}^2\alpha)}{\operatorname{sen}^2\alpha}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$$

e) $\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\beta=\operatorname{sen}^2\beta-\cos^2\alpha$

$$\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\beta=(1-\cos^2\alpha)-(1-\operatorname{sen}^2\beta)=1-\cos^2\alpha-1+\operatorname{sen}^2\beta=\operatorname{sen}^2\beta-\cos^2\alpha$$

f) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{1-\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha)}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}$$

g) $\dfrac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}=\dfrac{\cos\alpha+sen\alpha}{\cos\alpha-sen\alpha}$

$$\frac{1+tg\,\alpha}{1-tg\,\alpha}=\frac{1+\dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}}{1-\dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\dfrac{\cos\alpha+sen\,\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha-sen\,\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha+sen\,\alpha}{\cos\alpha-sen\,\alpha}$$

h) $\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta-sen^2\alpha\cdot sen^2\beta=\cos^2\alpha-sen^2\beta$

$$\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta-sen^2\alpha\cdot sen^2\beta=\cos^2\alpha\cdot(1-sen^2\beta)-(1-\cos^2\alpha)\cdot sen^2\beta=$$
$$=\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\cdot sen^2\beta-sen^2\beta+\cos^2\alpha\cdot sen^2\beta=\cos^2\alpha-sen^2\beta$$

i) $sen\,\alpha\cdot\cos\alpha\cdot tg\,\alpha\cdot ctg\,\alpha\cdot sec\,\alpha\cdot cosec\,\alpha=1$

$$sen\,\alpha\cdot\cos\alpha\cdot tg\,\alpha\cdot ctg\,\alpha\cdot sec\,\alpha\cdot cosec\,\alpha=sen\,\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{sen\,\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{sen\,\alpha}=1$$

j) $(sen\,\alpha+\cos\alpha)^2+(sen\,\alpha-\cos\alpha)^2=2$

$$(sen\,\alpha+\cos\alpha)^2+(sen\,\alpha-\cos\alpha)^2=sen^2\alpha+2sen\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha+sen^2\alpha-2sen\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=$$
$$=(sen^2\alpha+\cos^2\alpha)+(sen^2\alpha+\cos^2\alpha)=1+1=2$$

k) $ctg\alpha-\dfrac{ctg^2\alpha-1}{ctg\alpha}=tg\alpha$

$$ctg\alpha-\frac{ctg^2\alpha-1}{ctg\alpha}=\frac{1}{tg\,\alpha}-\frac{\dfrac{1}{tg^2\alpha}-1}{\dfrac{1}{tg\,\alpha}}=\frac{1}{tg\,\alpha}-\frac{\dfrac{1-tg^2\alpha}{tg^2\alpha}}{\dfrac{1}{tg\,\alpha}}=\frac{1}{tg\,\alpha}-\frac{tg\,\alpha\cdot(1-tg^2\alpha)}{tg^2\alpha}=$$
$$=\frac{1}{tg\,\alpha}-\frac{1-tg^2\alpha}{tg\,\alpha}=\frac{1-(1-tg^2\alpha)}{tg\,\alpha}=\frac{1-1+tg^2\alpha}{tg\,\alpha}=\frac{tg^2\alpha}{tg\,\alpha}=tg\,\alpha$$

l) $\dfrac{1+tg^2\alpha}{ctg\alpha}=\dfrac{tg\alpha}{\cos^2\alpha}$

$$\frac{1+tg^2\alpha}{ctg\alpha}=\frac{1+\dfrac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{1}{tg\,\alpha}}=\frac{\dfrac{\cos^2\alpha+sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{1}{tg\,\alpha}}=\frac{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{1}{tg\,\alpha}}=\frac{tg\alpha}{\cos^2\alpha}$$

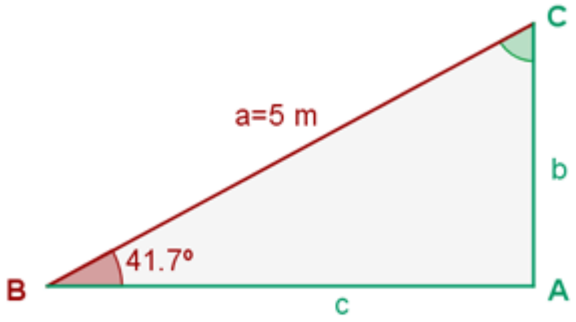
m) $\dfrac{sen\,\alpha+ctg\,\alpha}{tg\,\alpha+cosec\,\alpha}=\cos\alpha$

$$\frac{sen\,\alpha+ctg\,\alpha}{tg\,\alpha+cosec\,\alpha}=\frac{sen\,\alpha+\dfrac{\cos\alpha}{sen\,\alpha}}{\dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{sen\,\alpha}}=\frac{\dfrac{sen^2\alpha+\cos\alpha}{sen\,\alpha}}{\dfrac{sen^2\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot sen\,\alpha}}=\frac{\dfrac{1}{sen\,\alpha}}{\dfrac{1}{\cos\alpha\cdot sen\,\alpha}}=\frac{\cos\alpha\cdot sen\,\alpha}{sen\,\alpha}=\cos\alpha$$

n) $\dfrac{1-sen\,\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{1+sen\,\alpha}$

$$\frac{1-sen\,\alpha}{\cos\alpha}=\frac{(1-sen\,\alpha)\cdot(1+sen\,\alpha)}{\cos\alpha\cdot(1+sen\,\alpha)}=\frac{1^2-sen^2\alpha}{\cos\alpha\cdot(1+sen\,\alpha)}=\frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot(1+sen\,\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{1+sen\,\alpha}$$

Cuestión 17.- De un triángulo rectángulo ABC, se conocen a = 5 m y B = 41.7°. Resolver el triángulo

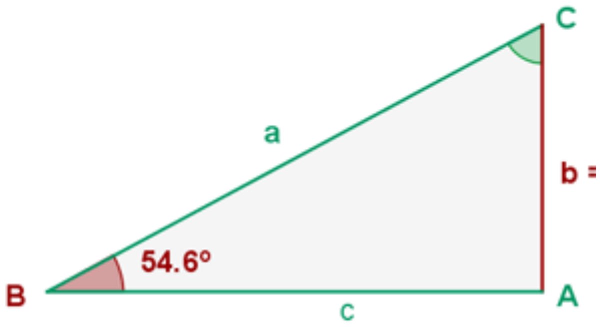


$$C = 90^{\circ} - 41.7^{\circ} = 48.3^{\circ}$$

$b = a \cdot senB \qquad b = 5 \cdot sen41.7^{\circ} = 3.326m$

$c = a \cdot \cos B \qquad c = 5 \cdot \cos 41.7^{\circ} = 3.733\,m$

Cuestión 18.- De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b = 3 m y B = 54.6°. Resolver el triángulo.

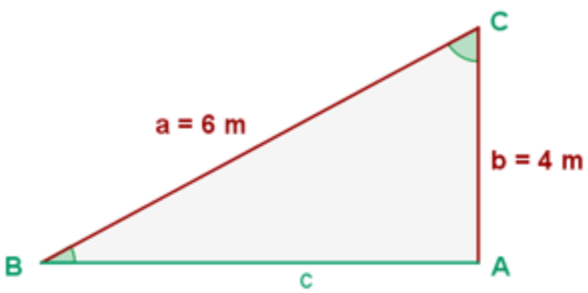


$$C = 90^{\circ} - 54.6^{\circ} = 35.4^{\circ}$$

$c = \dfrac{b}{tg\,B} \qquad c = \dfrac{3}{tg\,54.6^{\circ}} = 2.132\,m$

$a = \dfrac{b}{sen\,B} \qquad a = \dfrac{3}{sen\,54.6^{\circ}} = 3.68\,m$

Cuestión 19.- De un triángulo rectángulo ABC, se conocen a = 6 m y b = 4 m. Resolver el triángulo.

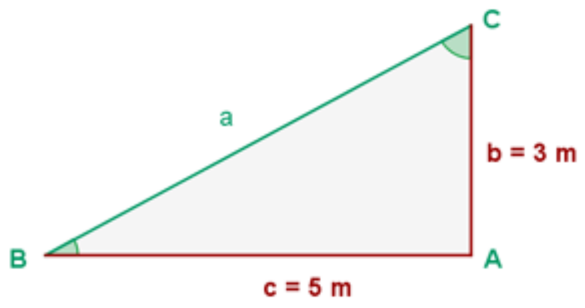


$$C = \arccos\frac{4}{6} = 48.19^{\circ}$$

$$B = 90^{\circ} - 48.19^{\circ} = 41.81^{\circ}$$

$c = a \cdot sen\, C$ $\qquad$ $c = 6 \cdot sen\, 48.19^{\circ} = 4.47\, m$

<u>Cuestión 20</u>.- De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b = 3 m y c = 5 m. Resolver el triángulo.

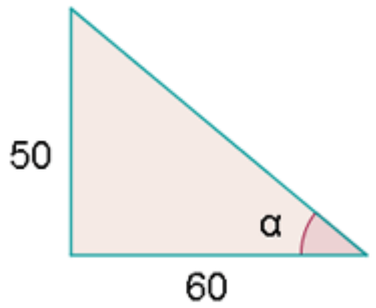


$$C = arc\, tg\,\frac{5}{3} = 59.04^{\circ}$$

$$B = 90^{\circ} - 59.04^{\circ} = 30.96^{\circ}$$

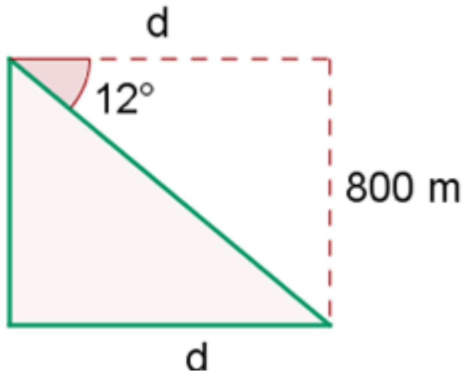
$a = \dfrac{c}{sen\, C}$ $\qquad$ $a = \dfrac{5}{sen\, 59.04^{\circ}} = 5.831\, m$

<u>Cuestión 21</u>.- Un árbol de 50 m de alto proyecta una sombra de 60 m de larga. Encontrar el ángulo de elevación del sol en ese momento.



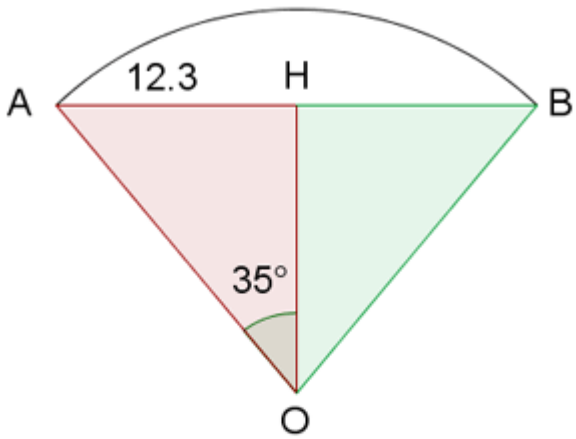
$tg\, \alpha = \dfrac{50}{60}$ $\qquad$ $\alpha = 39^{\circ}48'43''$

<u>Cuestión 22</u>.- Un dirigible que está volando a 800 m de altura, distingue un pueblo con un ángulo de depresión de 12°. ¿A qué distancia del pueblo se halla?



$$tg12° = \frac{800}{d} \qquad d = 3763.70\text{ m}$$

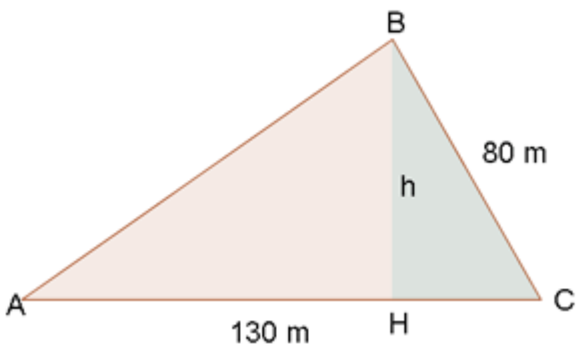
Cuestión 23.- Hallar el radio de una circunferencia sabiendo que una cuerda de 24.6 m tiene como arco correspondiente uno de 70º



$$sen35° = \frac{12.3}{OA}$$

$$OA = \frac{12.3}{sen35°} = 21.44\ cm$$

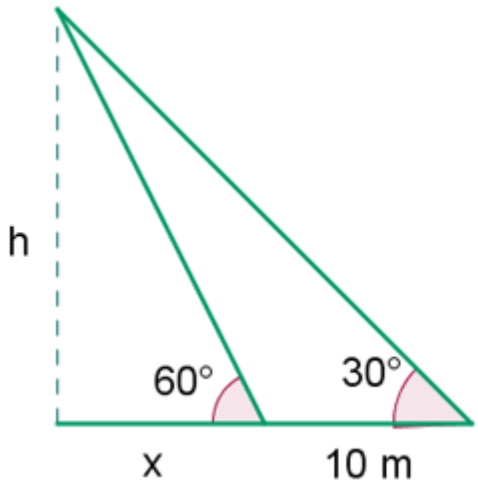
Cuestión 24.- Calcular el área de una parcela triangular, sabiendo que dos de sus lados miden 80 m y 130 m, y forman entre ellos un ángulo de 70°.



$h = 80 \cdot sen\,70°$

$$A = \frac{130 \cdot 80 \cdot sen\,70°}{2} = 4886.40 m^2$$

Cuestión 25.- Calcula la altura de un árbol, sabiendo que desde un punto del terreno se observa su copa bajo un ángulo de 30° y si nos acercamos 10 m, bajo un ángulo de 60°.

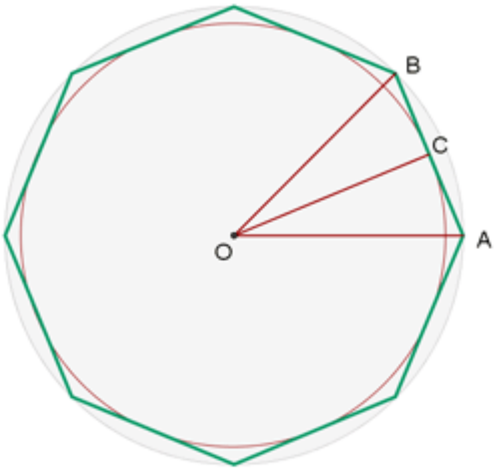


$tg\,30° = \dfrac{h}{10+x} \qquad \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{h}{10+x}$

$tg\,60° = \dfrac{h}{x} \qquad\qquad \sqrt{3} = \dfrac{h}{x}$

$$\begin{array}{rl} 10\sqrt{3} + \sqrt{3}x & = 3h \\ -\sqrt{3}x & = -h \\ \hline 10\sqrt{3} \qquad & = 2h \end{array} \qquad h = 5\sqrt{3}$$

Cuestión 26.- La longitud del lado de un octógono regular es 12 m. Hallar los radios de la circunferencia inscrita y circunscrita.



$$O=\frac{360^\circ}{8}=45^\circ \qquad \frac{O}{2}=22^\circ30'$$

Radio de la circunferencia inscrita:

$$OC=\frac{AC}{tg\,22^\circ30'} \qquad OC=\frac{6}{0.4142}=14.49$$

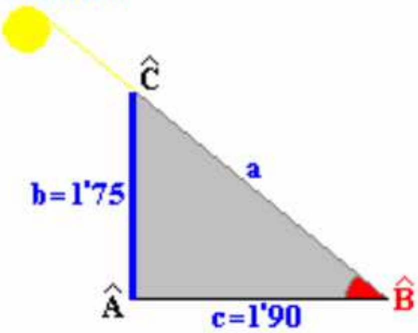
Radio de la circunferencia circunscrita:

$$OA=\frac{AC}{sen\,22^\circ30'} \qquad OC=\frac{6}{0.3827}=15.68$$

Cuestión 27.-

Un individuo cuya altura es de 1,75 m. proyecta una sombra de 1,90 m. Calcular las razones trigonométricas del ángulo que forman los rayos del Sol con la horizontal.

Solución.



Se pide calcular las razones trigonométricas del ángulo B, para lo cual hace falta la longitud de la hipotenusa, que se calcula mediante el teorema de Pitágoras.

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{1'75^2+1'90^2}=2'58$$

$$\text{sen}\,\hat{B}=\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}=\frac{b}{a}=\frac{1'75}{2'58}=0'68$$

$$\cos\hat{B}=\frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}}=\frac{c}{a}=\frac{1'90}{2'58}=0'74$$

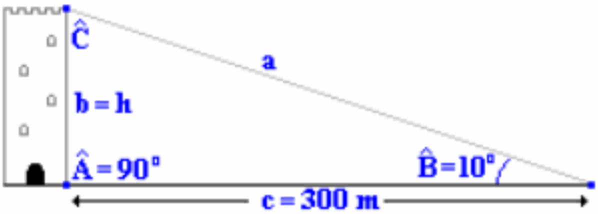
$$\text{tg}\,\hat{B}=\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}}=\frac{b}{c}=\frac{1'75}{1'90}=0'92$$

Nota: Como norma general se usan tantos decimales como los que lleven los datos

Cuestión 28.-

Una torre se a 300 m de su pie, bajo un ángulo de 10º. Calcular su altura. Dato: sen10º=0'1736

Solución.



Aplicando la definición de de tangente al ángulo B se puede calcular la altura de la torre.

$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}} = \frac{b}{c} = \frac{h}{300}$$

$$h = 300 \cdot \operatorname{tg} \hat{B} = 300 \cdot \operatorname{tg} 10°$$

Cálculo de tg 10º.

$$\operatorname{tg} 10° = \frac{\operatorname{sen} 10}{\cos 10} = \frac{\operatorname{sen} 10}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 10}} = \frac{0'1736}{\sqrt{1 - 0'1736^2}} = 0'1763$$

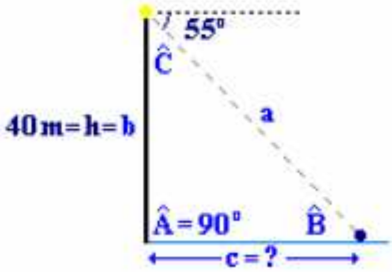
Se sustituyen en la expresión de la altura.

$$h = 300 \cdot \operatorname{tg} 10° = 300 \cdot 0'1763 = 52'89 \text{ m}$$

Cuestión 29.-

Desde un faro situado a 40 m sobre el nivel del mar el ángulo de depresión de un barco es de 55º. ¿A qué distancia del faro se halla el barco?

Solución.



La distancia pedida se halla mediante la definición de tangete de $\hat{C}$, el ángulo $\hat{C}$ se calcula como complementario del ángulo de depresión.

$$\hat{C} = 90 - 55 = 35°$$

$$\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}} = \frac{c}{b} = \frac{c}{40}$$

$$c = 40 \cdot \operatorname{tg} \hat{C} = 40 \cdot \operatorname{tg} 35° = 28 \text{ m}$$

Cuestión 30.-

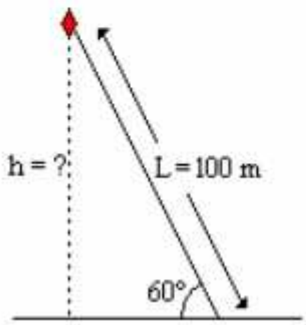
Una cometa esta unida al suelo por un hilo de 100 m, que forma con la horizontal del terreno un ángulo de 60º. Suponiendo que el hilo esta tirante, hallar a que altura sobre el suelo se encuentra la cometa.

Solución.

La altura a la que se encuentra la cometa se calcula mediante la definición de seno de 60º

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{h}{L}$$

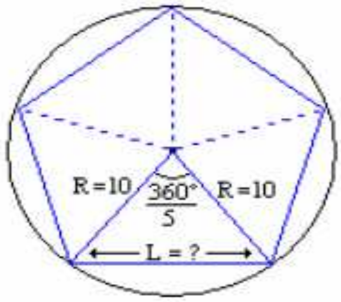
$$\operatorname{sen} 60° = \frac{h}{L} \qquad h = L \cdot \operatorname{sen} 60° = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \text{ m}$$



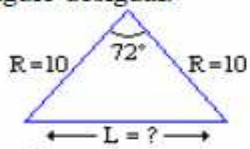
Cuestión 31.-

Calcular la longitud del lado y el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 10 cm.

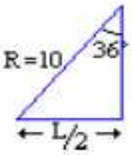
Solución.



Un pentágono regular inscrito en una circunferencia se puede dividir en cinco triángulos isósceles de los que se conocería la longitud de los lados iguales (R) y el ángulo desigual.



Cada triángulo isósceles a su vez se puede dividir en dos triángulos rectángulos de los que se conocería un ángulo agudo y la hipotenusa.



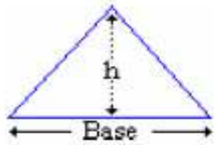
Aplicando la definición de seno de 36º se calcula la longitud del lado de triángulo (L/2) y de está, la del lado del pentágono regular.

$$\operatorname{sen} 36^{o} = \frac{L/2}{R} \qquad \frac{L}{2} = R \cdot \operatorname{sen} 36^{o} \qquad L = 2R \cdot \operatorname{sen} 36^{o} = 2 \cdot 10 \operatorname{sen} 36^{o} \approx 11'8 \text{ cm}$$

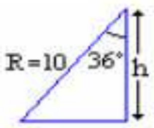
El área del pentágono se calcula como cinco veces la de uno cualquiera de los triángulos isósceles en el que lo hemos dividido.

$$A_{Pent} = 5A_{Tr}$$

El área del triángulo se calcula según su definición



$$A_{Tr} = \frac{1}{2} b \cdot h$$



Donde la base es la longitud del lado del pentágono y la altura se calcula de igual forma que el lado del pentágono solo que en este caso utilizando la definición de coseno de 36º.

$$\cos 36^{o} = \frac{h}{R} \qquad h = R \cos 36^{o} = 10 \cos 36^{o} \approx 8'1 \text{ cm}$$

Conocida la base y la altura se calcula el área del triángulo, y multiplicando por cinco está, el área del pentágono.

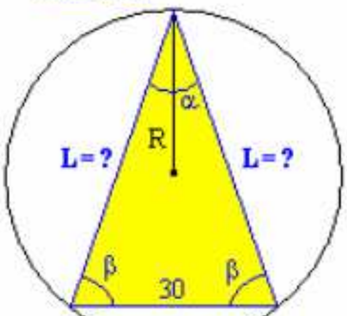
$$A_{Tr} = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{1}{2} 11'8 \cdot 8'1 \approx 47'6 \text{ cm}^2$$

$$A_{Pent} = 5A_{Tr} = 5 \cdot 47'6 = 237'8 \text{ cm}^2$$

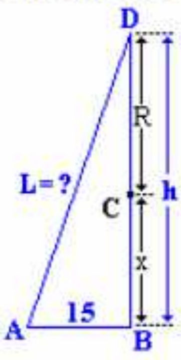
Cuestión 32.-

Un triángulo isósceles esta inscrito en una circunferencia de 50 cm de diámetro, si el lado desigual es de 30 cm de longitud, calcular la longitud de los otros dos lados, los ángulos y el área.

Solución.



Se pide calcular la longitud de los lados iguales (L), los ángulos α y β, y el área del triángulo. Se empieza por calcular la longitud de los lados iguales, para ello se divide por la base el triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos, obteniendo el triángulo ABD.

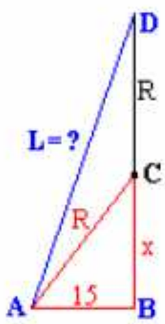


Aplicando Pitágoras al triángulo rectángulo

$$L^2 = 15^2 + h^2$$

Donde $h = R + x$

La longitud x se puede calcular en el triángulo ABC aplicando el teorema de Pitágoras:



$$R^2 = 15^2 + x^2 \qquad x = \sqrt{R^2 - 15^2}$$

$$R = \frac{D}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ cm}$$

$$x = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{400} = 20$$

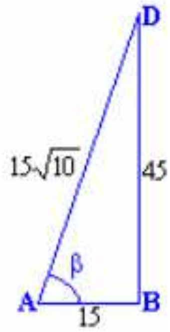
Conocido x se calcula h

$$h = 25 + 20 = 45$$

Conocido h se calcula L con la primera ecuación.

$$L^2 = 15^2 + 45^2 = 2250 \qquad\qquad L = \sqrt{2250} = 15\sqrt{10}$$

Ángulo β. Se calcula con la definición de cualquier razón trigonométrica del ángulo β.

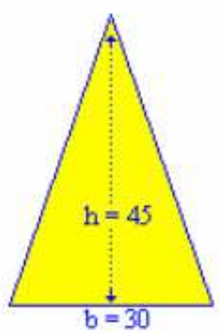


$$\cos\beta = \frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{15}{15\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\beta = \text{arccos}\frac{\sqrt{10}}{10} = 71'6^\circ$$

Conocido β y teniendo en cuenta que la suma de ángulos es igual a 180º, se calcula α.

$$\alpha + 2\beta = 180^\circ \qquad \alpha = 180 - 2\beta = 180 - 2\cdot 71'6 = 36'8^\circ$$



El área del triángulo se calcula por su definición

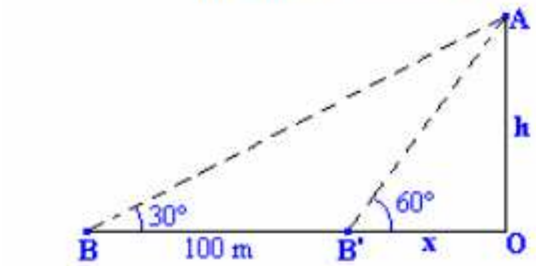
$$A = \frac{1}{2}\,b\cdot h = \frac{1}{2}30\cdot 45 = 675\,\text{cm}^2$$

Cuestión 33.-

Desde un barco se divisa el alto de una montaña bajo una visual que forma con la horizontal un ángulo de 60º. Si el barco se aleja 100 m. la nueva visual forma un ángulo de 30º con la horizontal. Calcular la altura de la montaña.

Solución.

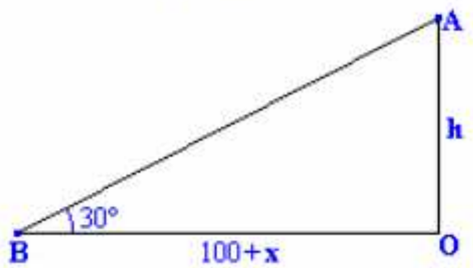
Problema de la doble observación ó doble tangente.



Se resuelve descomponiendo en dos triángulos rectángulos BOA y B'OA, y definiendo en cada uno de ellos la tangente del ángulo conocido en función de h y de x. Las dos ecuaciones permiten plantear un sistema del que se calcula h.

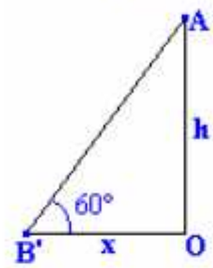
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}}$$

Triángulo AOB:



$$\text{tg}\,30^\circ = \frac{h}{100 + x}$$

Triángulo AOB'



$$\text{tg}\,60^\circ = \frac{h}{x}$$

$$\text{Sistema:}\begin{cases}\text{tg}\,30^\circ = \dfrac{h}{100 + x} \\ \text{tg}\,60^\circ = \dfrac{h}{x}\end{cases} : h = x\,\text{tg}\,60^\circ : \ \text{tg}\,30^\circ = \frac{x\,\text{tg}\,60^\circ}{100 + x}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ (100 + x) = x \operatorname{tg} 60^\circ \quad : \quad 100 \operatorname{tg} 30^\circ + x \operatorname{tg} 30^\circ = x \operatorname{tg} 60^\circ \quad : \quad 100 \operatorname{tg} 30^\circ = x \operatorname{tg} 60^\circ - x \operatorname{tg} 30^\circ$$

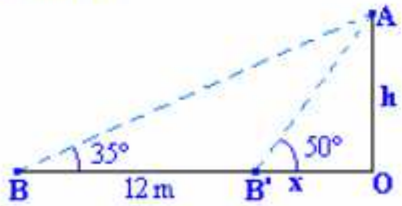
$$100 \operatorname{tg} 30^\circ = x (\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ) \quad : \quad x = \frac{100 \operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ} = 50 \text{ m}$$

$$h = x \operatorname{tg} 60^\circ = 50 \operatorname{tg} 60^\circ = 50\sqrt{3} \approx 86'6 \text{ m}$$

Cuestión 34.-

Al observar desde el suelo el punto más alto de un árbol, el ángulo de la visual y la horizontal mide 50º. Desde 12 m más atrás el ángulo es de 35º. Calcula la altura del árbol gráficamente y por técnicas trigonométricas.

Solución.



Problema de doble observación ó doble tangente.

$$\begin{cases} BOA : \operatorname{tg} 35^\circ = \dfrac{h}{12 + x} \\ B'OA : \operatorname{tg} 50^\circ = \dfrac{h}{x} \end{cases} : h = x \operatorname{tg} 50^\circ : \quad \operatorname{tg} 35^\circ = \frac{x \operatorname{tg} 50^\circ}{12 + x}$$

$$\operatorname{tg} 35^\circ (12 + x) = x \operatorname{tg} 50^\circ \quad : \quad 12 \operatorname{tg} 35^\circ + x \operatorname{tg} 35^\circ = x \operatorname{tg} 50^\circ \quad : \quad 12 \operatorname{tg} 35^\circ = x \operatorname{tg} 50^\circ - x \operatorname{tg} 35^\circ$$

$$12 \operatorname{tg} 35^\circ = x (\operatorname{tg} 50^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ) \quad : \quad x = \frac{12 \operatorname{tg} 35^\circ}{\operatorname{tg} 50^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ} = 17'1 \text{ m}$$

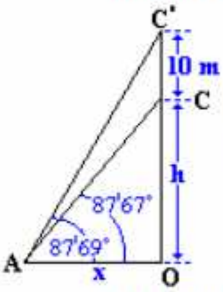
$$h = x \operatorname{tg} 50^\circ = 17'1 \operatorname{tg} 50^\circ \approx 20'4 \text{ m}$$

Cuestión 35.-

Se quiere calcular la altura de una colina situada al borde del mar, si colocamos un poste de 10 m sobre su punto más alto, desde un punto de la orilla del mar, se observan los vértices inferior y superior del poste bajo ángulos de 87'67º y 87'69º respectivamente. Calcular la altura de la colina sobre el nivel del mar.

Solución.

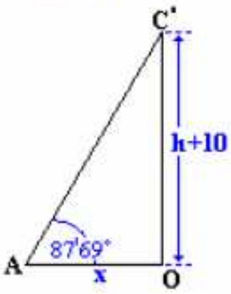
Problema de la doble observación ó doble tangente.



El problema se resuelve descomponiendo la figura en dos triángulos rectángulos AOC y AOC', y definiendo en cada uno de ellos la tangente del ángulo conocido en función de h y de x. Las dos ecuaciones permiten plantear un sistema del que se calcula h.

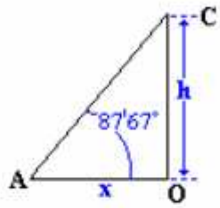
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}}$$

Triángulo AOC':



$$\operatorname{tg} 86'69^\circ = \frac{h + 10}{x}$$

Triángulo AOC:



$$\operatorname{tg} 86'67^\circ = \frac{h}{x}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 86'69^\circ = \dfrac{h + 10}{x} \\ \operatorname{tg} 86'67^\circ = \dfrac{h}{x} \end{cases} : h = x \operatorname{tg} 86'67^\circ : \quad \operatorname{tg} 86'69^\circ = \frac{x \operatorname{tg} 86'67 + 10}{x}$$

$$x \operatorname{tg} 86'69^\circ = x \operatorname{tg} 86'67 + 10 \quad : \quad x \operatorname{tg} 86'69^\circ - x \operatorname{tg} 86'67 = 10 \quad : \quad x (\operatorname{tg} 86'69^\circ - \operatorname{tg} 86'67) = 10$$

$$x = \frac{10}{\operatorname{tg} 86'69^\circ - \operatorname{tg} 86'67} = 96'1 \text{ m}$$