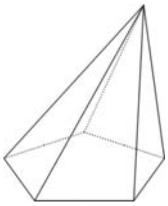
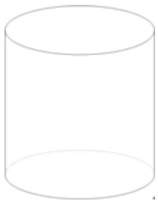
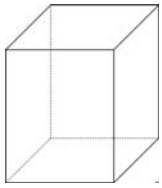
Cuerpos Geométricos. 100 Ejercicios para practicar con soluciones

1 **Indica cuáles de las siguientes figuras son prismas y cuáles son pirámides.**

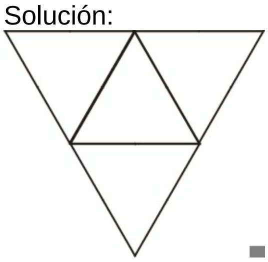
a)  **b)**  **c)** 

Solución:
Prisma es un poliedro que tiene por caras dos bases paralelas e iguales que son polígonos y las caras laterales paralelogramos, mientras que una pirámide es un poliedro que tiene por caras una base que es un polígono y las caras laterales que son triángulos que se encuentran en un vértice.
Por la definición:
a) Es una pirámide
b) No es ni pirámide ni prisma.
c) Es un prisma.

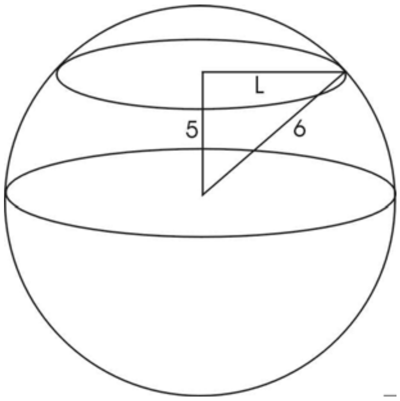
2 **Una moneda de un euro se puede considerar como un cilindro de radio 8 mm y altura 2 mm. Si se apilan 100 € encima uno del otro, calcula las dimensiones de la figura resultante.**

Solución:
La figura resultante es un cilindro de radio el mismo que el de la moneda de 1 €, es decir, 8 mm, y de altura 100 veces el de 1€, es decir, 200 mm = 20 cm.

3 **Dibuja el desarrollo plano de un tetraedro.**

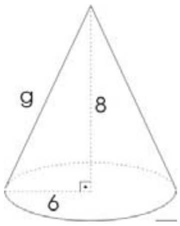
Solución:


4 **Calcula en la siguiente figura el elemento que falta:**



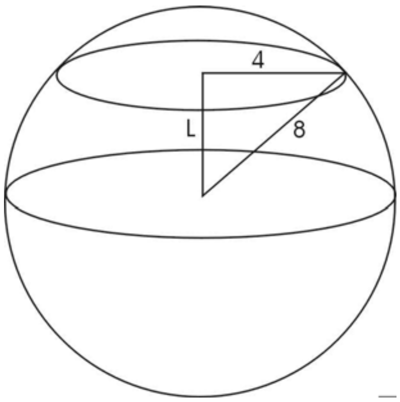
Solución:
Por el teorema de Pitágoras:
$6^2 = 5^2 + L^2 \Rightarrow L = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11} \approx 3{,}31$

5 **Calcula en la siguiente figura el elemento que falta:**



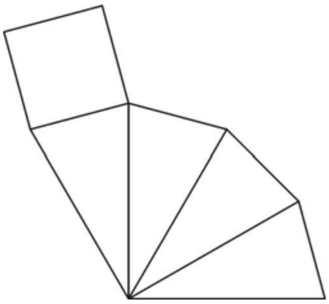
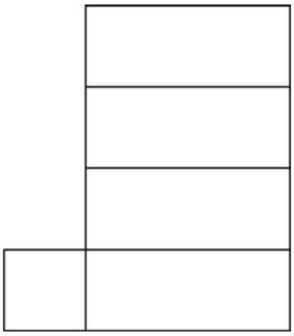
Solución:
Por el teorema de Pitágoras:
$g^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow g = \sqrt{100} = 10$

6 **Calcula en la siguiente figura el elemento que falta:**



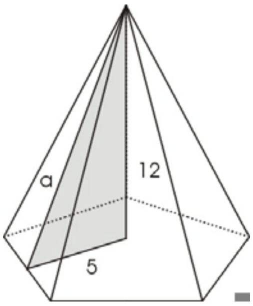
Solución:
Por el teorema de Pitágoras:
$8^2 = 4^2 + L^2 \Rightarrow L = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} \approx 6{,}93$

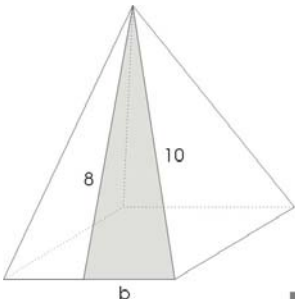
7 **Observa los desarrollos siguientes e indica de qué clase son los cuerpos:**

a)  **b)** 

Solución:
a) Se trata de una pirámide de base cuadrada.
b) Se trata de un prisma recto de base cuadrada.

8 **Calcula el elemento que falta en las siguientes pirámides:**

a) 

b) 

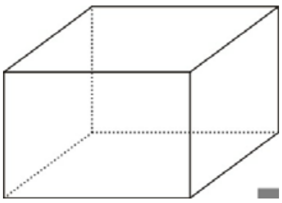
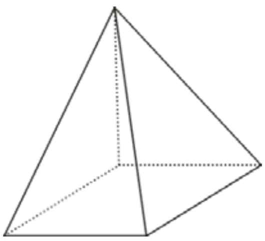
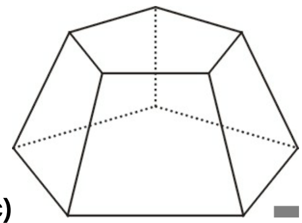
Solución:
a) Tenemos un triángulo de catetos 12 y 5 e hipotenusa a

Aplicando el teorema de Pitágoras: $a^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow a = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

b) Tenemos un triángulo de catetos 10 y b e hipotenusa 10.

Aplicando el teorema de Pitágoras: $10^2 = 8^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$.

9 **Determina el número de vértices, caras y aristas de los siguientes poliedros.**

a)  **b)**  **c)** 

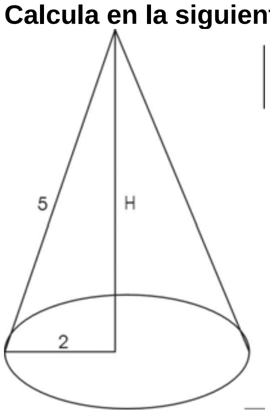
Solución:

a) Caras: 6 Aristas: 12 Vértices: 8

b) Caras: 5 Aristas: 8 Vértices: 5

c) Caras: 7 Aristas: 15 Vértices: 10

10 **Calcula en la siguiente figura el elemento que falta:**

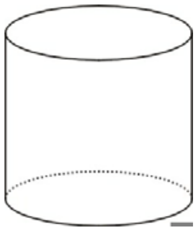
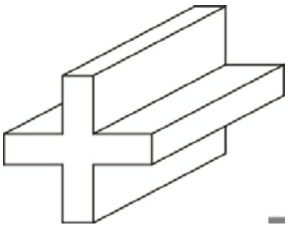
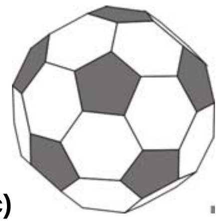


Solución:

Por el teorema de Pitágoras:

$5^2 = 2^2 + H^2 \Rightarrow H = \sqrt{21} \approx 4,58$

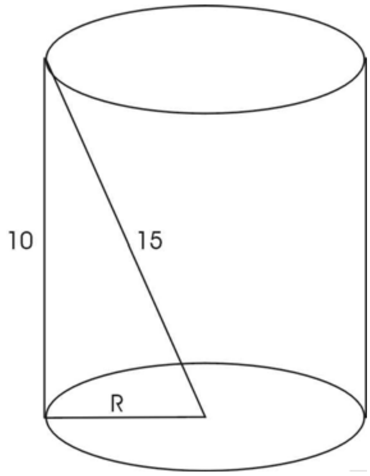
11 **De las siguientes figuras indica cuál es un poliedro.**

a)  **b)**  **c)** 

Solución:

Un poliedro está formado por polígonos planos, luego la figura del apartado a no es un poliedro y las otros dos sí.

12 **Calcula en la siguiente figura el elemento que falta:**

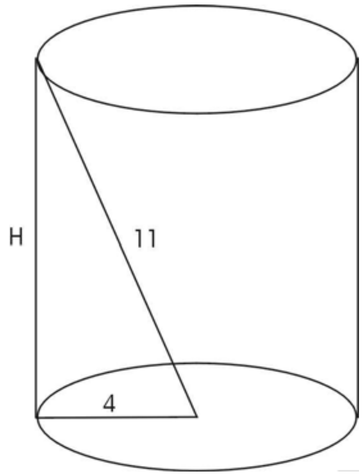


Solución:
Por el teorema de Pitágoras:
$15^2 = 10^2 + R^2 \Rightarrow R = \sqrt{125} \approx 11{,}18$

13 **Calcula el número de caras, de aristas y de vértices de un tetraedro.**

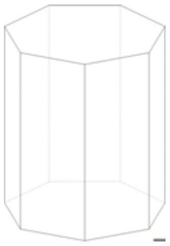
Solución:
Caras: 4.
Vértices: 4.
Aristas: 6.

14 **Calcula en la siguiente figura el elemento que falta:**



Solución:
Por el teorema de Pitágoras:
$11^2 = 4^2 + H^2 \Rightarrow H = \sqrt{105} \approx 10{,}25$

15 **Determina los ángulos diedros que forman las caras laterales de un poliedro que es un prisma recto de base un heptágono regular.**



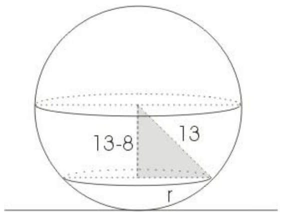
Solución:
El ángulo diedro formado por las caras laterales es igual al ángulo interior del heptágono de la base:
$180° \cdot (7-2) : 7 = \frac{900}{7} = 128°\ 34'\ 17''$

16 **Pepe quiere introducir un lápiz de 10 cm de largo en una caja con forma de cono de altura 8,5 cm y radio de la base 4 cm. ¿Puede meter Pepe el lápiz?**

Solución:
La distancia más larga es la generatriz del cono.
Calculamos la generatriz aplicando el teorema de Pitágoras:
$g^2 = (8{,}5)^2 + 4^2 \Rightarrow g = \sqrt{88{,}25} \approx 9{,}4$ cm
Como la generatriz mide menos que el lápiz, no puede meterlo en la caja.

17 **Una pelota de 13 cm de radio se corta a 8 cm del punto de contacto del suelo. ¿Puedes calcular el radio del círculo que forma la sección?**

Solución:



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo formado por:
- Radio de la sección de la circunferencia: r.
- Radio de la esfera: 13.
- Distancia entre el centro de la pelota y el plano de sección: $13 - 8 = 5$.

Se tiene:
$5^2 + r^2 = 13^2 \Rightarrow r = \sqrt{169-25} = \sqrt{144} = 12$ cm

18 **En un cono recto el radio de la base mide 4 cm y la generatriz 10 cm. Calcula la altura del cono.**

Solución:
Aplicando el teorema de Pitágoras:
$10^2 = 4^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{100-16} = \sqrt{84} \approx 9{,}16$ cm

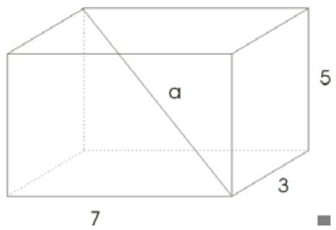
19 **Medio círculo se hace girar hasta generar una esfera. Sabiendo que el perímetro del medio círculo es 120 cm, calcula el radio de la esfera generada.**

Solución:
El perímetro de medio círculo es
$2R + \pi R$
Luego:
$2R + \pi R = 120 \Rightarrow R = \dfrac{120}{2 + \pi} \approx 23{,}34$ cm

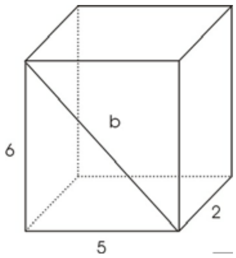
20 **Se tiene un cono de altura 7 cm y radio de la base 2 cm. Si se mantiene la altura y se aumenta al doble la base, ¿cuánto ha variado la generatriz del cono?**

Solución:
La generatriz del cono de radio de la base 2 cm es:
$g^2 = 7^2 + 2^2 \Rightarrow g = \sqrt{53} \approx 7{,}28$ cm
La generatriz del cono de radio el doble es:
$g^2 = 7^2 + 4^2 \Rightarrow g = \sqrt{65} \approx 8{,}06$ cm
La proporción de lo que ha variado es:
$\dfrac{8{,}06}{7{,}28} = 1{,}11$

21 **Calcula el elemento que falta en los siguientes prismas:**



a)



b)

Solución:
a) La diagonal de un ortoedro es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos:
$a = \sqrt{7^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{83} \approx 9{,}11$
b) Tenemos un triángulo rectángulo de catetos 6 y 5 e hipotenusa b
Aplicando el teorema de Pitágoras:
$b^2 = 6^2 + 5^2 \Rightarrow b = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61} = 7{,}81$

22 **Se tiene una figura con 15 caras, 9 vértices y 21 aristas. ¿Se trata de un poliedro?**

Solución:
Si fuera un poliedro debería cumplir la relación de Euler:
Caras + Vértices = Aristas +2
$15 + 9 \neq 21 + 2$
luego no se trata de un poliedro.

23 **Una circunferencia de perímetro 2,31 m se hace girar hasta generar una esfera. Calcula el radio de la esfera.**

Solución:
El perímetro del círculo es
$2\pi R$
Luego:
$$2\pi R = 2{,}31 \Rightarrow R = \frac{2{,}31}{2\pi} \approx 0{,}37 \text{ m}$$

24 **Una caja de cerillas tiene por dimensiones 1, 2 y 3 cm, respectivamente. Calcula el valor de:**

a) Las diagonales de las caras.
b) Las diagonales del ortoedro.

Solución:
a) Las tres diagonales diferentes de las caras son:
$$d_a = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}24 \text{ cm}$$
$$d_b = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \approx 3{,}16 \text{ cm}$$
$$d_a = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}6 \text{ cm}$$
b) Las diagonales de la caja de cerillas son todas iguales y miden:
$$d = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}74 \text{ cm}$$

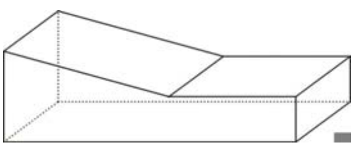
25 **Calcula el valor de las aristas de los siguientes cubos sabiendo que las diagonales miden:**

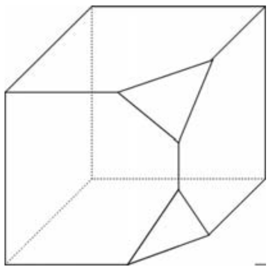
a) 21 cm
b) 81 cm

Solución:
La diagonal y la arista del cubo están relacionadas de la siguiente forma:
$$d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$
Despejando el valor de la arista se obtiene:
$$a = \frac{d\sqrt{3}}{3}$$
a) $a = \dfrac{21\sqrt{3}}{3} = 7\sqrt{3}$ cm

b) $a = \dfrac{81\sqrt{3}}{3} = 27\sqrt{3}$ cm

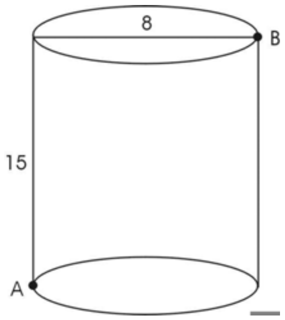
26 **Comprueba la fórmula de Euler: caras + vértices = aristas + 2, en los siguientes poliedros.**

a) 

b) 

Solución:
a) Caras: 7 Vértices: 10 Aristas: 15
$7+10=15+2$
b) Caras: 8 Vértices: 12 Aristas: 18
$8+12=18+2$

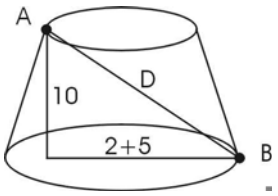
27 **¿Cuál es el camino de longitud mínima desde A hasta B en la siguiente figura (sin salirse de la superficie de la misma)? ¿Cuánto mide?**



Solución:
Al desarrollar el cilindro se obtiene un rectángulo. El camino de longitud mínima es la línea recta que une A con B. Tenemos un triángulo rectángulo de catetos 15 y 8, la longitud que nos piden es la hipotenusa. Aplicando el teorema de Pitágoras:
$h=\sqrt{8^2+15^2}=\sqrt{64+225}\approx 17$

28 **Calcula la distancia máxima entre dos puntos de un tronco de cono de bases con radios 5 cm y 2 cm, y altura 10 cm.**

Solución:
La distancia máxima es la línea recta que une los puntos A y B de la figura adjunta.
La distancia AB es la hipotenusa h de un triángulo rectángulo de catetos 10 y 2+5=7,
$D^2=10^2+7^2 \Rightarrow D=\sqrt{149}\approx 12{,}21\,\text{cm}$



29 **Calcula la diagonal de un ortoedro de aristas 2 m, 5 m y 7 m.**

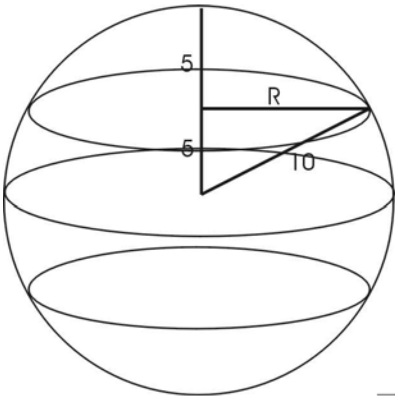
Solución:
La diagonal de un ortoedro es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de la tres dimensiones.
$d=\sqrt{2^2+5^2+7^2}=\sqrt{78}\approx 8{,}83\text{ m}$

30 **Una circunferencia de perímetro 50 cm se hace girar hasta generar una esfera. Calcula el radio de la esfera.**

Solución:
El perímetro del círculo es
$2\pi R$
Luego:
$2\pi R = 50 \Rightarrow R = \dfrac{50}{2\pi} \approx 7{,}96$ cm

31 **A una bola de hielo de 20 cm de diámetro se le aplican tres cortes paralelos, de forma que los trozos resultantes tienen el mismo ancho. Calcula el radio de los círculos que salen al aplicar los cortes.**

Solución:

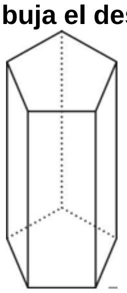
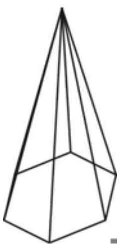


Al aplicarle 3 cortes, la naranja se descompone en cuatro gajos de 3 cm de grosor, saliendo dos secciones con igual radio R. Y la tercera el radio de la esfera: 12 cm.
Calculamos las otras dos secciones aplicando el teorema de Pitágoras:
$5^2 + R^2 = 10^2 \Rightarrow R = \sqrt{75} \approx 8{,}66$ cm

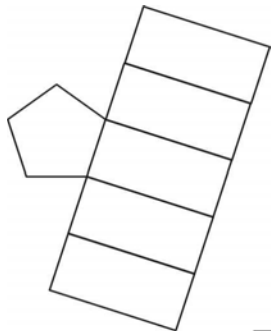
32 **De un prisma sabemos que el número de vértices es 16 y que el número de aristas es 24, ¿cuántas caras tiene?**

Solución:
Un prisma es un poliedro convexo, por tanto debe cumplir la relación de Euler: caras + vértices = aristas +2.
$c + 16 = 24 + 2 \Rightarrow c = 10$
El número de caras del prisma es 10, se trata de un prisma de base octogonal.

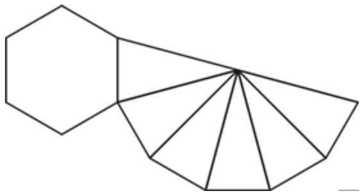
33 **Dibuja el desarrollo de los siguientes cuerpos:**

a)  **b)** 

Solución:



a)



b)

34 **¿Cabe una regla de 1 m en un prisma de base rectangular, de aristas 30 cm y 60 cm, y de altura 50 cm?**

Solución:
La distancia máxima es la diagonal del ortoedro:
$d = \sqrt{30^2 + 60^2 + 50^2} = \sqrt{7000} \approx 83{,}67$ cm
Como la diagonal es menor que un metros, la regla no cabe en el prisma.

35 **Se tiene una figura con 10 caras, 15 vértices y 20 aristas. ¿Se trata de un poliedro?**

Solución:
Si fuera un poliedro debería cumplir la relación de Euler:
Caras + Vértices = Aristas +2
$10 + 15 \neq 20 + 2$
luego no se trata de un poliedro.

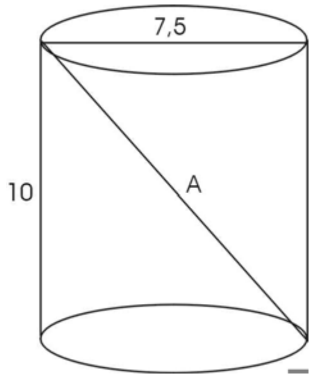
36 **Calcula el valor de la diagonal de un ortoedro de aristas 3 cm, 4 cm y 5 cm.**

Solución:
La diagonal y las aristas de un ortoedro de aristas a, b, c están relacionadas de la siguiente forma:
$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
Luego la diagonal mide:
$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$ cm

37 **Un ascensor mide 1 m de ancho, 1,5 m de largo y 2,3 m de alto. Un señor pretende introducir un palo de 3 m de altura, ¿puede hacerlo?**

Solución:
La distancia mas larga es la diagonal del ortoedro, y es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de la tres dimensiones.
$d = \sqrt{1^2 + 1{,}5^2 + 2{,}3^2} = \sqrt{8{,}54} \approx 2{,}92$ m
Como el palo mide mas, el señor no puede introducir el palo en el ascensor.

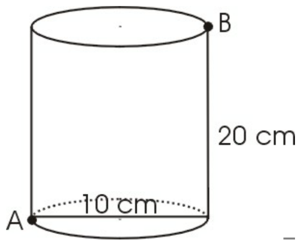
38 **Calcula en la siguiente figura el elemento que falta:**



Solución:
Por el teorema de Pitágoras:

$$A^2 = 7{,}5^2 + 10^2 \Rightarrow A = \sqrt{156{,}25} \approx 12{,}5$$

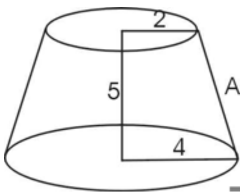
39 **¿Cuál es el camino de longitud mínima desde A hasta B en la siguiente figura (sin salirse de la superficie de la misma)? ¿Cuánto mide?**



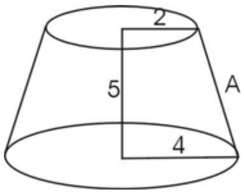
Solución:
Al desarrollar el cilindro se obtiene un rectángulo. El camino de longitud mínima es la línea recta que une A con B. Tenemos un triángulo rectángulo de catetos 20 y 10, la longitud que nos piden es la hipotenusa. Aplicando el teorema de Pitágoras:

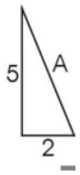
$$h = \sqrt{10^2 + 20^2} = \sqrt{100 + 400} \approx 22{,}36 \text{ cm}$$

40 **Calcula en la siguiente figura el elemento que falta:**



Solución:
Aplicando el teorema de Pitágoras:
$A^2 = 5^2 + 2^2 \Rightarrow h = \sqrt{29} \approx 5{,}39$





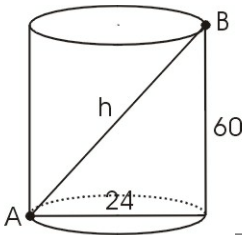
41 **Se tiene un cono de altura 10 cm y radio de la base 4 cm. Si se mantiene el radio de la base y se aumenta al doble la altura, ¿cuánto ha variado la generatriz del cono?**

Solución:
La generatriz del cono de altura 10 cm es:
$g^2 = 10^2 + 4^2 \Rightarrow g = \sqrt{116} \approx 10{,}77$ cm
La generatriz del cono de altura el doble es:
$g^2 = 20^2 + 4^2 \Rightarrow g = \sqrt{416} \approx 20{,}39$ cm
La proporción de lo que ha variado es:
$\frac{20{,}39}{10{,}77} = 1{,}89$

42 **Con 12 varillas de 5 cm de largo cada una, usando todas las varillas ¿qué poliedros regulares se pueden construir?**

Solución:
Se pueden formar los poliedros regulares que tengan 12 aristas: el cubo y el octaedro.

43 **Calcula la distancia máxima entre dos puntos de un cilindro de radio 12 cm y altura 60 cm.**

Solución:


La distancia máxima es la línea recta que une los puntos A y B de la figura adjunta.
La distancia AB es la hipotenusa h de un triángulo rectángulo de catetos 24 cm y 60 cm, aplicando el teorema de Pitágoras:
$h^2 = 24^2 + 60^2 \Rightarrow h = \sqrt{24^2 + 60^2} = \sqrt{4176} = 12\sqrt{29} \approx 64{,}62$ cm

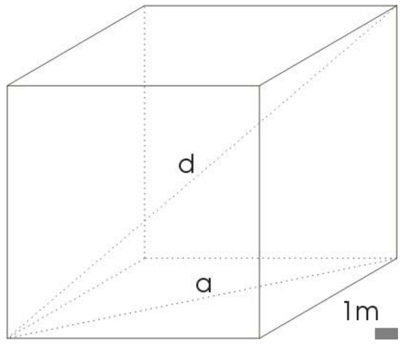
44 **Determina los ángulos diedros que forman las caras laterales de un poliedro que es un prisma recto de base un octógono regular.**

Solución:
El ángulo diedro formado por las caras laterales es igual al ángulo interior del octógono de la base:

$$180° \cdot (8-2) : 8 = \frac{1080}{8} = 135°$$

45 **Tenemos una caja en forma de cubo de lado 1 m. ¿Cabría en la caja una vara de 1,5 m de longitud?**

Solución:



Calculemos la máxima longitud en el cubo, que es la diagonal d
En la base del cubo tenemos un triángulo rectángulo de hipotenusa a y catetos 1 m, aplicando el teorema de Pitágoras calculamos el valor de a:

$a^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$ m

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo de hipotenusa d y catetos a y 1:

$d^2 = a^2 + 1^2 \Rightarrow d = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ m

Como la diagonal mide más que 1,5 m la vara cabe en la caja.

46 **Determina la superficie mínima de papel para envolver un prisma de base un cuadrado de lado 1 m, y 2 m de altura.**

Solución:

El área de la base es: $A_{base} = 1^2 = 1\,m^2$.

El área de cada rectángulo lateral es: $A_T = 1 \cdot 2 = 2\ m^2$.

El área de todo el prisma es: $A = 2 \cdot A_{base} + 4 \cdot A_T = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 10\ m^2$.

Nos hace falta al menos $10\ m^2$ de papel.

47 **¿Es posible meter 55 caramelos de forma esférica de radio 1 cm en una caja rectangular de lados 10, 11 y 5 cm?**

Solución:
El volumen de un caramelo es:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 \approx 4{,}19\,\text{cm}^3$$

Los 55 caramelos ocupan un volumen de

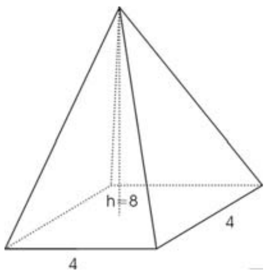
$$4{,}19 \cdot 55 = 230{,}45\ \text{cm}^3$$

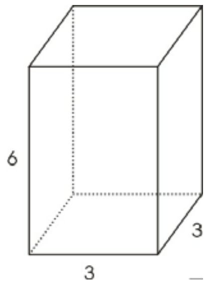
El volumen de la caja es:

$$V = 6 \cdot 7 \cdot 5 = 210\,\text{cm}^3$$

Como el volumen de la caja es menor que el de los caramelos, no se puede meter los caramelos en la caja.

48 **Calcula el volumen de las siguientes figuras:**

a) 

b) 

Solución:

c) $V = \dfrac{A_{base} \cdot h}{3} = \dfrac{16 \cdot 8}{3} = \dfrac{128}{3}\,u^3$

d) $V = A_{base} \cdot h = 9 \cdot 6 = 54\ u^3$

49 **De un cilindro conocemos su altura, 15 cm, y el radio de la base, 5 cm. Calcula su área y su volumen.**

Solución:
El área del cilindro es:

$$A = 2 \cdot \pi \cdot 5^2 + 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 15 = 628{,}32\ \text{cm}^2$$

El volumen del cilindro es:

$$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 15 = 1178{,}1\,\text{cm}^3$$

50 **Calcula el volumen de una esfera de radio:**

a) 2 m
b) 12 cm

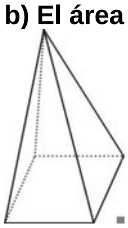
Solución:

a) $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot R^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \dfrac{32}{3}\pi \approx 33{,}51\,\text{m}^3$

b) $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot R^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 12^3 = 2304\pi \approx 7238{,}23\ \text{cm}^3$

51 **Dada la siguiente pirámide de base un cuadrado de lado 2 cm y altura 5 cm, calcula:**

a) El área de la base.
b) El área de las caras laterales.



Solución:

a) Área de la base: $2^2 = 4\,cm^2$

b) Calculamos la altura de una cara por medio del teorema de Pitágoras:

$5^2 + 1^2 = h^2 \Rightarrow h = \sqrt{26}$ cm

Área de una cara lateral: $\dfrac{2\sqrt{26}}{2} = \sqrt{26}\ cm^2$

Área de las cuatro caras laterales: $4\sqrt{26}\ cm^2$

52 **Calcula el volumen de una esfera de radio:**

a) 4 cm
b) 15 mm

Solución:

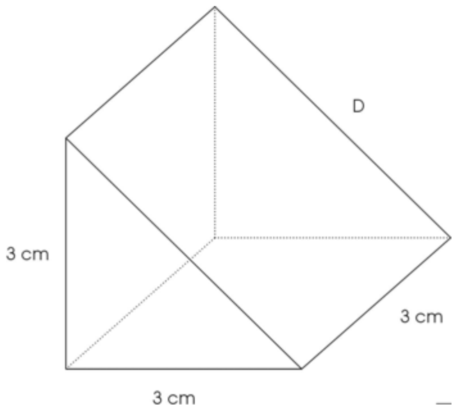
a) $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot R^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \dfrac{256}{3}\pi \approx 268{,}08\ cm^3$

b) $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot R^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 15^3 = 4500\pi \approx 14137{,}17\ mm^3$

53 **Calcula el área de la superficie de una esfera de radio 6 cm.**

Solución:
El área es:
$A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 6^2 = 144\pi \approx 452{,}39\ cm^2$

54 **Calcula el área del siguiente poliedro:**



Solución:
El área está formada por dos cuadrados, un rectángulo y dos triángulos.
Para calcular el área del rectángulo nos hace falta la hipotenusa del triángulo, que la calculamos por medio del teorema de Pitágoras: $D^2 = 3^2 + 3^2 \Rightarrow D = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

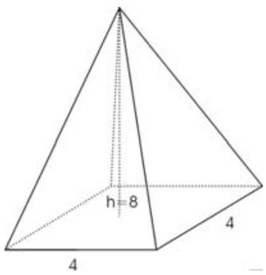
Área del rectángulo: $A_R = 3 \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}\ \text{cm}^2$

Área de un triángulo: $A_T = \dfrac{3 \cdot 3}{2} = \dfrac{9}{2}\ \text{cm}^2$

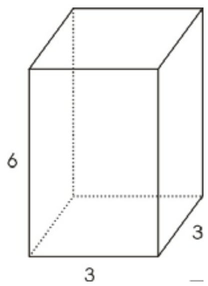
Área de un cuadrado: $A_C = 3 \cdot 3 = 9\ \text{cm}^2$

Área total: $A = A_R + 2\,A_T + 2\,A_T = 9\sqrt{2} + 2 \cdot \dfrac{9}{2} + 2 \cdot 9 = 9\sqrt{2} + 27 \approx 39{,}73\ \text{cm}^2$

55 **Calcula el volumen de las siguientes figuras:**



a)



b)

Solución:

a) $V = \dfrac{A_{base} \cdot h}{3} = \dfrac{16 \cdot 8}{3} = \dfrac{128}{3}\ u^3$

b) $V = A_{base} \cdot h = 9 \cdot 6 = 54\ u^3$

56 **En un cilindro recto el radio de la base mide 2 cm y la altura 10 cm. Calcula:**

a) El área de la base.
b) El área lateral.

Solución:

57 **Se quiere pintar una habitación con forma de prisma recto de base cuadrada de lado 3 m, y la altura de la habitación es 3,5 m. El pintor cobra 3 € por metro cuadrado. ¿Cuánto costará pintar las paredes de la habitación?**

Solución:
Las 4 paredes son de forma rectangular, midiendo los lados 3 y 3,5 m.
Una pared tiene una superficie: $A_{pared} = 3 \cdot 3{,}5 = 10{,}5\ m^2$.

Luego se debe pintar una superficie de $4 \cdot 10{,}5 = 42\ m^2$.

Como cada m^2 cuesta 3 €, en total cuesta: $3 \cdot 42 = 126$ €.

58 a) Área de la base:
$A_{base} = \pi r^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi\ cm^2$
b) Área lateral:
$A_{lateral} = 2\pi r h = 2\pi \cdot 2 \cdot 10 = 40\pi\ cm^2$

Solución:

59 **El radio de una esfera mide 7 cm. Calcula:**

a) El área de la superficie.
b) El volumen de la esfera.

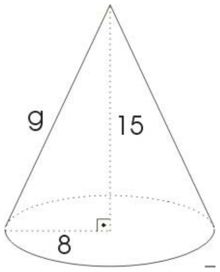
Solución:
a) Área de la superficie: $A = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 7^2 = 196\pi\ cm^2$

b) Volumen de la esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 7^3 = \frac{1372}{3}\pi\ cm^3$

60 **En un cono recto el radio de la base mide 8 cm y la altura 15 cm. Calcula:**

a) El área de la base.
b) El área lateral.
c) El área de todo el cono.
d) El volumen del cono.

Solución:



c) Área de la base: $A_{base} = \pi r^2 = \pi \cdot 8^2 = 64\,\pi\ cm^2$

d) Calculamos la generatriz por medio del teorema de Pitágoras:

$g^2 = 8^2 + 15^2 \Rightarrow g = 17\,cm$

e) Área lateral: $A_{lateral} = \pi\, r\, g = \pi \cdot 8 \cdot 17 = 136\,\pi\ cm^2$

Área de todo el cono: $A_{total} = A_{base} + A_{lateral} = 64\,\pi + 136\,\pi = 200\,\pi\ cm^2$

f) Volumen del cono: $V = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} 64\,\pi \cdot 15 = \frac{960}{3}\pi = 320\pi\ cm^3$

61 **Calcula la superficie total de una semiesfera de radio 5 cm.**

Solución:
El área de una esfera entera es:

$A_e = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi \approx 314{,}16\ \ cm^2$

Como es una semiesfera es la mitad más el área de un círculo de radio el radio de la esfera:

$A = \frac{314{,}16}{2} + \pi \cdot 5^2 \approx 235{,}61\ cm^2$

62 **Se quiere construir una pirámide de cristal de altura 5 m. La pirámide tiene una base cuadrada de lado 6 m. Calcula la cantidad de cristal necesario.**

Solución:
Hay que calcular la superficie de los cuatro triángulos de la pirámide. Nos hace falta calcular la altura del triángulo, para ello aplicamos el teorema de Pitágoras:

$h^2 = 3^2 + 5^2 \Rightarrow h = \sqrt{34}\ m$

El área de un triángulo es:

$A_{triángulo} = \frac{6 \cdot \sqrt{34}}{2} = 3\sqrt{34}\ m^2$

El área de la base de la pirámide es:

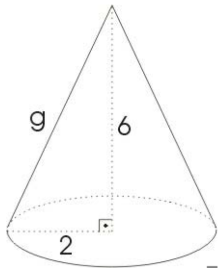
$A_{base} = 6 \cdot 6 = 36 m^2$

La superficie de cristal es

$A_{cristal} = A_{base} + 4A_{triángulo} = 36 + 4 \cdot 3\sqrt{34} = 36 + 12\sqrt{34} \approx 105{,}97\ m^2$

63 **En un cono recto el radio de la base mide 2 cm y la altura 6 cm. Calcula el área lateral del cono.**

Solución:



Por el teorema de Pitágoras:

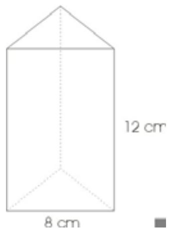
$g^2 = 2^2 + 6^2 \Rightarrow g = \sqrt{40} \approx 6{,}32$ cm

El área lateral es:

$A = \pi \cdot 2 \cdot 6{,}32 \approx 39{,}71$cm

64 Solución:

65 **Dado el siguiente prisma recto de base un triángulo equilátero, calcula:**



a) El área de las bases.
b) El área de las caras laterales.
c) El área de todo el prisma.
d) El volumen del prisma.

Solución:

El área de un triángulo equilátero de lado a es: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

a) Área de una base: $4^2 \cdot \sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ cm^2

Área de las dos bases: $2 \cdot 16\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$ cm^2

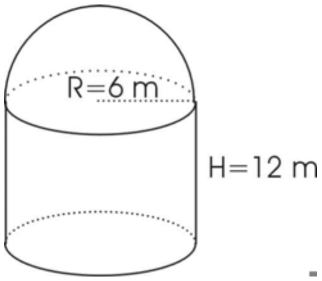
b) Área de una cara lateral: $8 \cdot 12 = 96$ cm^2

Área de las tres caras laterales: $3 \cdot 96 = 288$ cm^2

c) Área de todo el prisma: $288 + 32\sqrt{3}$ cm^2

d) Volumen del prisma: $16\sqrt{3} \cdot 12 = 192\sqrt{3}$ cm^3

66 **¿Cuántos litros de agua caben en un depósito como el de la figura?**



Solución:
Volumen del cilindro:
$V_C = \pi\ R^2\,H = \pi\ 6^2\,12 \approx 1357{,}17\,m^3$
Volumen de la semiesfera:
$\frac{1}{2}V_E = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi\cdot 6^3 \approx 452{,}38\,m^3$
Como un metro cúbico tiene 1000 litros, en el depósito caben:
$1000\cdot(1357{,}17 + 452{,}38) = 1809550\ l$

67 **El radio de una esfera mide 2,1 m. Calcula:**

a) El área de la superficie.
b) El volumen de la esfera.

Solución:
g) Área de la superficie: $A = 4\,\pi\,r^2 = 4\cdot\pi\cdot 2{,}1^2 \approx 55{,}42\ m^2$
h) Volumen de la esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\cdot 2{,}1^3 \approx 38{,}79\ m^3$

68 **Calcula la superficie total de una semiesfera de diámetro 4,6 cm.**

Solución:
El área de una esfera entera es:
$A_e = 4\pi\,r^2 = 4\pi\cdot 2{,}3^2 \approx 66{,}48\ \ cm^2$
Como es una semiesfera es la mitad más el área de un círculo de radio el radio de la esfera:
$A = \frac{66{,}48}{2} + \pi\cdot 2{,}3^2 \approx 49{,}86\ \ cm^2$

69 **Determina la superficie mínima de papel para envolver una pirámide de base un cuadrado de 1 m de lado, y 2 m de altura.**

Solución:
El área de la base es: $A_{base} = 1^2 = 1\,m^2$.
La altura de cada triángulo es por el teorema de Pitágoras:
$h^2 = 2^2 + 0{,}5^2 \Rightarrow h = 2{,}06$ m

El área de cada triángulo lateral es: $A_T = \dfrac{1 \cdot 2{,}06}{2} = 1{,}03\ m^2$.

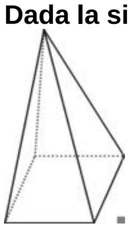
El área de toda la pirámide es: $A = A_{base} + 4 \cdot A_T = 1 + 4 \cdot 1{,}03 = 5{,}12\ m^2$.

Nos hace falta al menos $5{,}12\ m^2$ de papel.

70 **El volumen de una esfera es $36\pi\ m^3$. Calcula la superficie de la esfera.**

Solución:
Primero calculamos el radio de la esfera:
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3\,V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 36\pi}{4\pi}} = \sqrt[3]{27} = 3 \text{ m}$$
Aplicamos la fórmula de la superficie esférica:
$A = 4\pi\ r^2 = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi\ \ cm^2$

71 **Dada la siguiente pirámide de base un cuadrado de lado 8 cm y altura 10 cm, calcula:**



a) El área de la base.
b) El área de las caras laterales.
c) El área de toda la pirámide.
d) El volumen de la pirámide.

Solución:
e) Área de la base: $8^2 = 64\,cm^2$
f) Calculamos la altura de una cara por medio del teorema de Pitágoras:
$10^2 + 4^2 = h^2 \Rightarrow h = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$ cm

Área de una cara lateral: $\dfrac{8 \cdot 2\sqrt{29}}{2} = 8\sqrt{29}\ cm^2$

Área de las cuatro caras laterales: $4 \cdot 8\sqrt{29} = 32\sqrt{29}\ cm^2$
g) Área de toda la pirámide: $64 + 32\sqrt{29}\ cm^2$

72 **Calcula el volumen de una esfera de radio:**

a) 2 cm
b) 4 cm
¿Si se duplica el radio de una esfera en cuánto varía el volumen?

Solución:

a) $V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{32}{3}\pi \text{ cm}^3$

b) $V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{256}{3}\pi \text{ cm}^3$

Al duplicar el radio el volumen queda multiplicado por 8.

73 **Calcula el lado de un cubo con igual volumen que una esfera de diámetro 3,2 m.**

Solución:
Primero calculamos el volumen de la esfera:

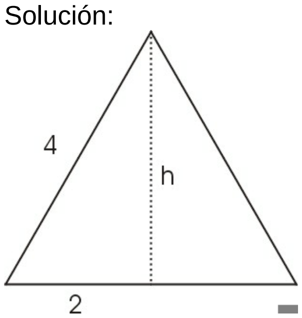
$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 1{,}6^3 = 17{,}16 \text{ m}^3$

Como el volumen del cubo debe ser igual al de la esfera:

$V_{esfera} = V_{cubo} \Rightarrow 17{,}16 = l^3 \Rightarrow l = \sqrt[3]{17{,}16} = 2{,}58 \text{ m}$

74 **Calcula el área de las caras de un tetraedro de arista 4 cm.**

Solución:



El tetraedro está formado por cuatro triángulos equiláteros de lado 4 cm.

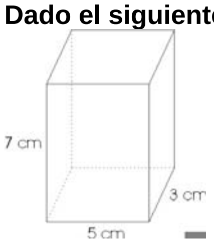
Cada triángulo tiene de área: $A = \frac{4 \cdot h}{2} = 2 \cdot h$. Nos falta calcular la altura h del triángulo.

Aplicando el teorema de Pitágoras: $4^2 = 2^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ cm.

El área de un triángulo es: $A = 2 \cdot h = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ cm^2.

El área del tetraedro es: $A_T = 4 \cdot A = 4 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \approx 27{,}71 \text{ cm}^2$

75 **Dado el siguiente prisma recto de base un rectángulo, calcula:**



a) El área de las bases.
b) El área de las caras laterales.
c) El área de todo el prisma.
d) El volumen del prisma.

Solución:

h) Área de una base: $5 \cdot 3 = 15\,\text{cm}^2$

Área de las dos bases: $2 \cdot 15 = 30\,\text{cm}^2$

i) Área de una cara lateral: $7 \cdot 5 = 35\,\text{cm}^2$

Área de otra cara lateral: $3 \cdot 7 = 21\text{cm}^2$

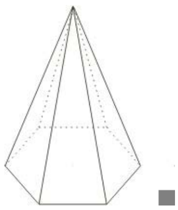
Área de las cuatro caras laterales: $2 \cdot 21 + 2 \cdot 35 = 112\,\text{cm}^2$

j) Área de todo el prisma: $112 + 30 = 142\ \text{cm}^2$

k) Volumen del prisma: $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105\,\text{cm}^3$

76 **Determina la superficie mínima de papel para envolver una pirámide hexagonal regular de 1 m de lado de la base y 2 m de altura.**

Solución:



Dividimos el hexágono en seis triángulos equiláteros, la altura de este triángulo es por el teorema de Pitágoras:
$1^2 = a^2 + 0{,}5^2 \Rightarrow a = \sqrt{0{,}75} = 0{,}87\ \text{m}$

El área de la base es: $A_{base} = 6 \cdot \frac{1 \cdot 0{,}87}{2} = 2{,}61\,\text{m}^2$.

La altura de cada triángulo es por el teorema de Pitágoras:
$h^2 = 2^2 + 0{,}87^2 \Rightarrow h = 2{,}18\ \text{m}$

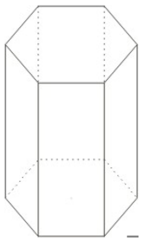
El área de cada triángulo lateral es: $A_T = \frac{1 \cdot 2{,}18}{2} = 1{,}09\ \text{m}^2$.

El área de toda la pirámide es: $A = A_{base} + 6 \cdot A_T = 2{,}61 + 6 \cdot 1{,}09 = 9{,}15\ \text{m}^2$.

Nos hace falta al menos $9{,}15\ \text{m}^2$ de papel.

77 **Determina la superficie mínima de papel para envolver un prisma hexagonal regular de 1 m de lado de la base y 2 m de altura.**

Solución:



Dividimos el hexágono en seis triángulos equiláteros, la altura de este triángulo es por el teorema de Pitágoras:
$1^2 = a^2 + 0,5^2 \Rightarrow a = \sqrt{0,75} = 0,87$ m

El área de la base es: $A_{base} = 6 \cdot \frac{1 \cdot 0,87}{2} = 2,61\,m^2$.

El área de cada rectángulo lateral es: $A_T = 1 \cdot 2 = 2\ m^2$.

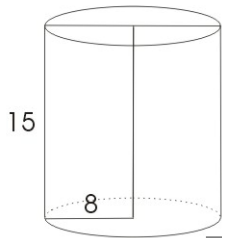
El área de todo el prisma es: $A = 2 \cdot A_{base} + 6 \cdot A_T = 2 \cdot 2,61 + 6 \cdot 2 = 17,22\ m^2$.

Nos hacen falta al menos $17,22\ m^2$ de papel.

78 **En un cilindro recto el radio de la base mide 8 cm y la altura 15 cm. Calcula:**

a) El área de la base.
b) El área lateral.
c) El área de todo el cilindro.

Solución:



i) Área de la base: $A_{base} = \pi r^2 = \pi \cdot 8^2 = 64\pi\ cm^2$

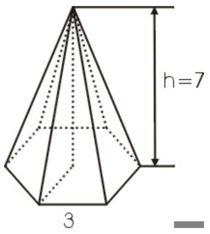
j) Área lateral: $A_{lateral} = 2\pi r h = 2\pi \cdot 8 \cdot 15 = 240\pi\ cm^2$

k) Área de todo el cilindro: $A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} = 2 \cdot 64\pi + 240\pi = 368\pi\ cm^2$

79 **Un monumento tiene forma de cono, y está hecho con cristal. La altura del monumento es de 4,2 m, y el diámetro de la base es 8 m. Calcula la superficie del monumento.**

Solución:
Hay que calcular la generatriz del cono, para ello aplicamos el teorema de Pitágoras:
$g^2 = 4,2^2 + 4^2 \Rightarrow h = \sqrt{33,64} = 5,8$ m
El área lateral del cono es:
$A = \pi r g = \pi \cdot 4 \cdot 5,8 = 72,88\ m^2$

80 **Calcula el volumen y el área de la siguiente pirámide.**



Solución:

El volumen es: $V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$

Nos falta calcular el área de la base. Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la apotema de la base.

$3^2 = a^2 + 1{,}5^2 \Rightarrow a = \sqrt{6{,}75} = 2{,}6$

El área de la base es: $A_{base} = 6 \cdot \frac{3 \cdot 2{,}6}{2} = 23{,}4$

Luego el volumen es: $V = \frac{1}{3} \cdot 23{,}4 \cdot 7 = 54{,}6$

Para calcula el área de la pirámide nos falta calcular la altura de un triángulo de la pirámide, aplicando el teorema de Pitágoras:

$l^2 = h^2 + a^2 \Rightarrow l = \sqrt{7^2 + 2{,}6^2} = 7{,}47$

Un triángulo de la pirámide tiene de área:

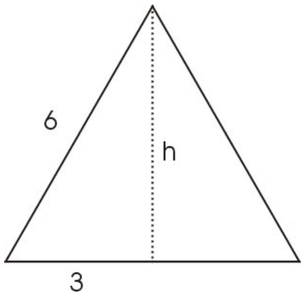
$A_{triángulo} = \frac{3 \cdot 7{,}47}{2} = 11{,}21$

El área de toda la pirámide es:

$A = A_{base} + 6 \cdot A_{triángulo} = 23{,}4 + 6 \cdot 11{,}21 = 90{,}66$

81 **Calcula el área de las caras de un icosaedro de arista 6 cm.**

Solución:



El icosaedro está formado por veinte triángulos equiláteros de lado 6 cm.

Cada triángulo tiene de área: $A = \frac{6 \cdot h}{2} = 3 \cdot h$. Nos falta calcular la altura h del triángulo.

Aplicando el teorema de Pitágoras: $6^2 = 3^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ cm .

El área de un triángulo es: $A = 3 \cdot h = 3 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$ cm^2.

El área del icosaedro es: $A_T = 20 \cdot A = 20 \cdot 9\sqrt{3} = 180\sqrt{3} \approx 311{,}77$ cm^2 .

82 **Calcula el área de las caras de un tetraedro de arista 6 cm.**

Solución:
El tetraedro está formado por cuatro triángulos equiláteros de lado 6 cm.

Cada triángulo tiene de área: $A = \frac{6 \cdot h}{2} = 3 \cdot h$. Nos falta calcular la altura h del triángulo.

Aplicando el teorema de Pitágoras: $6^2 = 3^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{36-9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ cm.

El área de un triángulo es: $A = 3 \cdot h = 3 \cdot 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ cm^2.

El área del tetraedro es: $A_T = 4 \cdot A = 4 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \approx 15{,}59$ cm^2

83 **Calcula el área de las caras de un icosaedro de arista 2 cm.**

Solución:
El icosaedro está formado por veinte triángulos equiláteros de lado 2 cm.

Cada triángulo tiene de área: $A = \frac{2 \cdot h}{2} = h$. Nos falta calcular la altura h del triángulo.

Aplicando el teorema de Pitágoras: $2^2 = 1^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{4-1} = \sqrt{3} = \sqrt{3}$ cm.

El área de un triángulo es: $A = h = \sqrt{3}$ cm^2.

El área del icosaedro es: $A_T = 20 \cdot A = 20 \cdot \sqrt{3} \approx 34{,}64$ cm^2.

84 **Pepe se ha comprado una bola de cristal. La bola mide 12 cm de diámetro. Pepe quiere averiguar cuanto pesa la bola, ¿podrías calcular su peso sabiendo que 1 cm³ pesa 30 g?**

Solución:
Volumen total de la esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 \approx 904{,}78\,\text{cm}^3$$

Luego pesará:

$$904{,}78 \cdot 30 = 27143 \text{ g} = 27{,}143\,\text{kg}$$

85 **Tenemos una esfera de radio 2 m dentro de otra de radio 5 m. Calcula el volumen que hay entre las dos esferas.**

Solución:
El volumen que hay entre las dos esferas es igual a la resta del volumen de la mayor menos el volumen de la menor.

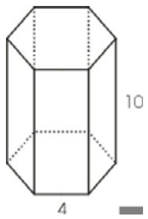
$$\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 5^3 - \frac{4}{3}\pi 2^3 = \frac{4}{3}\pi(125-8) = 156\pi \approx 490{,}09 \text{ m}^3 .$$

86 **Se quiere pintar un edificio esférico radio 12 m, ¿cuánta superficie hay que pintar?**

Solución:
Necesitamos calcular el área de la superficie de la esfera:

$$A = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 12^2 = 576\pi \approx 1809{,}56\,\text{m}^2$$

87 **Calcula el volumen y el área del siguiente prisma.**



Solución:
El volumen es: $V = A_{base} \cdot h$
Nos falta calcular el area de la base. Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la apotema de la base.
$4^2 = a^2 + 2^2 \Rightarrow a = \sqrt{12} = 3{,}46$
El área de la base es: $A_{base} = 6 \cdot \frac{4 \cdot 3{,}46}{2} = 41{,}52$
Luego el volumen es: $V = 41{,}52 \cdot 10 = 415{,}2$
El área de todo el prisma es:
$A = 2 \cdot A_{base} + 6 \cdot A_{cara} = 2 \cdot 41{,}52 + 6 \cdot 4 \cdot 10 = 323{,}04$