

# Inecuaciones

Una **inecuación** es una **desigualdad algebraica** en la que sus dos miembros aparecen ligados por uno de estos signos:

$<$	menor que	$2x - 1 < 7$
$\leq$	menor o igual que	$2x - 1 \leq 7$
$>$	mayor que	$2x - 1 > 7$
$\geq$	mayor o igual que	$2x - 1 \geq 7$

La **solución** de una inecuación es el **conjunto de valores de la variable que verifica la inecuación**.

Podemos expresar la solución de la inecuación mediante:

1. Una **representación gráfica**.

2. Un **intervalo**.

$$2x - 1 < 7$$

$$2x < 8 \quad x < 4$$



$$(-\infty, 4)$$

$$2x - 1 \leq 7$$

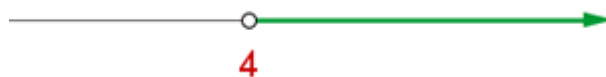
$$2x \leq 8 \quad x \leq 4$$



$$(-\infty, 4]$$

$$2x - 1 > 7$$

$$2x > 8 \quad x > 4$$



$$(4, \infty)$$

$$2x - 1 \geq 7$$

$$2x \geq 8 \quad x \geq 4$$



$$[4, \infty)$$

## Propiedades de las desigualdades

Si a los dos miembros de una desigualdad se les suma o se les resta un mismo número, la **desigualdad** resultante es equivalente a la dada.

$$3x + 4 < 5 \quad 3x + 4 - 4 < 5 - 4 \quad 3x < 1$$

Si a los dos miembros de una desigualdad se les multiplica o divide por un mismo número **positivo**, la **desigualdad** resultante es equivalente a la dada.

$$2x < 6 \quad 2x : 2 < 6 : 2 \quad x < 3$$

Si a los dos miembros de una desigualdad se les multiplica o divide por un mismo número **negativo**, la **desigualdad** cambia de sentido.

$$-x < 5 \quad (-x) \cdot (-1) > 5 \cdot (-1) \quad x > -5$$

## Inecuaciones de primer grado

Consideremos la inecuación:

$$2 - \left[ -2 \cdot (x + 1) - \frac{x - 3}{2} \right] \leq \frac{2x}{3} - \frac{5x - 3}{12} + 3x$$

La resolveremos aplicando los siguientes pasos, si son posibles realizarlos:

1° Quitar corchetes.

$$2 - \left( -2x - 2 - \frac{x - 3}{2} \right) \leq \frac{2x}{3} - \frac{5x - 3}{12} + 3x$$

2° Quitar paréntesis.

$$2 + 2x + 2 + \frac{x - 3}{2} \leq \frac{2x}{3} - \frac{5x - 3}{12} + 3x$$

3° Quitar denominadores.

$$24 + 24x + 24 + 6 \cdot (x - 3) \leq 8x - (5x - 3) + 36x$$

$$24 + 24x + 24 + 6x - 18 \leq 8x - 5x + 3 + 36x$$

4° Agrupar los términos en  $x$  a un lado de la desigualdad y los términos independientes en el otro.

$$24x + 6x - 8x + 5x - 36x \leq 3 - 24 - 24 + 18$$

5° Efectuar las operaciones

$$-9x \leq -27$$

6° Como el coeficiente de la  $x$  es negativo multiplicamos por  $-1$ , por lo que cambiará el sentido de la desigualdad.

$$9x \geq 27$$

7° Despejamos la incógnita.

$$x \geq 3$$

**Obtenemos la solución como una desigualdad, pero ésta también podemos expresarla:**

**De forma gráfica:**



**Como un intervalo:**

$$[3, +\infty)$$

## Inecuaciones de segundo grado

Consideremos la inecuación:

$$x^2 - 6x + 8 > 0$$

La resolveremos aplicando los siguientes pasos:

1° Igualamos el polinomio del primer miembro a cero y obtenemos las raíces de la ecuación de segundo grado.

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} =$$

$\nearrow x_1 = \frac{8}{2} = 4$   
 $\searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2$

2° Representamos estos valores en la recta real. Tomamos un punto de cada intervalo y evaluamos el signo en cada intervalo:



$$P(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 8 > 0$$

$$P(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = 17 - 18 < 0$$

$$P(5) = 5^2 - 6 \cdot 5 + 8 = 33 - 30 > 0$$

3° La solución está compuesta por los intervalos (o el intervalo) que tengan el mismo signo que el polinomio.



$$S = (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$$

$$x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$$

$$(x + 1)^2 \geq 0$$

Como un número elevado al cuadrado es siempre positivo la solución es  $\mathbb{R}$

### Solución

$x^2 + 2x + 1 \geq 0$	$(x + 1)^2 \geq 0$	$\mathbb{R}$
$x^2 + 2x + 1 > 0$	$(x + 1)^2 > 0$	$\mathbb{R} - \{-1\}$

$x^2 + 2x + 1 \leq 0$	$(x + 1)^2 \leq 0$	$x = -1$
$x^2 + 2x + 1 < 0$	$(x + 1)^2 < 0$	$\emptyset$

$$x^2 + x + 1 > 0$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Cuando no tiene raíces reales, le damos al polinomio cualquier valor si:

El signo obtenido coincide con el de la desigualdad, la solución es  $\mathbb{R}$ .

El signo obtenido no coincide con el de la desigualdad, no tiene solución.

### Solución

$x^2 + x + 1 \geq 0$	$\mathbb{R}$
$x^2 + x + 1 > 0$	$\mathbb{R}$
$x^2 + x + 1 \leq 0$	$\emptyset$
$x^2 + x + 1 < 0$	$\emptyset$

## Inecuaciones racionales

Las **inecuaciones racionales** se resuelven de un modo similar a las de **segundo grado**, pero hay que tener presente que **el denominador no puede ser cero**.

$$\frac{x - 2}{x - 4} \geq 0$$

1° Hallamos las raíces del numerador y del denominador.

$$x - 2 = 0 \quad x = 2$$

$$x - 4 = 0 \quad x = 4$$

2° Representamos estos valores en la recta real, teniendo en cuenta que las raíces del denominador, independientemente del signo de la desigualdad, tienen que ser abiertas.

3° Tomamos un punto de cada intervalo y evaluamos el signo en cada intervalo:



$$\frac{x-2}{x-4} \geq 0 \quad x \neq 4$$

$$x = 0 \quad \frac{0-2}{0-4} > 0$$

$$x = 3 \quad \frac{3-2}{3-4} < 0$$

$$x = 5 \quad \frac{5-2}{5-4} > 0$$



4° La solución está compuesta por los intervalos (o el intervalo) que tengan el mismo signo que la fracción polinómica.

$$S = (-\infty, 2] \cup (4, \infty)$$

$$\frac{x+3}{x-2} < 2$$

Pasamos el 2 al primer miembro y ponemos a común denominador.

$$\frac{x+3}{x-2} - 2 < 0 \quad \frac{x+3-2(x-2)}{x-2} < 0 \quad \frac{-x+7}{x-2} < 0$$

Hallamos las raíces del numerador y del denominador.

$$-x+7=0 \quad x=7$$

$$x-2=0 \quad x=2$$

Evaluamos el signo:

$$x = 0 \quad \frac{0+7}{0-2} < 0$$

$$x = 3 \quad \frac{3+7}{3-2} > 0$$

$$x = 8 \quad \frac{-8+7}{8-2} < 0$$



$$S = (-\infty, 2) \cup (7, \infty)$$