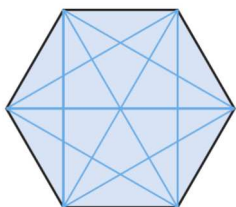


CLAVES PARA EMPEZAR

1. Contesta si es verdadero o falso.

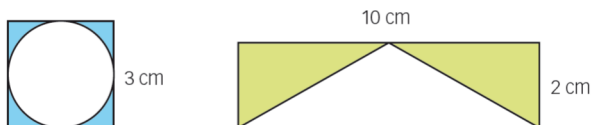
- a) Un polígono puede tener más lados que vértices.
 - b) Un polígono puede tener más ángulos que vértices.
 - c) Un polígono puede tener más diagonales que vértices.
 - d) Un polígono puede tener más lados que ángulos.
 - e) Un polígono puede tener más lados que diagonales.
- a) Falso. Tiene tantos lados como vértices.
- b) Falso. A cada ángulo le corresponde un vértice, de modo que tiene el mismo número de vértices que de ángulos.
- c) Verdadero.



Por ejemplo, un hexágono (6 vértices) tiene 9 diagonales.

- d) Falso. Tiene tantos lados como ángulos, ya que estos vienen determinados por los vértices y hay el mismo número de vértices que de lados.
- e) Verdadero. Por ejemplo, un triángulo tiene 3 lados y ninguna diagonal.

2. Calcula el área coloreada.



PRIMER DIBUJO:

Representa el área de un cuadrado de lado 3 cm, menos el área de un círculo de diámetro 3 cm.

$$A = 3^2 - \pi \cdot 1,5^2 = 9 - 7,07 = 1,93 \text{ cm}^2.$$

SEGUNDO DIBUJO:

Representa el área de un rectángulo de lados 10 y 2 cm, menos el área de un triángulo de base 10 cm y altura 2 cm.

$$A = 10 \cdot 2 - \frac{10 \cdot 2}{2} = 20 - 10 = 10 \text{ cm}^2$$

VIDA COTIDIANA

Las pilas son necesarias para que muchos de los aparatos electrónicos funcionen.

El problema comienza cuando ya no son útiles y hay que eliminarlas. ¿Sabes que una sola pila de mercurio puede contaminar hasta 600 000 ℓ de agua al liberar sus componentes?

Otro de los problemas de las pilas es su forma. Su superficie curva las hace inestables y por eso son difíciles de almacenar.

- ¿Cuál es el cuerpo geométrico de la pila de la figura?

Es un cilindro.

RESUELVE EL RETO

¿Cómo formarías con 12 cerillas 6 cuadrados iguales?

Formaría un cubo.

El radio de la Tierra es 6 371 km. Si tuviéramos una cinta de longitud el Ecuador más un metro y la separáramos uniformemente de la superficie, ¿podría pasar un conejo por el hueco?

Longitud del Ecuador = $2\pi \cdot 6\,371$ km

Longitud de la cinta = $2\pi \cdot 6\,371 + 0,001$ km

Radio de la circunferencia que se forma con la cinta: $r = \frac{2\pi \cdot 6\,371 + 0,001}{2\pi} = 6\,371 + \frac{0,001}{2\pi} = 6\,371,00016$ km

El conejo podría pasar si midiera menos de 16 cm.

Un tonel de forma cilíndrica lleno pesa 35 kg. Si lo llenamos hasta la mitad del mismo líquido pesa 19 kg. ¿Cuánto pesa el tonel vacío?

Peso del líquido + peso del tonel = 35

$\frac{1}{2}$ peso del líquido + peso del tonel = 19

Resolvemos el sistema por reducción, multiplicando la segunda ecuación por 2:

–peso del tonel = –3 → peso del tonel = 3 kg

¿Cuántas bolas de 10 cm de diámetro podrás meter en una caja vacía con forma de cubo de 1 m de lado?

Cada lado del cubo equivale a 10 bolas, es decir, podré meter 10^3 bolas.

ACTIVIDADES

1. ¿Cómo son las aristas de un poliedro regular?

Iguales, ya que sus caras están formadas por el mismo polígono regular y este tiene todos sus lados iguales.

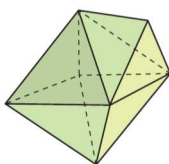
2. Justifica si es verdadero o falso que el menor número de caras de un poliedro es 4.

Verdadero.

Por un lado, podemos afirmar que existe un poliedro de 4 caras, que es una pirámide de base triangular.

Por otro lado, supongamos que existe un poliedro de 3 caras. Si los polígonos que forman sus caras tienen más de 3 lados, necesitamos para poder cerrarlo tantas caras como lados, de modo que serán más de 3. Si sus caras son triángulos y solo tenemos 3, los podemos unir formando una pirámide, pero no habrá base, de modo que no será un poliedro. Por tanto, no podemos construir un poliedro de 3 caras.

3. El siguiente poliedro, ¿es regular? ¿Por qué? ¿Verifica la fórmula de Euler?



El poliedro no es regular, pues sus caras no son polígonos regulares iguales.

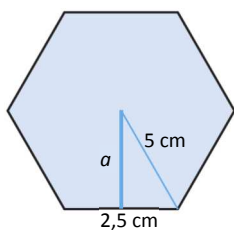
Debería verificar la fórmula de Euler pues es un poliedro convexo. Veamos: el poliedro tiene 10 caras, 7 vértices, 15 aristas, de modo que $10 + 7 = 15 + 2$. Efectivamente verifica la fórmula de Euler.

4. Determina cuántas caras, vértices y aristas tiene un prisma pentagonal.

Un prisma pentagonal tiene 7 caras, 10 vértices y 15 aristas.

5. Halla el área de un prisma hexagonal regular cuya arista de la base mide 5 cm, y su altura, 9 cm.

Tenemos que calcular el área de su base y multiplicarla por 2, y el área de un rectángulo de base $5 \cdot 6 = 30$ cm y altura 9 cm.



Usamos el teorema de Pitágoras para calcular la apotema del hexágono, sabiendo que el lado y el radio miden igual:

$$5^2 = 2,5^2 + a^2 \rightarrow a^2 = 25 - 6,25 = 18,75 \rightarrow a = 4,33 \text{ cm}$$

El área del hexágono es:

$$A_{\text{Hexágono}} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4,33}{2} = 64,95 \text{ cm}^2$$

De modo que el área del prisma es $2 \cdot 64,95 + 30 \cdot 9 = 399,9 \text{ cm}^2$.

6. Calcula la altura de un prisma octogonal regular sabiendo que su área total es $83,28 \text{ cm}^2$, y en la base, la apotema mide 2,41 cm, y las aristas, 2 cm.

Si al área total le restamos el área de las bases, tendremos el área lateral.

Veamos, pues, cuál es el área de las bases: $\frac{8 \cdot 2 \cdot 2,41}{2} = 19,28 \text{ cm}^2$.

Como hay dos bases, el área correspondiente a ellas es $38,56 \text{ cm}^2$.

Restamos el área de las bases al área total: $83,28 - 38,56 = 44,72 \text{ cm}^2$ es el área lateral.

El área lateral viene dada por el perímetro de la base, $2 \cdot 8 = 16$ cm, y la altura del prisma, es decir:

$$44,72 = 16 \cdot h \rightarrow h = 2,795 \text{ cm.}$$

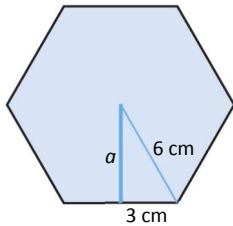
7. Determina cuántas caras, vértices y aristas tiene una pirámide pentagonal.

Una pirámide pentagonal tiene 6 caras, 6 vértices y 10 aristas.

8. Calcula el área total de una pirámide hexagonal regular, con arista básica 6 cm y apotema de sus caras laterales 12 cm.

La pirámide está compuesta por una base que es un hexágono de lado 6 cm, y por 6 triángulos de base 6 cm y altura 12 cm; la suma de todas las áreas de estos polígonos nos da el área total del poliedro.

Calculamos el área de la base:



Usamos el teorema de Pitágoras para calcular la apotema del hexágono:

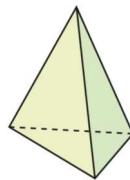
$$6^2 = 3^2 + a^2 \rightarrow a^2 = 36 - 9 = 27 \rightarrow a = 5,20 \text{ cm}$$

El área de la base es $6 \cdot \frac{6 \cdot 5,2}{2} = 93,6 \text{ cm}^2$.

El área lateral es $6 \cdot \frac{6 \cdot 12}{2} = 216 \text{ cm}^2$.

El área total de la pirámide es $93,6 + 216 = 309,6 \text{ cm}^2$.

9. Con cualquier triángulo como base se puede construir una pirámide recta. ¿Es posible hacerlo con cualquier cuadrilátero?

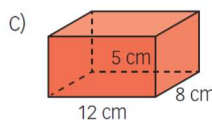
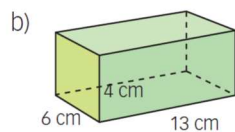
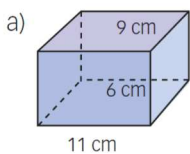


Las pirámides rectas son aquellas cuyas caras son triángulos isósceles. Esto es equivalente a que la proyección del vértice de la pirámide sobre la base coincida con su circuncentro.

Dado cualquier triángulo es posible obtener su circuncentro, pero no es así en el caso de cualquier cuadrilátero, pues algunos no lo tienen.

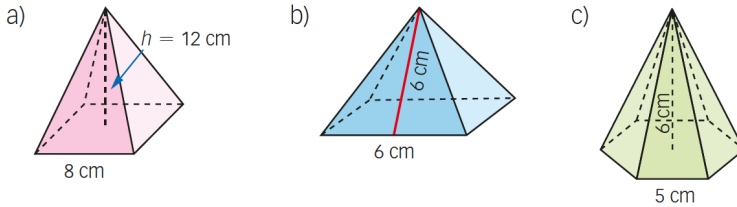
Por tanto, con cualquier cuadrilátero como base, no es posible construir una pirámide recta.

10. Halla el área de estos ortoedros.



- a) $A = (11 \cdot 2 + 9 \cdot 2) \cdot 6 + 2 \cdot 11 \cdot 9 = 438 \text{ cm}^2$
 b) $A = (13 \cdot 2 + 6 \cdot 2) \cdot 4 + 2 \cdot 13 \cdot 6 = 308 \text{ cm}^2$
 c) $A = (12 \cdot 2 + 8 \cdot 2) \cdot 5 + 2 \cdot 12 \cdot 8 = 392 \text{ cm}^2$

11. Calcula el área de estas pirámides.



a) Calculamos el valor de la altura de las caras triangulares usando el teorema de Pitágoras:
 $a^2 = 12^2 + 4^2 = 160 \rightarrow a = 12,65 \text{ cm}$

$$A = 8^2 + \frac{(8 \cdot 4) \cdot 12,65}{2} = 266,40 \text{ cm}^2$$

b) $A = 6^2 + \frac{(6 \cdot 4) \cdot 6}{2} = 108 \text{ cm}^2$

c) Para calcular la apotema de la base y de este modo poder calcular la altura de las caras laterales, usamos el teorema de Pitágoras con el triángulo que se forma en el hexágono:

$$5^2 = 2,5^2 + ap^2 \rightarrow ap^2 = 18,75 \rightarrow ap = 4,33 \text{ cm}$$

Usando el teorema de Pitágoras de nuevo calculamos la altura de los triángulos laterales:

$$a^2 = 6^2 + 4,33^2 = 54,75 \rightarrow a = 7,40 \text{ cm}$$

$$A = 6 \cdot \frac{5 \cdot 4,33}{2} + \frac{(5 \cdot 6) \cdot 7,4}{2} = 175,95 \text{ cm}^2$$

12. Considera un prisma triangular recto de 8 cm de altura. Halla su área sabiendo que su base es:

- a) Un triángulo equilátero de 7 cm de lado.
 b) Un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 9 cm y el lado desigual mide 5 cm.

a) Calculamos la altura del triángulo de la base: $7^2 = 3,5^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 36,75 \rightarrow h = 6,06 \text{ cm}$

$$A = 2 \cdot \frac{7 \cdot 6,06}{2} + (7 \cdot 3) \cdot 8 = 210,42 \text{ cm}^2$$

b) Calculamos la altura del triángulo de la base: $9^2 = 2,5^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 74,75 \rightarrow h = 8,65 \text{ cm}$

$$A = 2 \cdot \frac{5 \cdot 8,65}{2} + (9 + 9 + 5) \cdot 8 = 227,25 \text{ cm}^2$$

13. Calcula el área de un prisma hexagonal regular de altura 14 cm, 250 cm² de área de la base y apotema de la base 8,5 cm.

Necesitamos saber el lado de la base para así poder calcular el área lateral.

Es un hexágono regular, su área, que es 250 cm², viene dada por $6 \cdot \frac{l \cdot 8,5}{2} = 25,5l = 250 \rightarrow l = 9,80 \text{ cm}$

De modo que el área del prisma será:

$$A = 2 \cdot 250 + (6 \cdot 9,8) \cdot 14 = 1\,323,2 \text{ cm}^2$$

14. Halla el área de una pirámide regular de altura 16 cm y cuya base es:

- a) Un cuadrado de área 27,04 cm².
- b) Un cuadrado de 52 cm de perímetro.

a) Si el área del cuadrado es 27,04 cm², su lado es $\sqrt{27,04} = 5,2$ cm.

Calculamos la altura de los triángulos laterales usando el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = 16^2 + 2,6^2 = 262,76 \rightarrow a = 16,21 \text{ cm}$$

$$A = 27,04 + \frac{(4 \cdot 5,2) \cdot 16,21}{2} = 195,62 \text{ cm}^2$$

b) Si el perímetro es 52 cm, el lado es $52/4 = 13$ cm.

Calculamos la altura de los triángulos laterales usando el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = 16^2 + 3,5^2 = 268,25 \rightarrow a = 16,38 \text{ cm}$$

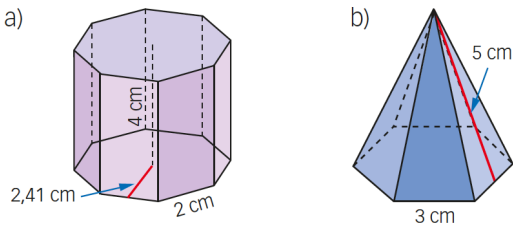
$$A = 13^2 + \frac{(4 \cdot 13) \cdot 16,38}{2} = 594,88 \text{ cm}^2$$

15. Calcula el área lateral de la pirámide regular de arista lateral 6 cm y cuya base es un triángulo equilátero de lado 4 cm.

Si la arista lateral es 6 cm, quiere decir que los triángulos laterales son triángulos isósceles de lados iguales 6 cm y lado desigual 4 cm. Calculamos su altura usando el teorema de Pitágoras:

$$6^2 = a^2 + 2^2 \rightarrow a^2 = 36 - 4 = 32 \rightarrow a = 5,66 \text{ cm} \rightarrow \text{El área lateral viene dada por } \frac{(3 \cdot 4) \cdot 5,66}{2} = 33,96 \text{ cm}^2.$$

16. Calcula el área total de estos cuerpos geométricos.

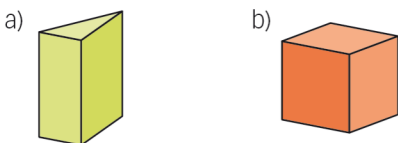


a) $A = 2 \cdot 8 \cdot \frac{2 \cdot 2,41}{2} + (8 \cdot 2) \cdot 4 = 102,56 \text{ cm}^2$

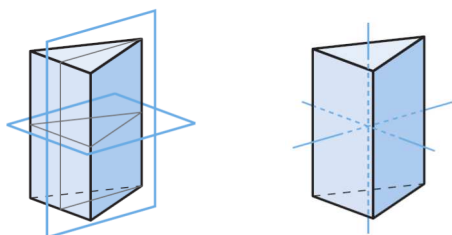
b) Calculamos la apotema de la base usando el teorema de Pitágoras ya que es un hexágono regular, el radio es igual al lado: $3^2 = ap^2 + 1,5^2 \rightarrow ap^2 = 6,75 \text{ cm}^2 \rightarrow ap = 2,60 \text{ cm}$.

$$A = 6 \cdot \frac{3 \cdot 2,6}{2} + \frac{(6 \cdot 3) \cdot 5}{2} = 68,4 \text{ cm}^2$$

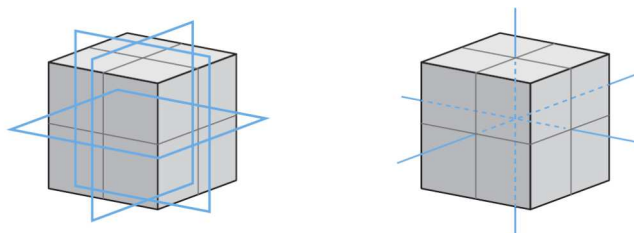
17. Dibuja en tu cuaderno 3 planos de simetría y 3 ejes de simetría de estas figuras.



a) Es un prisma cuyas bases son triángulos isósceles. No se pueden dibujar tres planos de simetría, solo tiene dos. En cambio, sí tiene 3 ejes de simetría.



b) El cubo tiene tres planos y tres ejes de simetría.



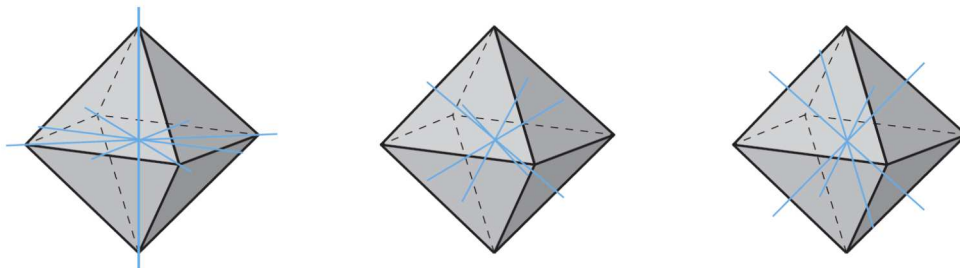
18. Determina todos los planos y ejes de simetría de un octaedro.

Tiene 13 ejes de simetría:

3 que unen dos vértices opuestos.

4 que unen los puntos medios de caras opuestas.

6 que unen los puntos medios de aristas opuestas.



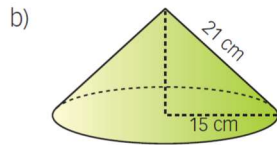
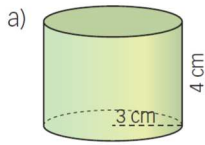
Teniendo en cuenta estos ejes de simetría, sus planos de simetría se trazan de modo análogo a los de un cubo, es decir, tendrá 9 planos de simetría.

19. En un poliedro, ¿todos los planos de simetría del poliedro contienen a uno de sus ejes de simetría?

El plano de simetría divide al poliedro en dos partes iguales. Es decir, si giramos el poliedro 180° con respecto al plano de simetría, obtenemos el mismo poliedro.

Por tanto, todos los planos de simetría contienen, al menos, a uno de sus ejes de simetría.

20. Calcula el área de estas figuras.



a) $A = 2\pi \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot \pi \cdot 3^2 = 131,95 \text{ cm}^2$

b) $A = \pi \cdot 15 (21 + 15) = 1\,696,46 \text{ cm}^2$

21. Halla el área del cono obtenido al girar el triángulo rectángulo de catetos 24 cm y 32 cm alrededor del cateto menor.

Al girar este triángulo alrededor del cateto menor, obtenemos un cono cuyo radio de la base es 32 cm y altura 24 cm. La generatriz la podemos calcular usando el teorema de Pitágoras:

$$g^2 = 24^2 + 32^2 = 1\,600 \rightarrow g = 40 \text{ cm}$$

Ahora calculamos el área:

$$A = \pi \cdot 32 (40 + 32) = 7\,238,23 \text{ cm}^2$$

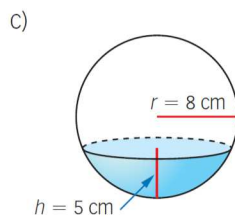
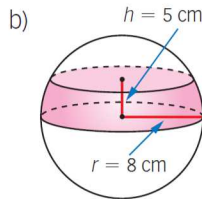
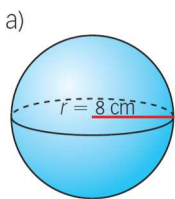
22. Un cono tiene la misma base que un cilindro y su área es la mitad. ¿Cuál tendrá mayor altura?

$$A_{\text{cilindro}} = 2\pi r (h + r) = 2 (\pi r (g + r)) = 2 A_{\text{cono}} \rightarrow h = g$$

La generatriz es la hipotenusa en un triángulo rectángulo que se forma con la altura del cono y el radio de la base, de modo que la generatriz es mayor que la altura del cono.

En este caso, tenemos que la altura del cilindro es igual a la generatriz del cono, que es mayor que la altura del cono, de modo que el cilindro tiene mayor altura.

23. Calcula el área de estas superficies esféricas.



a) $A = 4\pi \cdot 8^2 = 804,25 \text{ cm}^2$

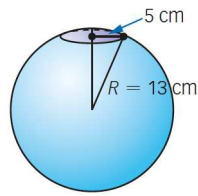
b) $A = 2\pi \cdot 8 \cdot 5 = 251,33 \text{ cm}^2$

c) $A = 2\pi \cdot 8 \cdot 5 = 251,33 \text{ cm}^2$

24. Queremos recubrir una esfera de 12 cm de diámetro con una placa de metal. ¿Qué superficie de placa de metal necesitamos?

$$A = 4\pi \cdot 6^2 = 452,39 \text{ cm}^2$$

25. ¿Cuál es el área del casquete esférico? ¿Qué pasa si la altura es igual al radio?



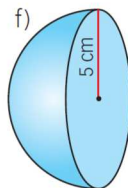
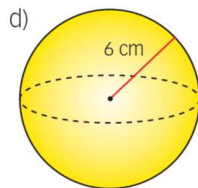
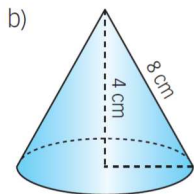
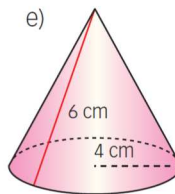
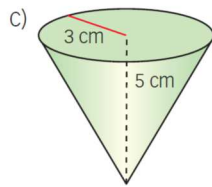
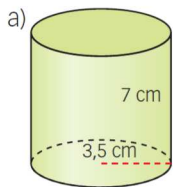
Calculamos la altura hasta el casquete usando el teorema de Pitágoras: $13^2 = h^2 + 5^2 \rightarrow h = 12$ cm

La altura del casquete es $13 - 12 = 1$ cm.

$$A = 2\pi \cdot 13 \cdot 1 = 81,68 \text{ cm}^2$$

Si la altura del casquete es igual al radio, tenemos una semiesfera.

26. Calcula el área de estos cuerpos de revolución.



a) $A = 2\pi \cdot 3,5 (7 + 3,5) = 230,91 \text{ cm}^2$

b) Calculamos el radio de la base usando el teorema de Pitágoras: $8^2 = 4^2 + r^2 \rightarrow r = 6,93$ cm

$$A = \pi \cdot 6,93 (8 + 6,93) = 325,04 \text{ cm}^2$$

c) Calculamos la generatriz usando el teorema de Pitágoras: $g^2 = 5^2 + 3^2 \rightarrow g = 5,83$ cm

$$A = \pi \cdot 3 (5,83 + 3) = 83,22 \text{ cm}^2$$

d) $A = 4\pi \cdot 6^2 = 452,39 \text{ cm}^2$

e) $A = \pi \cdot 4 (6 + 4) = 125,66 \text{ cm}^2$

f) $A = (4\pi \cdot 5^2)/2 = 157,08 \text{ cm}^2$

27. Calcula el radio de un cilindro de altura 10 cm sabiendo que su área total es 747,7 cm².

$$A = 2\pi \cdot r (10 + r) = 747,7 \rightarrow r^2 + 10r = 119 \rightarrow r^2 + 10r - 119 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado y descartamos la solución negativa. Por tanto, $r = 7$ cm.

28. Determina la generatriz de un cono de 12 cm de altura y área de la base 19,63 cm².

Sabemos el área de la base, calculamos su radio: $19,63 = \pi r^2 \rightarrow r = 2,50$ cm.

Para calcular la generatriz, usamos el teorema de Pitágoras: $g^2 = 12^2 + 2,5^2 \rightarrow g = 12,26$ cm.

29. Averigua la altura de un cono sabiendo que el área de la base es $18,1 \text{ cm}^2$ y el área lateral es $45,24 \text{ cm}^2$.

Sabemos el área de la base, calculamos su radio: $18,1 = \pi r^2 \rightarrow r = 2,40 \text{ cm}$

Sabemos el área lateral y el radio, podemos calcular la generatriz: $45,24 = \pi \cdot 2,4 \cdot g \rightarrow g = 6 \text{ cm}$

Con el radio y la generatriz, podemos calcular la altura usando el teorema de Pitágoras:

$$6^2 = h^2 + 2,4^2 \rightarrow h = 5,5 \text{ cm}$$

30. Considera un rectángulo de 4 cm de ancho y 12 cm de largo. Halla el área del cilindro que se genera al girar el rectángulo alrededor de estos elementos.

a) Su ancho

b) Su largo

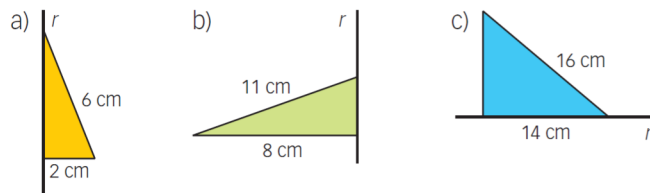
a) Si lo giramos alrededor de su ancho, tenemos un cilindro con una base de radio 12 cm y una altura 4 cm .

$$A = 2\pi \cdot 12 (4 + 12) = 1\,206,37 \text{ cm}^2$$

b) Si lo giramos alrededor de su largo, tenemos un cilindro con una base de radio 4 cm y una altura 12 cm .

$$A = 2\pi \cdot 4 (12 + 4) = 402,12 \text{ cm}^2$$

31. Halla el área de los conos que se obtienen al girar estos triángulos rectángulos alrededor de r :



a) $A = \pi \cdot 2 (6 + 2) = 50,27 \text{ cm}^2$

b) $A = \pi \cdot 8 (11 + 8) = 477,52 \text{ cm}^2$

c) Tenemos que calcular el radio de la base, usamos el teorema de Pitágoras: $16^2 = 14^2 + r^2 \rightarrow r = 7,75 \text{ cm}$.

$$A = \pi \cdot 7,75 (16 + 7,75) = 578,25 \text{ cm}^2$$

32. Halla el área de la esfera que se obtiene al hacer girar estos semicírculos.

a) 16 cm de diámetro

b) $\sqrt{7} \text{ cm}$ de radio

c) $5,09 \text{ cm}^2$ de área

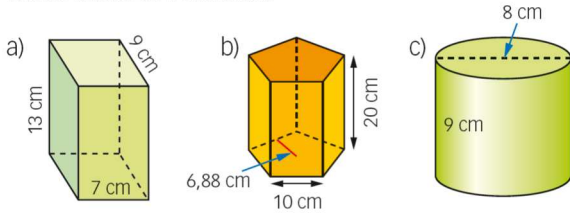
a) $A = 4\pi \cdot 8^2 = 804,25 \text{ cm}^2$

b) $A = 4\pi \cdot (\sqrt{7})^2 = 87,96 \text{ cm}^2$

c) Primero calculamos el radio: $5,09 = \frac{\pi r^2}{2} \rightarrow \pi r^2 = 10,19 \rightarrow r = 1,8 \text{ cm}$

El área de la esfera es: $A = 4\pi \cdot 1,8^2 = 40,72 \text{ cm}^2$

33. Determina el volumen.

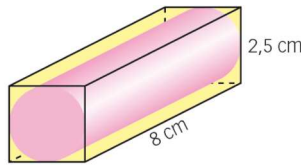


a) $V = 13 \cdot 7 \cdot 9 = 819 \text{ cm}^3$

b) $V = 5 \cdot \frac{10 \cdot 6,88}{2} \cdot 20 = 3\,440 \text{ cm}^3$

c) $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 9 = 452,39 \text{ cm}^3$

34. Halla el volumen del cilindro que está dentro del prisma.



El lado del cuadrado del prisma es igual al diámetro del cilindro, y la altura del prisma es igual a la altura del cilindro:

$$V = \pi \cdot 1,25^2 \cdot 8 = 39,27 \text{ cm}^3$$

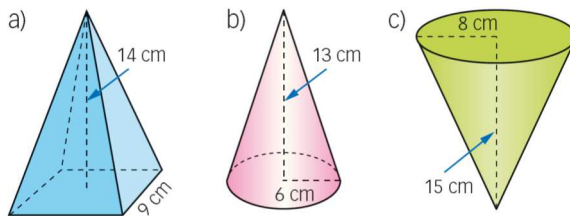
35. Tenemos dos cilindros, uno tiene la mitad de altura que el otro y el doble de radio. ¿Qué relación hay entre sus volúmenes?

$$V_1 = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_2 = \pi \cdot (2r)^2 \cdot (h/2) = \pi \cdot 4r^2 \cdot h/2 = 2\pi \cdot r^2 \cdot h$$

El cilindro cuya altura es la mitad y radio es el doble, tiene el doble de volumen que el inicial.

36. Determina el volumen.

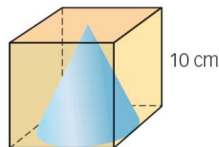


a) $\frac{1}{3} \cdot 9^2 \cdot 14 = 378 \text{ cm}^3$

b) $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 13 = 490,09 \text{ cm}^3$

c) $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot 15 = 1\,005,31 \text{ cm}^3$

37. Halla el volumen comprendido entre el cubo y el cono de la figura.



Volumen del cubo: $10^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$

Volumen del cono: $\frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 261,80 \text{ cm}^3$

El volumen comprendido entre ambos es $1\,000 - 261,80 = 738,2 \text{ cm}^3$.

38. Dado un cono de radio r y altura h , ¿cómo aumenta más su volumen: aumentando 1 cm el radio o al incrementar 1 cm la altura?

Veamos qué ocurre al aumentar el radio:

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot (r+1)^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h + \frac{1}{3} \pi \cdot (2r+1) \cdot h \rightarrow \text{Aumenta en } \frac{1}{3} \pi \cdot (2r+1) \cdot h \text{ cm}^3.$$

Veamos qué ocurre al aumentar la altura:

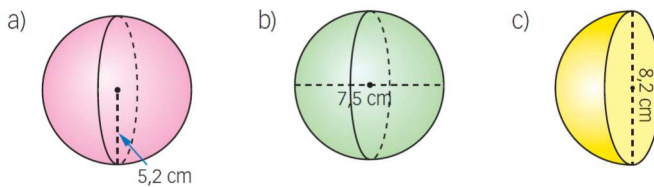
$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot (h+1) = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h + \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \rightarrow \text{Aumenta en } \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \text{ cm}^3.$$

Igualando los dos resultados anteriores: $\frac{1}{3} \pi (2r+1)h = \frac{1}{3} \pi r^2 \rightarrow h = \frac{r^2}{2r+1}$

El volumen al aumentar en 1 cm el radio será menor si $h < \frac{r^2}{2r+1}$.

El volumen al aumentar en 1 cm el radio será mayor si $h > \frac{r^2}{2r+1}$.

39. Halla el volumen de estas esferas.



a) $V = \frac{4}{3} \pi \cdot 5,2^3 = 588,98 \text{ cm}^3$

b) $V = \frac{4}{3} \pi \cdot 3,75^3 = 220,89 \text{ cm}^3$

c) $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 4,1^3 = 144,35 \text{ cm}^3$

40. Halla el radio de una esfera de $73,62 \text{ cm}^3$ de volumen.

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 = 73,62 \text{ cm}^3 \rightarrow r = 2,6 \text{ cm}$$

41. Si tenemos un cubo y una esfera y el área de cada uno de ellos es de 216 cm^2 , averigua cuál de los dos (el cubo o la esfera) tiene mayor volumen.

Veamos qué ocurre con el cubo:

Si el área del cubo es 216 cm^2 , quiere decir que el área de cada cara es $216/6 = 36 \text{ cm}^2$, por lo que el lado mide 6 cm.

El volumen del cubo sería $6^3 = 216 \text{ cm}^3$.

Veamos qué ocurre con la esfera:

Si el área de la esfera es $216 \text{ cm}^2 = 4\pi \cdot r^2 \rightarrow r = 4,15 \text{ cm}$.

De modo que el volumen sería $V = \frac{4}{3} \pi \cdot 4,15^3 = 299,39 \text{ cm}^3$.

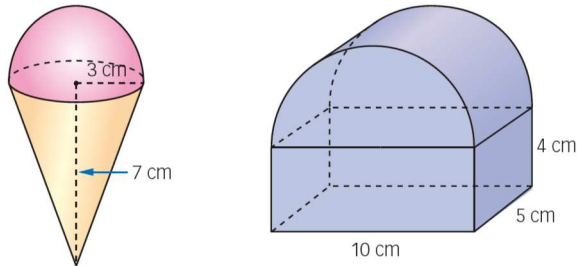
Por tanto, tiene mayor volumen la esfera.

42. Calcula el volumen de un prisma pentagonal regular de 17 cm de altura, 9 cm de arista básica y 6,2 cm de apotema básica.

$$\text{El área de la base es } 5 \cdot \frac{9 \cdot 6,2}{2} = 139,5 \text{ cm}^2.$$

$$\text{De modo que el volumen del prisma es } V = 17 \cdot 139,5 = 2\,371,5 \text{ cm}^3.$$

43. Calcula el volumen de las siguientes figuras geométricas.



En la primera figura sumamos el volumen del cono al volumen de la semiesfera:

$$V = \frac{1}{3} (\pi \cdot 3^2 \cdot 7) + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 3^3 = 122,53 \text{ cm}^3$$

El volumen de la segunda figura es la suma de un prisma de base rectangular más medio cilindro:

$$V = 10 \cdot 5 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 5 = 396,35 \text{ cm}^3$$

44. Calcula el volumen de un cilindro de 15 cm de altura y 433,54 cm² de área lateral.

Si el área lateral es 433,54 cm², quiere decir que $2\pi r \cdot h = 433,54$. Como la altura es 15 cm:

$$r = 433,54 : (2\pi \cdot 15) = 4,60 \text{ cm} \rightarrow V = \pi \cdot 4,6^2 \cdot 15 = 997,14 \text{ cm}^3$$

45. Calcula el volumen de una pirámide hexagonal regular de altura 17 cm y arista básica de 10 cm.

Como la base es un hexágono regular, podemos calcular su apotema con el teorema de Pitágoras, ya que el radio es igual al lado:

$$10^2 = ap^2 + 5^2 \rightarrow ap = 8,66 \text{ cm}$$

$$V = \frac{6 \cdot 10 \cdot 8,66}{2} \cdot 17 = 4416,6 \text{ cm}^3$$

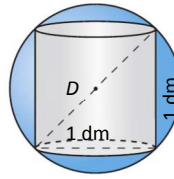
46. Calcula el volumen de un cono de 37,7 cm de longitud de la circunferencia de la base y altura igual a dos tercios del radio de la base.

Primero calculamos el radio de la base: $2\pi r = 37,7 \text{ cm} \rightarrow r = 6 \text{ cm}$.

La altura será $\frac{2}{3}$ de 6 cm, es decir, 4 cm.

$$V = \frac{1}{3} (\pi \cdot 6^2 \cdot 4) = 150,80 \text{ cm}^3$$

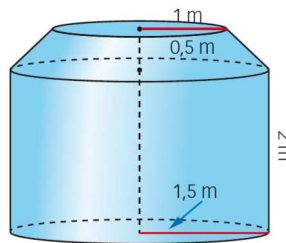
47. Calcula el volumen de una esfera que circunscribe a un cilindro de 1 dm de altura y 1 dm de diámetro de la base.



Calculamos el diámetro de la esfera usando el teorema de Pitágoras: $D^2 = 1^2 + 1^2 \rightarrow D = 1,41 \text{ dm} \rightarrow R = 0,705 \text{ dm}$

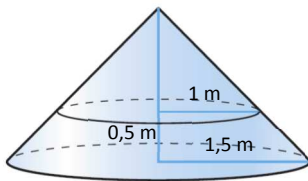
$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot 0,705^3 = 1,47 \text{ dm}^3$$

48. Calcula el coste de la arena que contiene este almacén si está completamente lleno y el metro cúbico de arena cuesta 18 €.



$$V_{\text{Figura}} = V_{\text{Cilindro}} + V_{\text{Tronco de cono}}$$

$$V_{\text{Cilindro}} = \pi \cdot 1,5^2 \cdot 2 = 14,14 \text{ m}^3$$



H = altura del cono grande

h = altura del cono pequeño

Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{h+0,5}{1,5} = \frac{h}{1} \rightarrow h+0,5 = 1,5h \rightarrow h = 1 \rightarrow H = 1,5$$

$$V_{\text{Tronco de cono}} = V_{\text{Cono grande}} - V_{\text{Cono pequeño}} = \frac{1,5^3 \pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2,49 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{Figura}} = 14,14 + 2,49 = 16,63 \text{ m}^3$$

Así, el coste de la arena es $18 \cdot 16,63 = 299,34 \text{ €}$.

49. Encuentra en Internet la latitud y la longitud de estas ciudades.

- | | |
|------------------|-----------------|
| a) Johannesburgo | d) Nueva York |
| b) Tokio | e) Buenos Aires |
| c) Londres | f) Quito |

- | | |
|---|---|
| a) $26^\circ 8' 42'' \text{ S}, 28^\circ 3' 1'' \text{ E}$ | d) $40^\circ 40' 12'' \text{ N}, 73^\circ 56' 24'' \text{ O}$ |
| b) $35^\circ 41' 2'' \text{ N}, 139^\circ 46' 28'' \text{ E}$ | e) $34^\circ 35' 59'' \text{ S}, 58^\circ 22' 55'' \text{ O}$ |
| c) $51^\circ 30' 26'' \text{ N}, 0^\circ 7' 39'' \text{ O}$ | f) $0^\circ 13' 7'' \text{ S}, 78^\circ 30' 35'' \text{ O}$ |

50. ¿Qué longitud y latitud separan estos puntos situados sobre la esfera terrestre?

$$A(34^\circ \text{ E}, 25^\circ \text{ N}) \quad B(50^\circ \text{ O}, 46^\circ \text{ S}) \quad C(167^\circ \text{ E}, 72^\circ \text{ S})$$

Diferencia entre A y B: longitud 84° y latitud 71°

Diferencia entre A y C: longitud 133° y latitud 97°

Diferencia entre B y C: longitud 217° y latitud 26°

51. ¿Qué diferencia horaria hay entre dos puntos si la diferencia entre sus longitudes es 90° ?

Cada franja horaria son 15° , es decir, si la diferencia de longitud es 90° se recorren $90 : 15 = 6$ franjas horarias, de modo que la diferencia es de 6 horas.

52. Calcula la diferencia horaria que corresponde a estas cantidades que indican la diferencia en grados entre las longitudes de dos puntos de la esfera terrestre.

- a) $5,8^\circ$ c) $38,52^\circ$ e) $123,2^\circ$
 b) $12,4^\circ$ d) $55,752^\circ$ f) 164°

a) $5,8 : 15 = 0,38\bar{6}$ h = 23 min 12 s

d) $55,752 : 15 = 3,7168$ h = 3 h 43 min 0,48 s

b) $12,4 : 15 = 0,82\bar{6}$ h = 49 min 36 s

e) $123,2 : 15 = 8,21\bar{3}$ = 8 h 12 min 48 s

c) $38,52 : 15 = 2,568$ h = 2 h 34 min 4,8 s

f) $164 : 15 = 10,9\bar{3}$ = 10 h 56 min

53. Las coordenadas de la ciudad A son $40^\circ \text{ E } 30^\circ \text{ N}$ y las de la ciudad B, $60^\circ \text{ O } 25^\circ \text{ S}$.
 ¿Cuál es la diferencia horaria entre estas dos ciudades?

La diferencia de longitud entre las ciudades es de 100° , de modo que la diferencia horaria será:

$$100 : 15 = 6,6\bar{6} \text{ h} \rightarrow 6 \text{ h } 40 \text{ min}$$

54. ¿Qué diferencia horaria hay entre Tarragona, con coordenadas geográficas $1^\circ 15' \text{ E } 41^\circ 7' \text{ N}$, y Cáceres, con coordenadas $6^\circ 23' \text{ O } 39^\circ 28' \text{ N}$?



La diferencia de longitud es $7^\circ 38' = 7,6\bar{3}$ °, de modo que la diferencia horaria será:

$$7,6\bar{3} : 15 = 0,50\bar{8}$$
 h = 30 min 32 s

55. Sabiendo que Fornells (isla de Menorca) tiene una longitud de $4^\circ 7' \text{ E}$, ¿qué diferencia horaria tiene con Madrid, cuya longitud es $3^\circ 41' \text{ O}$?

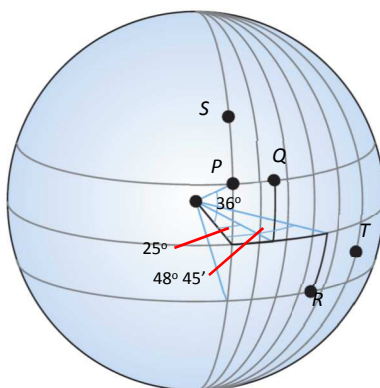
La diferencia de longitud es $7^\circ 48' = 7,8^\circ$, de modo que la diferencia horaria será: $7,8 : 15 = 0,52$ h = 31 min 12 s

56. Si la longitud de Madrid es de $3^{\circ} 41' O$:

- a) ¿Qué diferencia horaria tiene con Tarragona?
 b) ¿Y con Almería, cuya longitud es $2^{\circ} 26' O$?
 c) ¿Con qué ciudades no tiene Madrid diferencia horaria?
- a) La longitud de Tarragona es $1^{\circ} 15' E$, de modo que la diferencia de longitud con Madrid es $4^{\circ} 56' = 4,9\overline{3}^{\circ}$.
 Por lo tanto, la diferencia horaria será: $4,9\overline{3} : 15 = 0,32\overline{8} h = 19 \text{ min } 44 \text{ s}$.
- b) En este caso la diferencia de longitud es $1^{\circ} 15' = 1,25^{\circ}$, por lo tanto, la diferencia horaria será:
 $1,25 : 15 = 0,08\overline{3} h = 5 \text{ min}$
- c) Madrid no tiene diferencia horaria con ciudades que tengan su misma longitud, es decir, $3^{\circ} 41' O$, tomando cualquier latitud en ese meridiano.

57. Señala en un mapa un punto P de latitud $36^{\circ} N$.

- a) Halla un punto Q de igual latitud y una diferencia horaria de 1 hora y 40 minutos con respecto a P .
 b) Marca sobre el mapa un punto R con la misma latitud pero sur y con una diferencia horaria de 3 horas y cuarto con respecto a P .
 c) Determina un punto S con distinta latitud pero sin diferencia horaria con respecto a P .
 d) Señala otro punto T con distinta latitud y con diferencia horaria de 5 horas con respecto a P .



- a) Si la diferencia horaria es de $1 \text{ h } 40 \text{ min} = 1,6\overline{6} h$, quiere decir que la diferencia de longitud es
 $1,6\overline{6} \cdot 15 = 25^{\circ}$
- b) Si la diferencia horaria es de $3 \text{ h } 15 \text{ min} = 3,25 h$, quiere decir que la diferencia de longitud es
 $3,25 \cdot 15 = 48,75^{\circ} = 48^{\circ} 45'$
- c) Tiene que tener la misma longitud que P .
- d) La latitud puede ser la que queramos, pero al tener una diferencia horaria de 5 horas, tendrá que tener una longitud que difiera de la de P en $5 \cdot 15 = 75^{\circ}$.

ACTIVIDADES FINALES**58. Contesta a estas cuestiones.**

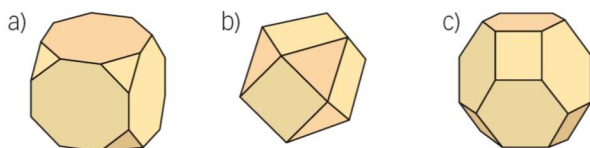
- a) ¿Cuál es el número de aristas de un pentaedro que tiene 6 vértices?
 b) ¿Cuál es el número de vértices de un pentaedro si tiene 8 aristas?
 c) ¿Cuál es el número de aristas de un heptaedro que tiene 7 vértices?
 d) ¿Cuál es el número de vértices de un heptaedro si tiene 15 aristas?

- a) Un pentaedro tiene 5 caras. Si es convexo verifica la fórmula de Euler, de modo que tendrá $5 + 6 = 2 + A \rightarrow A = 9$ aristas.
- b) Un pentaedro tiene 5 caras. Si es convexo verifica la fórmula de Euler, de modo que tendrá $5 + V = 2 + 8 \rightarrow V = 5$ vértices.
- c) Un heptaedro tiene 7 caras. Si es convexo verifica la fórmula de Euler, de modo que tendrá $7 + 7 = 2 + A \rightarrow A = 12$ aristas.
- d) Un heptaedro tiene 7 caras. Si es convexo verifica la fórmula de Euler, de modo que tendrá $7 + V = 2 + 15 \rightarrow V = 10$ vértices.

59. Calcula el número que falta en cada caso.

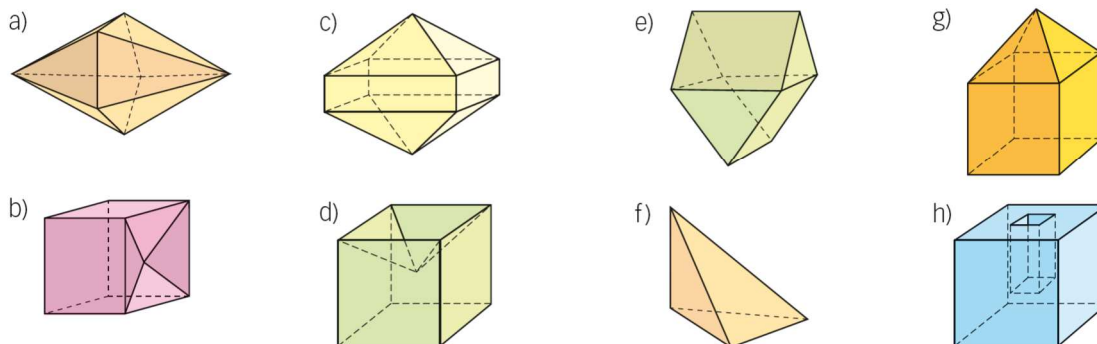
Caras	Aristas	Vértices
6	12	8
6	10	6
8	20	14
10	18	10

60. Los siguientes poliedros, ¿son regulares? Razónalo.



Ninguno de los tres es regular, pues en un poliedro regular las caras son polígonos regulares iguales, y en estos casos, aunque las caras regulares, en los tres hay polígonos regulares diferentes.

61. Comprueba si estos poliedros cumplen la fórmula de Euler.



La fórmula de Euler: $n.º$ de caras + $n.º$ de vértices = $2 + n.º$ de aristas

- a) $10 + 7 = 2 + 15$. Se cumple.
- b) $9 + 9 = 2 + 16$. Se cumple.
- c) $12 + 10 = 2 + 20$. Se cumple.
- d) $9 + 9 = 2 + 16$. Se cumple.
- e) $8 + 8 = 2 + 14$. Se cumple.
- f) $4 + 4 = 2 + 6$. Se cumple.
- g) $9 + 9 = 2 + 16$. Se cumple.
- h) $11 + 16 \neq 2 + 24$. No se cumple.

62. Di cuál es la base de estos prismas que tienen el número de elementos indicado.

- a) 9 caras c) 20 vértices e) 21 aristas
 b) 18 aristas d) 10 vértices f) 18 caras

- a) 9 caras \rightarrow 2 de las caras son las bases, quedan 7 caras que son las laterales, es un prisma heptagonal.
 b) 18 aristas \rightarrow Hay tantas aristas en cada base como aristas laterales, $18 : 3 = 6$, es un prisma hexagonal.
 c) 20 vértices \rightarrow Los vértices que hay en un prisma son los de sus bases, de modo que como hay dos bases, $20 : 2 = 10$, es un prisma decagonal.
 d) Es un prisma pentagonal.
 e) Es un prisma heptagonal.
 f) Es un prisma de base un polígono de 16 lados.

63. ¿Qué polígono es la base de estas pirámides?

- a) 7 vértices d) 9 vértices
 b) 20 aristas e) 18 aristas
 c) 8 caras f) 10 caras

- a) La pirámide tiene tantos vértices como la base más uno:
 $7 - 1 = 6$. Es una pirámide de base hexagonal.
 b) La pirámide tiene tantas aristas básicas como laterales:
 $20 : 2 = 10$. Es una pirámide de base un decágono.
 c) La pirámide tiene tantas caras como vértices:
 $8 - 1 = 7$. Es una pirámide de base heptagonal.
 d) Es una pirámide de base un octógono.
 e) Es una pirámide de base un eneágono.
 f) Es una pirámide de base un eneágono.

65. Halla la apotema de una pirámide regular de base cuadrada de altura 7 cm y arista básica 9 cm.

La apotema de la pirámide forma un triángulo rectángulo con la altura y un segmento que va desde el centro de la base al lado. En este caso, al ser la base cuadrada es la mitad de su lado, es decir, 4,5 cm.

$$ap^2 = 7^2 + 4,5^2 \rightarrow ap = 8,32 \text{ cm}$$

66. Halla la altura de estas pirámides regulares.

- a) Pirámide hexagonal de apotema 10 cm y arista básica 10 cm.
 b) Pirámide pentagonal de apotema 9 cm y arista básica 4,13 cm.

a) Como la base es un hexágono, podemos calcular la apotema de la base, que nos hace falta para calcular la altura: $ap^2 + 5^2 = 10^2 \rightarrow ap = 8,66 \text{ cm}$

Ahora calculamos la altura, que forma un triángulo rectángulo con la apotema de la pirámide y la de la base, de modo que usando el teorema de Pitágoras: $10^2 = h^2 + 8,66^2 \rightarrow h = 5 \text{ cm}$.

b) La altura forma un triángulo rectángulo con las dos apotemas, usando el teorema de Pitágoras:

$$9^2 = 4,13^2 + h^2 \rightarrow h = 8 \text{ cm}$$

67. Calcula la diagonal de un ortoedro de dimensiones:

- a) $8 \times 5 \times 4$ cm b) $10 \times 7 \times 3$ cm

a) Calculamos la diagonal de la base: $d^2 = 8^2 + 5^2 \rightarrow d = 9,43$ cm

Calculamos la diagonal del ortoedro: $D^2 = 9,43^2 + 4^2 \rightarrow D = 10,24$ cm

b) Calculamos la diagonal de la base: $d^2 = 10^2 + 7^2 \rightarrow d = 12,21$ cm

Calculamos la diagonal del ortoedro: $D^2 = 12,21^2 + 3^2 \rightarrow D = 12,57$ cm

68. La diagonal de un cubo mide $\sqrt{27}$ cm. Obtén la medida de la arista y de la diagonal de una de sus caras.

l = longitud de la arista

d = longitud de la diagonal de una cara

D = longitud de la diagonal del cubo

Por el teorema de Pitágoras, aplicado en una de las caras: $d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow d^2 = 2l^2 \rightarrow d = l\sqrt{2}$

De nuevo, por el teorema de Pitágoras: $(\sqrt{27})^2 = l^2 + (l\sqrt{2})^2 \rightarrow 27 = 3l^2 \rightarrow l = 3$ cm

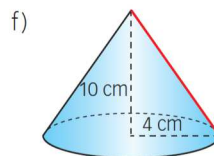
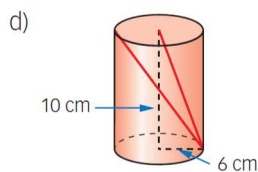
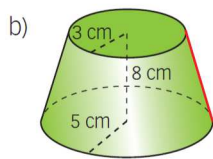
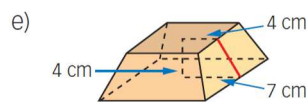
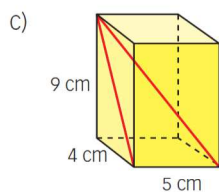
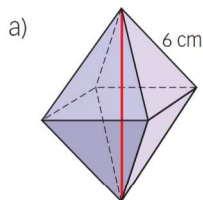
Por tanto, $d = l\sqrt{2} \xrightarrow{l=3} d = 3\sqrt{2}$ cm

69. Halla la diagonal de un prisma cuadrangular regular de 9 cm de arista básica y 12 cm de altura.

Calculamos la diagonal de la base: $d^2 = 9^2 + 9^2 \rightarrow d = 12,73$ cm.

La diagonal del prisma es: $D^2 = 12^2 + 12,73^2 \rightarrow D = 17,49$ cm.

70. Halla la medida de los segmentos marcados.



a) Los triángulos laterales son equiláteros, de modo que el lado del cuadrado medirá 6 cm.

Calculamos la diagonal del cuadrado: $d^2 = 6^2 + 6^2 \rightarrow d = 8,49$ cm. Su mitad es 4,245 cm.

La mitad de la altura del poliedro viene dada por $6^2 = h^2 + 4,245^2 \rightarrow h = 4,24$ cm.

Por tanto, la línea roja mide 8,48 cm.

b) La línea roja es la generatriz del tronco de cono. Si desde la circunferencia más pequeña trazamos una paralela a la altura se nos forman dos figuras, un rectángulo de base 3 cm y altura 8 cm, y un triángulo rectángulo de catetos 8 cm y 2 cm e hipotenusa la generatriz del tronco de cono.

$$g^2 = 8^2 + 2^2 \rightarrow g = 8,25 \text{ cm}$$

c) Calculamos primero diagonal de la cara: $d^2 = 9^2 + 4^2 \rightarrow d = 9,85$ cm.

Calculamos ahora la diagonal de la base, pues nos hace falta para calcular la diagonal del ortoedro:

$$d'^2 = 5^2 + 4^2 \rightarrow d' = 6,40$$
 cm.

$$D^2 = 6,4^2 + 9^2 \rightarrow D = 11,04$$
 cm

d) La línea roja que va al centro de la base mide: $d^2 = 10^2 + 6^2 \rightarrow d = 11,66$ cm

La línea roja que cruza el cilindro mide: $D^2 = 10^2 + 12^2 \rightarrow D = 15,62$ cm

e) $ap^2 = 4^2 + 3^2 \rightarrow ap = 5$ cm

f) $g^2 = 10^2 + 4^2 \rightarrow g = 10,77$ cm

71. Halla el área de estos poliedros regulares.

- a) Tetraedro de arista 12 cm
- b) Octaedro de arista 10 cm
- c) Icosaedro de arista 8 cm
- d) Cubo de arista 7 cm
- e) Dodecaedro de arista 6 cm y apotema de cada pentágono 4,13 cm

a) Es el área de 4 triángulos equiláteros de lado 12 cm.

Calculamos la altura de las caras: $12^2 = h^2 + 6^2 \rightarrow h = 10,39$ cm.

$$A = 4 \cdot \frac{12 \cdot 10,39}{2} = 249,36 \text{ cm}^2$$

b) Es el área de 8 triángulos equiláteros de lado 10 cm.

Calculamos la altura de las caras: $10^2 = h^2 + 5^2 \rightarrow h = 8,66$ cm.

$$A = 8 \cdot \frac{10 \cdot 8,66}{2} = 346,4 \text{ cm}^2$$

c) Es el área de 20 triángulos equiláteros de lado 8 cm.

Calculamos la altura de las caras: $8^2 = h^2 + 4^2 \rightarrow h = 6,93$ cm.

$$A = 20 \cdot \frac{8 \cdot 6,93}{2} = 554,4 \text{ cm}^2$$

d) Es el área de 6 cuadrados de lado 7 cm.

$$A = 6 \cdot 7^2 = 294 \text{ cm}^2$$

e) El área de 12 pentágonos de lado 6 cm y apotema 4,13 cm.

$$A = 12 \cdot 5 \cdot \frac{6 \cdot 4,13}{2} = 743,4 \text{ cm}^2$$

72. Halla el área total de un prisma triangular regular de 4 cm de altura y 2 cm de arista básica.

Calculamos la altura de los triángulos de las bases, y con ella, el área:

$$2^2 = h^2 + 1^2 \rightarrow h = 1,73 \text{ cm} \rightarrow A = 2 \cdot \frac{2 \cdot 1,73}{2} + (3 \cdot 2) \cdot 4 = 27,46 \text{ cm}^2$$

73. Calcula el área total de un prisma recto cuya altura es de 12 cm y las bases son:

- a) Trapecios isósceles de bases 6 y 10 cm, y lado oblicuo 3 cm.
 b) Trapecios rectángulos de base mayor 21,38 cm, altura 9 cm y diagonal menor 15 cm.

a) Calculamos la altura del trapecio:

$$\frac{10-6}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad 3^2 = h^2 + 2^2 \rightarrow h = 2,24 \text{ cm}$$

$$A = 2 \cdot \frac{(6+10) \cdot 2,24}{2} + (10 + 6 + 2 \cdot 3) \cdot 12 = 299,84 \text{ cm}^2$$

b) Podemos calcular la base menor con la diagonal menor y la altura: $15^2 = 9^2 + b^2 \rightarrow b = 12 \text{ cm}$

Ahora calculamos el lado oblicuo, que nos hace falta para saber el perímetro:

$$l^2 = 9^2 + (21,38 - 12)^2 \rightarrow l = 13 \text{ cm}$$

$$A = 2 \cdot \frac{(21,38 + 12) \cdot 9}{2} + (21,38 + 9 + 12 + 13) \cdot 12 = 964,98 \text{ cm}^2$$

74. Halla el área total de estos poliedros.

- a) Un ortoedro cuyas aristas miden 3, 4 y 5 cm.
 b) Un prisma hexagonal regular de 8 cm de altura y 5 cm de arista básica.

a) $A = 2 \cdot (3 \cdot 4) + (2 \cdot 3 + 2 \cdot 4) \cdot 5 = 94 \text{ cm}^2$

b) Calculamos la apotema de la base: $5^2 = 2,5^2 + ap^2 \rightarrow ap = 4,33 \text{ cm}$.

$$A = 2 \cdot 6 \cdot \frac{5 \cdot 4,33}{2} + (6 \cdot 5) \cdot 8 = 369,9 \text{ cm}^2$$

75. Calcula la arista de estos cuerpos.

- a) Un tetraedro de área total $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
 b) Un icosaedro cuyas caras miden $\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
 c) Un octaedro de área total $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

a) Calculamos primero la altura de las caras, y después obtenemos la arista a partir del área:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} l \text{ cm.} \qquad A = 4 \cdot \frac{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l}{2} = 16\sqrt{3} \rightarrow l^2 = 16 \rightarrow l = 4 \text{ cm}$$

Es un tetraedro con una arista de 4 cm.

b) Calculamos primero la altura de las caras, y después obtenemos la arista a partir del área:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} l \text{ cm.} \qquad A = 20 \cdot \frac{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l}{2} = \sqrt{3} \rightarrow 5l^2 = 1 \rightarrow l = 0,45 \text{ cm}$$

Es un icosaedro con una arista de 0,45 cm.

c) Calculamos primero la altura de las caras, y después obtenemos la arista a partir del área:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} l \text{ cm.} \qquad A = 8 \cdot \frac{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l}{2} = 18\sqrt{3} \rightarrow 2l^2 = 18 \rightarrow l = 3 \text{ cm}$$

Es un octaedro con una arista de 3 cm.

76. Calcula la medida de la arista de un cubo sabiendo que su área total es 486 cm².

Es el área de 6 cuadrados de lado l , de modo que $6l^2 = 486 \rightarrow l = 9$ cm.

Es un cubo con una arista de 9 cm.

77. Halla la arista de un tetraedro regular sabiendo que su área total es 80,09 cm².

Es el área de 4 triángulos equiláteros. Calculamos la altura: $l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$ cm.

$$A = 4 \cdot \frac{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l}{2} = 80,09 \rightarrow l = 6,80 \text{ cm} \rightarrow \text{Es un tetraedro con una arista de 6,80 cm.}$$

78. Calcula el área total de estas pirámides regulares.

Base	Arista lateral	Apotema	Arista básica	Apotema básica
Pentágono	17 cm		10 cm	6,88 cm
Pentágono		23,32 cm	18 cm	12,39 cm
Hexágono	4,24 cm		3 cm	
Hexágono		15 cm	5 cm	
Triángulo	6 cm		4 cm	
Triángulo		6,54 cm	5 cm	

- Calculamos la apotema de la pirámide teniendo en cuenta el triángulo rectángulo que forma con la arista lateral y la mitad de la arista básica: $17^2 = ap^2 + 5^2 \rightarrow ap^2 = 264 \rightarrow ap = 16,25$ cm.

$$A = 5 \cdot \frac{10 \cdot 6,88}{2} + \frac{50 \cdot 16,25}{2} = 578,25 \text{ cm}^2$$

- $A = 5 \cdot \frac{18 \cdot 12,39}{2} + \frac{90 \cdot 23,32}{2} = 1\,606,95 \text{ cm}^2$

- Calculamos la apotema básica: $3^2 = a^2 + 1,5^2 \rightarrow a = 2,60$ cm.

Calculamos la apotema de la pirámide: $4,24^2 = ap^2 + 1,5^2 \rightarrow ap = 3,97$ cm.

$$A = 6 \cdot \frac{3 \cdot 2,6}{2} + \frac{18 \cdot 3,97}{2} = 59,13 \text{ cm}^2$$

- Calculamos la apotema básica: $5^2 = a^2 + 2,5^2 \rightarrow a = 4,33$ cm.

$$A = 6 \cdot \frac{5 \cdot 4,33}{2} + \frac{30 \cdot 15}{2} = 289,95 \text{ cm}^2$$

- Calculamos la altura del triángulo de la base: $4^2 = h^2 + 2^2 \rightarrow h = 3,46$ cm.

Calculamos la apotema: $6^2 = ap^2 + 2^2 \rightarrow ap = 5,66$ cm.

$$A = \frac{4 \cdot 3,46}{2} + \frac{12 \cdot 5,66}{2} = 40,88 \text{ cm}^2$$

- Calculamos la altura del triángulo de la base: $5^2 = h^2 + 2,5^2 \rightarrow h = 4,33$ cm.

$$A = \frac{5 \cdot 4,33}{2} + \frac{15 \cdot 6,54}{2} = 59,88 \text{ cm}^2$$

79. Si el área lateral de una pirámide recta de base cuadrada es 80 cm^2 , y el perímetro de la base es 32 cm , ¿cuál es la medida de la apotema de la pirámide?

$$A_{\text{Lateral}} = \frac{32a}{2} = 80 \rightarrow a = 5 \text{ cm}$$

80. Halla el área total de los siguientes cilindros.

- a) Radio de la base: 8 cm ; altura: 14 cm
 b) Longitud de la circunferencia que limita las bases: $37,7 \text{ cm}$; altura: 9 cm
 c) Altura: 12 cm ; área de una base: $78,54 \text{ cm}^2$

a) $A = 2\pi \cdot 8 \cdot (14 + 8) = 1\,105,84 \text{ cm}^2$

- b) Si la longitud de la circunferencia es $37,7 \text{ cm}$, quiere decir que $2\pi r = 37,7 \rightarrow r = 6,00 \text{ cm}$.

$$A = 2\pi \cdot 6 \cdot (9 + 6) = 565,49 \text{ cm}^2$$

- c) Necesitamos saber el radio para poder calcular el área lateral, lo obtenemos con el área de la base:

$$\pi r^2 = 78,54 \rightarrow r = 5,00 \text{ cm} \quad A = 2\pi \cdot 5 \cdot (12 + 5) = 534,07 \text{ cm}^2$$

81. Calcula el área total de los siguientes conos.

- a) Generatriz: 5 cm ; radio de la base: 4 cm
 b) Altura: 12 cm ; radio de la base: 9 cm
 c) Longitud de la circunferencia que limita la base: 44 cm ; generatriz: 10 cm

a) $A = \pi \cdot 4 \cdot (5 + 4) = 113,10 \text{ cm}$

b) Calculamos la generatriz: $g^2 = 12^2 + 9^2 \rightarrow g = 15 \text{ cm}$. $A = \pi \cdot 9 \cdot (15 + 9) = 678,58 \text{ cm}$

c) Calculamos el radio: $44 = 2\pi r \rightarrow r = 7,00 \text{ cm}$. $A = \pi \cdot 7 \cdot (10 + 7) = 373,85 \text{ cm}$

82. Considera un cilindro de altura 20 cm y radio de la base 4 cm . ¿Qué altura tendrá un cono en cada uno de estos supuestos?

- a) Cono con la misma base que el cilindro.
 b) Cono con una base de 8 cm de radio.
 c) Cono con una base de área doble que la base del cilindro.

Suponemos que el cilindro y el cono tienen áreas iguales:

Calculamos el área del cilindro: $A = 2\pi \cdot 4 (20 + 4) = 603,18 \text{ cm}^2$.

a) $A = \pi \cdot 4 \cdot (g + 4) = 603,18 \text{ cm} \rightarrow g = 44 \text{ cm}$

La altura del cono será: $44^2 = h^2 + 4^2 \rightarrow h = 43,82 \text{ cm}$.

b) $A = \pi \cdot 8 \cdot (g + 8) = 603,18 \text{ cm} \rightarrow g = 16 \text{ cm}$

La altura del cono será: $16^2 = h^2 + 8^2 \rightarrow h = 15,49 \text{ cm}$.

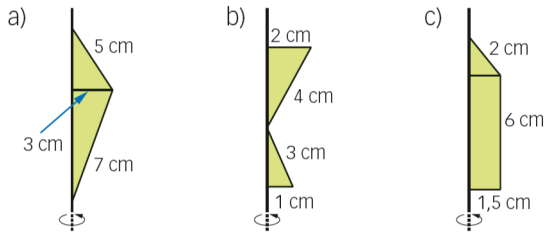
- c) El área de la base del cilindro es $\pi \cdot 4^2 = 50,27 \text{ cm}^2$. Así:

$$A_{\text{Base cono}} = 100,54 \text{ cm}^2 \rightarrow \pi r^2 = 100,54 \rightarrow r = 5,66 \text{ cm}$$

$$A = \pi \cdot 5,66 \cdot (g + 5,66) = 603,18 \text{ cm} \rightarrow g = 28,26 \text{ cm}$$

La altura del cono será: $28,26^2 = h^2 + 5,66^2 \rightarrow h = 27,69 \text{ cm}$.

83. Halla el área total de los cuerpos de revolución que se obtienen al girar las siguientes figuras planas alrededor del eje que se indica.



- a) Es la suma del área lateral de dos conos: $A = \pi \cdot 3 \cdot 5 + \pi \cdot 3 \cdot 7 = 113,10 \text{ cm}^2$.
- b) Es la suma del área total de dos conos: $A = \pi \cdot 2 \cdot (4 + 2) + \pi \cdot 1 \cdot (3 + 1) = 50,27 \text{ cm}^2$.
- c) Es la suma del área lateral de un cono y el área lateral de un cilindro más el área de una de sus bases:
 $A = \pi \cdot 1,5 \cdot 2 + 2\pi \cdot 1,5 \cdot 6 + \pi \cdot 1,5^2 = 73,04 \text{ cm}^2$

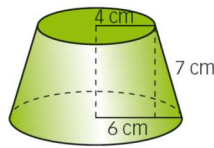
84. Halla el área de estos cuerpos geométricos.

- a) Una esfera de 15 cm diámetro
- b) Una esfera de 7,8 cm de radio

a) $A = 4\pi \cdot 7,5^2 = 706,86 \text{ cm}^2$

b) $A = 4\pi \cdot 7,8^2 = 764,54 \text{ cm}^2$

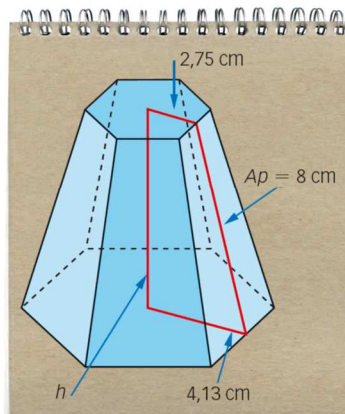
86. Obtén la altura del tronco de cono que ves en la figura.



Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que se forma con la generatriz del tronco de cono:

$$7^2 = h^2 + (6 - 4)^2 \rightarrow h = 6,71 \text{ cm}$$

87. Calcula la altura del tronco de pirámide hexagonal regular que dibuja María en su cuaderno.



Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que se forma con la apotema:

$$8^2 = h^2 + (4,13 - 2,75)^2 \rightarrow h = 7,88 \text{ cm}$$

88. Calcula la altura de un tronco de pirámide cuadrangular de aristas básicas 5 y 3 cm, y apotema del tronco 2,9 cm y de un tronco de cono de radios 5 y 3 cm y generatriz 2,9 cm.

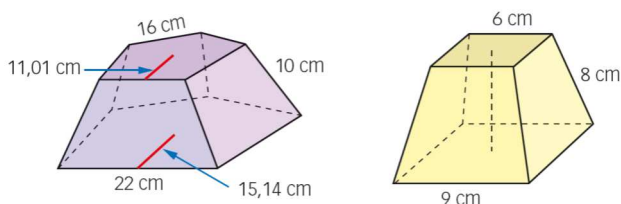
En el caso del tronco de pirámide, aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que se forma con la apotema:

$$2,9^2 = h^2 + (2,5 - 1,5)^2 \rightarrow h = 2,72 \text{ cm}$$

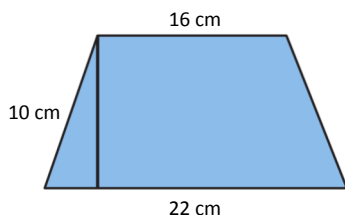
En el caso del tronco de cono, aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que se forma con la generatriz:

$$2,9^2 = h^2 + (5 - 3)^2 \rightarrow h = 2,1 \text{ cm}$$

90. Calcula el área total de estas figuras.



La primera figura es un tronco de pirámide pentagonal. De las caras laterales conocemos lo que miden las bases y lo que mide el lado oblicuo, necesitamos calcular lo que mide la altura. Para ello usamos el teorema de Pitágoras:



$$10^2 = h^2 + \left(\frac{22-16}{2}\right)^2 \rightarrow h = 9,54 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Lateral}} = 5 \cdot \frac{(22+16) \cdot 9,54}{2} = 906,3 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Base mayor}} = \frac{(22 \cdot 5) \cdot 15,14}{2} = 832,7 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Base menor}} = \frac{(16 \cdot 5) \cdot 11,01}{2} = 440,4 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Total}} = 906,3 + 832,7 + 440,4 = 2\,179,4 \text{ cm}^2.$$

La segunda figura es un tronco de pirámide cuadrangular. De las caras laterales conocemos lo que miden las bases y lo que mide el lado oblicuo, necesitamos calcular lo que mide la altura. Para ello usamos el teorema de Pitágoras:

$$8^2 = h^2 + \left(\frac{9-6}{2}\right)^2 \rightarrow h = 7,86 \text{ cm}$$

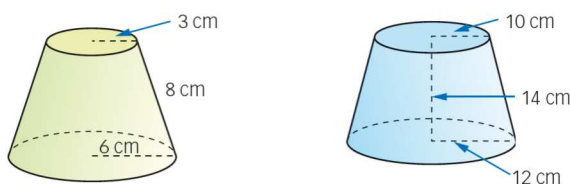
$$A_{\text{Lateral}} = 4 \cdot \frac{(9+6) \cdot 7,86}{2} = 235,8 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Base mayor}} = 9^2 = 81 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Base menor}} = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Total}} = 235,8 + 81 + 36 = 352,8 \text{ cm}^2.$$

91. Calcula el área total de estas figuras.



El área lateral de un tronco de cono viene dada por $A_L = \pi \cdot (R + r) \cdot g$

Para el primer tronco de cono:

$$A_T = \pi \cdot (6 + 3) \cdot 8 + \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 3^2 = 367,57 \text{ cm}^2$$

Para el segundo tronco de cono:

Tenemos que calcular la generatriz usando el teorema de Pitágoras: $g^2 = 14^2 + (12 - 10)^2 \rightarrow g = 14,14 \text{ cm}$

$$A_T = \pi \cdot (12 + 10) \cdot 14,14 + \pi \cdot 12^2 + \pi \cdot 10^2 = 1\,743,84 \text{ cm}^2$$

92. Sabiendo que el círculo máximo de una esfera tiene un área de 201,06 cm², calcula.

- a) Su radio.
- b) Su área total.
- c) El área de un huso esférico de 40°.
- d) El área de un casquete esférico de 3 cm de altura.

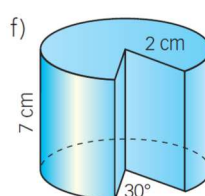
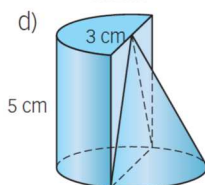
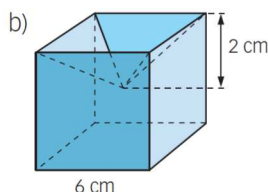
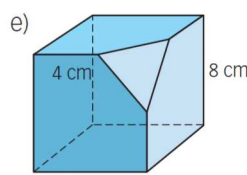
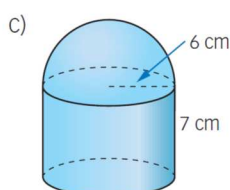
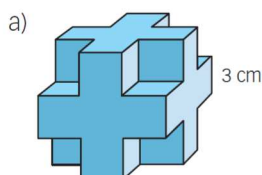
a) $\pi r^2 = 201,06 \rightarrow r = 8 \text{ cm}$

c) $A_{\text{huso}} = \frac{4\pi \cdot 8^2 \cdot 40}{360} = 89,36 \text{ cm}^2$

b) $A = 4\pi \cdot 8^2 = 804,25 \text{ cm}^2$

d) $A_{\text{casquete}} = 2\pi \cdot 8 \cdot 3 = 150,80 \text{ cm}^2$

93. Obtén el área total de los siguientes cuerpos geométricos.



a) El área de la figura es equivalente a la de un cubo de lado 9 cm. Así:

$$A = 9^2 \cdot 6 = 486 \text{ cm}^2.$$

b) Tenemos el área de 5 cuadrados de lado 6 más 4 triángulos de base 6 y de los que necesitamos calcular la altura (que sería la apotema de la pirámide invertida que se mete en el cubo).

Para calcular la altura de los triángulos usamos el teorema de Pitágoras: $h^2 = 3^2 + 2^2 \rightarrow h = 3,60 \text{ cm}$.

De modo que el área total es $A = 5 \cdot 6^2 + 4 \cdot \frac{6 \cdot 3,6}{2} = 223,2 \text{ cm}^2$.

c) Es el área de un cilindro de altura 7 cm y radio 6 cm con solo una base, más el área de una semiesfera de radio 6 cm.

$$A = 2\pi \cdot 6 \cdot 7 + \pi \cdot 6^2 + 2\pi \cdot 6^2 = 603,19 \text{ cm}^2$$

d) Es el área de medio cilindro de altura 5 cm y radio 1,5 cm, más el área de medio cono de altura 5 cm y radio 1,5 cm más el área de dos triángulos rectángulos de base 1,5 cm y altura 5 cm.

Calculamos primero la generatriz del cono para poder calcular su área: $g^2 = 5^2 + 1,5^2 \rightarrow g = 5,22 \text{ cm}$.

$$A = \pi \cdot 1,5 \cdot (1,5 + 5) + \frac{1}{2} \pi \cdot 1,5 \cdot (1,5 + 5,22) + 2 \cdot \frac{1,5 \cdot 5}{2} = 30,63 + 15,83 + 7,5 = 53,96 \text{ cm}^2$$

e) Es el área de 6 cuadrados de lado 8 cm, en 3 de esos cuadrados restamos el área de un triángulo rectángulo de base 4 cm y altura 4 cm y añadimos al área total de la figura el área de un triángulo equilátero.

Calculamos primero el lado y la altura del triángulo equilátero:

$$l^2 = 4^2 + 4^2 \rightarrow l = 5,66 \text{ cm} \quad 5,66^2 = h^2 + \left(\frac{5,66}{2}\right)^2 \rightarrow h = 4,90 \text{ cm}$$

$$A = 6 \cdot 8^2 - 3 \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} + \frac{5,66 \cdot 4,90}{2} = 384 - 24 + 13,87 = 373,87 \text{ cm}^2$$

f) Es el área de dos sectores circulares de radio 2 cm y ángulo 330° , más el área de dos rectángulos de base 2 cm y altura 7 cm más el área de un rectángulo de altura 7 cm y cuya base es un arco de radio 2 cm y ángulo 330° .

$$A = 2\pi \cdot 2^2 \cdot \frac{330}{360} + 2 \cdot 2 \cdot 7 + 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{330}{360} \cdot 7 = 23,04 + 28 + 80,63 = 131,67 \text{ cm}^2$$

94. Calcula el volumen de un prisma triangular regular de 7 cm de altura y 3 cm de arista básica.

Calculamos la altura del triángulo de la base usando el teorema de Pitágoras: $3^2 = h^2 + 1,5^2 \rightarrow h = 2,60 \text{ cm}$

$$V = \frac{3 \cdot 2,6}{2} \cdot 7 = 27,3 \text{ cm}^3$$

95. Halla el volumen de un ortoedro cuyas aristas miden 4, 6 y 12 cm.

$$V = 4 \cdot 6 \cdot 12 = 288 \text{ cm}^3$$

96. Calcula el volumen de un prisma hexagonal regular de 8 cm de altura y 4 cm de arista básica.

Calculamos la apotema de la base: $4^2 = ap^2 + 2^2 \rightarrow ap = 3,46 \text{ cm}$.

$$V = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3,46}{2} \cdot 8 = 332,16 \text{ cm}^3$$

97. Calcula el volumen de estas pirámides regulares de base triangular:

a) Arista lateral: 8 cm; arista básica: 7 cm.

b) Apotema de la pirámide: 6,54 cm; arista básica: 5 cm.

a) Calculamos la altura de la base: $7^2 = h^2 + 3,5^2 \rightarrow h = 6,06 \text{ cm}$.

Calculamos la apotema de la base, sabiendo que mide la tercera parte de su altura: $a = \frac{1}{3} \cdot 6,06 = 2,02 \text{ cm}$

Calculamos la apotema de la pirámide: $8^2 = ap^2 + 3,5^2 \rightarrow ap = 7,19 \text{ cm}$.

Calculamos la altura de la pirámide: $7,19^2 = 2,02^2 + H^2 \rightarrow H = 6,9 \text{ cm}$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{7 \cdot 6,06}{2} \cdot 6,9 = 48,78 \text{ cm}^3$$

b) Calculamos la altura de la base: $5^2 = h^2 + 2,5^2 \rightarrow h = 4,33 \text{ cm}$.

Calculamos la apotema de la base, sabiendo que mide la tercera parte de su altura: $a = \frac{1}{3} \cdot 4,33 = 1,44 \text{ cm}$

Calculamos la altura de la pirámide: $6,54^2 = 1,44^2 + H^2 \rightarrow H = 6,38 \text{ cm}$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 4,33}{2} \cdot 6,38 = 23,02 \text{ cm}^3$$

98. Un tetraedro regular es una pirámide de base triangular donde todas sus caras son iguales. Calcula el volumen de esta pirámide si su superficie total es de 40 m^2 .

Esto quiere decir que el área de cada cara es de 10 m^2 .

Calculamos la altura de cada cara en función del lado, que coincide con la apotema de la pirámide:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} l.$$

Como el área es 10 m^2 , tenemos que $10 = \frac{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l}{2} \rightarrow l = 4,81 \text{ m}, h = 4,17 \text{ m}$

Calculamos la apotema de la base, sabiendo que mide la tercera parte de su altura: $a = \frac{1}{3} \cdot 4,17 = 1,39 \text{ cm}$

La altura de la pirámide viene dada por $4,17^2 = H^2 + 1,39^2 \rightarrow H = 3,93 \text{ m}$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 3,93 = 13,1 \text{ m}^3$$

99. Obtén el volumen de estas pirámides hexagonales regulares.

a) Apotema: 8 cm; arista básica: 5 cm.

b) Arista lateral: 6 cm; arista básica: 3 cm.

a) Calculamos la apotema de la base y luego la altura de la pirámide usando el teorema de Pitágoras:

$$5^2 = ap^2 + 2,5^2 \rightarrow ap = 4,33 \text{ cm}$$

$$8^2 = h^2 + 4,33^2 \rightarrow h = 6,73 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(6 \cdot 5) \cdot 4,33}{2} \cdot 6,73 = 145,70 \text{ cm}^3$$

b) Calculamos la apotema de la base y luego la altura de la pirámide usando el teorema de Pitágoras:

$$3^2 = ap^2 + 1,5^2 \rightarrow ap = 2,60 \text{ cm}$$

$$6^2 = h^2 + 3^2 \rightarrow h = 5,20 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(6 \cdot 3) \cdot 2,60}{2} \cdot 5,20 = 40,56 \text{ cm}^3$$

100. Halla el volumen de los siguientes cilindros.

a) Radio de la base: 4 cm; altura: 10 cm.

b) Longitud de la circunferencia que limita las bases: $37,7 \text{ cm}$; altura: 12 cm.

$$a) V = \pi \cdot 4^2 \cdot 10 = 502,65 \text{ cm}^3$$

b) Calculamos el radio de la circunferencia: $2\pi r = 37,7 \rightarrow r = 6,00 \text{ cm}$.

$$V = \pi \cdot 6^2 \cdot 12 = 1\,357,17 \text{ cm}^3$$

101. Halla el volumen de los siguientes conos.

a) Generatriz: 8 cm; radio de la base: 5 cm.

b) Altura: 18 cm; radio de la base: 8 cm.

c) Longitud de la circunferencia que limita la base: 44 cm ; generatriz: 11 cm.

a) Calculamos la altura del cono: $8^2 = h^2 + 5^2 \rightarrow h = 6,24$ cm.

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 6,24 = 163,36 \text{ cm}^3$$

b) $V = \frac{1}{3} \pi \cdot 8^2 \cdot 18 = 1\,206,37 \text{ cm}^3$

c) Calculamos el radio de la circunferencia: $44 = 2\pi r \rightarrow r = 7,00$ cm.

Calculamos la altura: $11^2 = h^2 + 7^2 \rightarrow h = 8,49$ cm.

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 7^2 \cdot 8,49 = 435,64 \text{ cm}^3$$

102. Halla el volumen de un cubo sabiendo que:

a) La diagonal de una de sus caras mide 9,9 cm.

b) La diagonal del cubo mide 8,66 cm.

a) Calculamos el lado: $9,9^2 = l^2 + l^2 \rightarrow l = 7,00$ cm. $\rightarrow V = 7^3 = 343 \text{ cm}^3$

b) La diagonal del cubo viene dada por $D^2 = d^2 + l^2$. Y podemos expresar d en función de l como $d = \sqrt{2} l$, de modo que $D^2 = 2l^2 + l^2$. Así $8,66^2 = 3l^2 \rightarrow l = 5,00$ cm $\rightarrow V = 5^3 = 125 \text{ cm}^3$

103. Halla el volumen de un tetraedro que tiene la característica indicada.

a) Su arista es 8 cm.

b) La apotema es 8 cm.

a) Calculamos la altura de la base, que es igual a la apotema de la pirámide: $8^2 = ap^2 + 4^2 \rightarrow ap = 6,93$ cm.

Calculamos la altura de la pirámide: $6,93^2 = h^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot 6,93\right)^2 \rightarrow h = 6,53$ cm.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{8 \cdot 6,93}{2} \cdot 6,53 = 60,34 \text{ cm}^3$$

b) Calculamos su arista: $a^2 = 8^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow a = 9,24$ cm.

Calculamos la altura de la pirámide: $8^2 = h^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot 8\right)^2 \rightarrow h = 7,54$ cm.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{9,24 \cdot 8}{2} \cdot 7,54 = 92,89 \text{ cm}^3$$

104. Calcula el volumen de las siguientes esferas.

a) Esfera de radio 6 cm.

b) Esfera de diámetro 20 cm.

c) Esfera cuyo círculo máximo contiene un área de 78,54 cm².

$$\text{a) } V = \frac{4}{3} \pi \cdot 6^3 = 904,78 \text{ cm}^3$$

$$\text{b) } V = \frac{4}{3} \pi \cdot 10^3 = 4\,188,79 \text{ cm}^3$$

$$\text{c) } 78,54 = \pi \cdot r^2 \rightarrow r = 5,00 \text{ cm. } \rightarrow V = \frac{4}{3} \pi \cdot 5^3 = 523,60 \text{ cm}^3$$

105. El área de una esfera es $452,39 \text{ cm}^2$. Halla el volumen de estos cuerpos y responde cuál es el mayor de ellos.

- a) El cilindro en el que estaría contenida ajustándose completamente a él.
 b) El cubo que la circunscribe.

a) La altura del cilindro se correspondería con el diámetro de la esfera y el radio de la base con el radio de la esfera.

Calculamos el radio de la esfera, ya que conocemos su área:

$$452,39 = 4\pi r^2 \rightarrow r = 6 \text{ cm} \rightarrow d = 12 \text{ cm}$$

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 6^2 \cdot 12 = 1\,357,17 \text{ cm}^3$$

b) El cubo tiene un lado igual al diámetro de la esfera, de modo que el volumen del cubo es:

$$V = 12^3 = 1\,728 \text{ cm}^3$$

106. Sabiendo que un cubo y una esfera tienen igual área, 96 cm^2 , ¿cuál de los dos tiene mayor volumen?

Veamos cuál es el radio de la esfera: $96 = 4\pi r^2 \rightarrow r = 2,76 \text{ cm}$.

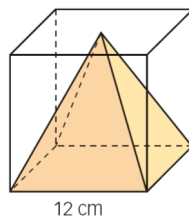
Por lo tanto, el volumen de la esfera será: $V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3} \pi \cdot 2,76^3 = 88,07 \text{ cm}^3$.

Veamos cuál es el lado del cubo: $96 = 6 \cdot l^2 \rightarrow l = 4 \text{ cm}$.

Por lo tanto, el volumen del cubo será: $V_{\text{Cubo}} = 4^3 = 64 \text{ cm}^3$.

Es mayor el volumen de la esfera.

107. En el interior de un cubo de 12 cm de arista construimos una pirámide cuya base es una cara del cubo y el vértice es el centro de la cara opuesta. Calcula el área y el volumen de esta pirámide.



La altura de la pirámide es igual al lado del cubo. El área de la base es el área de un cuadrado de 12 cm de lado, de modo que el volumen es:

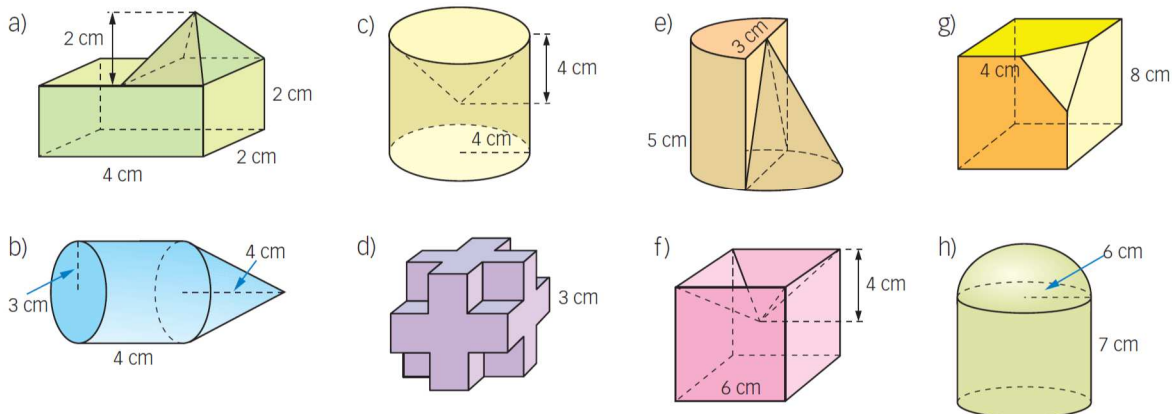
$$V = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 12 = 576 \text{ cm}^3$$

Para calcular el área necesitamos saber la apotema de la pirámide, que calculamos usando el teorema de Pitágoras:

$$ap^2 = 12^2 + 6^2 \rightarrow ap = 13,42 \text{ cm}$$

$$A = 12^2 + 4 \cdot \frac{12 \cdot 13,42}{2} = 466,08 \text{ cm}^2$$

108. Obtén el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.



a) Es el volumen de un ortoedro de aristas 4 cm, 2 cm y 2 cm, más una pirámide de base cuadrada de lado 2 cm y altura 2 cm.

$$V = 4 \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 2 = 18,67 \text{ cm}^3$$

b) Es el volumen de un cilindro de radio de la base 3 cm y altura 4 cm, más un cono de radio de la base 3 cm y altura 4 cm.

$$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 150,80 \text{ cm}^3$$

c) Es el volumen de un cilindro de radio de la base 4 cm y altura 8 cm, menos un cono de radio de la base 4 cm y altura 4 cm.

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 4 = 335,10 \text{ cm}^3$$

d) Es el volumen de un cubo de arista 9 cm, menos el volumen de 8 cubos de arista 3 cm.

$$V = 9^3 - 8 \cdot 3^3 = 513 \text{ cm}^3$$

e) Es el volumen de medio cilindro de radio de la base 1,5 cm y altura 5 cm, más el volumen de medio cono de radio de la base 1,5 cm y altura 5 cm.

$$V = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1,5^2 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1,5^2 \cdot 5 = 23,56 \text{ cm}^3$$

f) Es el volumen de un cubo de arista 6 cm, menos el de una pirámide de base un cuadrado de lado 6 cm y altura 4 cm.

$$V = 6^3 - \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 = 168 \text{ cm}^3$$

g) Es el volumen de un cubo de arista 8 cm, menos el volumen de una pirámide cuya base es un triángulo equilátero.

Calculamos primero el lado y la altura del triángulo equilátero:

$$l^2 = 4^2 + 4^2 \rightarrow l = 5,66 \text{ cm} \quad 5,66^2 = h^2 + \left(\frac{5,66}{2}\right)^2 \rightarrow h = 4,9 \text{ cm}$$

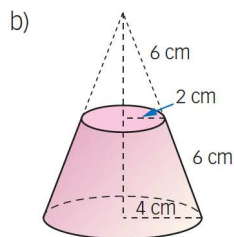
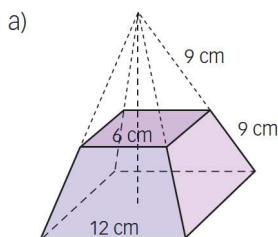
$$\text{Calculamos la altura de la pirámide: } 4^2 = H^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot 4,9\right)^2 \rightarrow H = 2,3 \text{ cm}$$

$$V = 8^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{5,66 \cdot 4,9}{2} \cdot 2,3 = 501,37 \text{ cm}^3$$

h) Es el volumen de un cilindro de radio de la base 6 cm y altura 7 cm, más el de una semiesfera de radio 6 cm.

$$V = \pi \cdot 6^2 \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 = 1\,244,07 \text{ cm}^3$$

109. Calcula el volumen de estas figuras.



- a) Es el volumen de una pirámide de base cuadrada de lado 12 cm y altura H , menos el volumen de una pirámide de base cuadrada de lado 6 cm y altura h .

Calculamos la apotema de la pirámide mayor: $18^2 = ap^2 + 6^2 \rightarrow ap = 16,97$ cm.

Calculamos la apotema de la pirámide menor: $9^2 = ap'^2 + 3^2 \rightarrow ap' = 8,48$ cm.

Calculamos la altura de la pirámide mayor: $16,97^2 = H^2 + 6^2 \rightarrow H = 15,87$ cm.

Calculamos la altura de la pirámide menor: $8,48^2 = h^2 + 3^2 \rightarrow h = 7,93$ cm.

$$V = 12^2 \cdot 15,87 - 6^2 \cdot 7,93 = 1\,999,8 \text{ cm}^3$$

- b) Es el volumen de un cono de radio de la base 4 cm y altura H , menos el volumen de un cono de radio de la base 2 cm y altura h .

Calculamos la altura del cono mayor: $12^2 = H^2 + 4^2 \rightarrow H = 11,31$ cm.

Calculamos la altura del cono menor: $6^2 = h^2 + 2^2 \rightarrow h = 5,66$ cm.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 11,31 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 5,66 = 165,79 \text{ cm}^3$$

110. Las coordenadas terrestres, longitud y latitud, se expresan en grados.

- a) ¿Cuáles son los límites de estos valores?
b) ¿Dónde está situado el origen?

a) La longitud varía entre 0° y 180° y la latitud entre 0° y 90° .

b) Para la longitud en el meridiano de Greenwich y para la latitud en el ecuador.

111. Observa un mapa y calcula los valores máximo y mínimo de la longitud y la latitud de tu provincia y tu Comunidad Autónoma.

Respuesta abierta.

112. El radio de la Tierra mide, aproximadamente, 6 371 kilómetros. Calcula el área de su superficie y el volumen de la Tierra.

Considerando la Tierra como una esfera:

$$A = 4\pi \cdot 6\,371^2 = 510\,064\,471,91 \text{ km}^2$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6\,371^3 = 1,08 \cdot 10^{12} \text{ km}^3.$$

113. Responde razonadamente.

- a) ¿Cuánto mide aproximadamente un meridiano?
 b) ¿Cuántos grados abarca cada huso horario?
 c) ¿Cuál es el área de un huso horario?
 d) ¿Hay un meridiano que pasa por cada punto de la Tierra?

a) $2\pi \cdot 6371 = 40\,030,17 \text{ km}$ c) $A = \frac{4 \cdot \pi \cdot 6371^2 \cdot 15}{360} = 2,13 \cdot 10^7 \text{ km}^2$
 b) $360^\circ : 24 = 15^\circ$ d) Sí, el que indica su longitud.

114. Si Moscú está a $37^\circ 36' \text{ E}$, ¿qué diferencia horaria tiene con Venecia, que está a $12^\circ 20' \text{ E}$?

La longitud de Moscú es $37^\circ 36' = 37,6^\circ \text{ E}$, y la de Venecia $12^\circ 20' = 12,33^\circ \text{ E}$, la diferencia de longitud entre las ciudades es $37,6^\circ - 12,33^\circ = 25,27^\circ$.

De modo que la diferencia horaria es $25,27 : 15 = 1,68 = 1 \text{ h } 41 \text{ min } 4,8 \text{ s}$.

115. Halla la diferencia horaria que hay entre Madrid y Nueva York sabiendo que las coordenadas de ambas ciudades son:

Madrid: $40^\circ 18' \text{ N}$, $3^\circ 43' \text{ O}$

Nueva York: $40^\circ 45' \text{ N}$, 74° O

Vemos cuál es la diferencia entre sus longitudes: $74^\circ - 3^\circ 43' = 74^\circ - 3,72^\circ = 70,28^\circ$

De modo que la diferencia horaria es $70,28 : 15 = 4,69 \text{ h} = 4 \text{ h } 41 \text{ min } 24 \text{ s}$.

116. La longitud de Viena es de $16^\circ 20' \text{ E}$.

- a) Cuando en Viena son las 3 de la tarde, ¿qué hora es en una ciudad 40° al oeste?
 b) ¿Y en una ciudad 70° al este?
 c) ¿Qué longitud tiene una ciudad en la que amanece 3 horas después que en Viena?
 d) ¿Y si amanece 3 horas antes?

a) La diferencia de longitud con una ciudad 40° al oeste es de $56^\circ 20' = 56,33^\circ$, de modo que la diferencia horaria es $56,33 : 15 = 3,76 \text{ h} = 3 \text{ h } 45 \text{ min } 36 \text{ s}$.

Como nos desplazamos al oeste, restamos la diferencia horaria, de modo que en la ciudad serán las $15 - 3 \text{ h } 45 \text{ min } 36 \text{ s} = 11 \text{ h } 14 \text{ min } 24 \text{ s}$, es decir, aproximadamente las 11 y cuarto de la mañana.

b) La diferencia de longitud con una ciudad 70° al este es de $53,67^\circ$, de modo que la diferencia horaria es $53,67 : 15 = 3,58 \text{ h} = 3 \text{ h } 34 \text{ min } 48 \text{ s}$.

Como nos desplazamos al este, aumentamos la diferencia horaria, de modo que en la ciudad serán aproximadamente las 6 y media de la tarde.

c) Si amanece tres horas después, quiere decir que está al oeste de Viena. Si la diferencia son 3 horas, quiere decir que la diferencia de longitud es $3 \cdot 15 = 45^\circ$ al oeste de Viena.

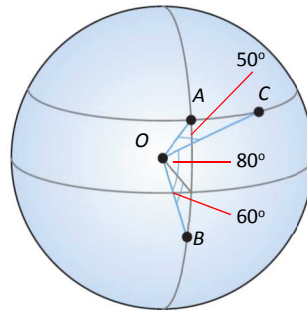
Como Viena está al este, si x es la longitud de la ciudad: $x + 16^\circ 20' = 45^\circ \rightarrow x = 28^\circ 40' \text{ O}$.

d) Si amanece tres horas antes, quiere decir que está al este de Viena. Si la diferencia son 3 horas, quiere decir que la diferencia de longitud es $3 \cdot 15 = 45^\circ$ al este de Viena.

Como Viena está al este, si x es la longitud de la ciudad: $x - 16^\circ 20' = 45^\circ \rightarrow x = 61^\circ 20' \text{ E}$.

117. Considera tres ciudades, *A*, *B* y *C*: *A* y *B* se encuentran en el mismo meridiano pero distintos hemisferios y sus latitudes se diferencian en 80° ; *C* se encuentra en el hemisferio norte en el mismo paralelo que *A* y distanciada de esta 50° . Dibuja una esfera y sitúa estas tres ciudades sabiendo que la latitud de *B* es 60° S.

- ¿Puedes deducir las coordenadas de las tres ciudades?
- Encuentra las posibles coordenadas de *A*, *B* y *C* sabiendo que *C* está en un meridiano que se distancia 65° del meridiano cero.
- ¿Qué falta para determinar definitivamente las coordenadas de esas ciudades?



a) Como las latitudes de *A* y *B* difieren en 80° y están situadas en hemisferios diferentes, entonces la latitud de *A* es 20° N. Al estar *C* en el mismo paralelo que *A*, la latitud de *C* es 20° N.

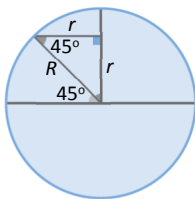
No podemos calcular las longitudes porque no tenemos datos suficientes.

b) Si *C* dista 65° del meridiano cero, su longitud puede ser 65° E o 65° O. Sabemos que *A* dista 50° de *C*, de modo que su longitud (y por tanto también la de *B* ya que están en el mismo meridiano) puede ser alguna de las siguientes:

$$115^\circ \text{ E} \quad 15^\circ \text{ E} \quad 115^\circ \text{ O} \quad 15^\circ \text{ O}$$

c) Es necesario conocer si *C* está al este o al oeste del meridiano cero y si *A* está al este o al oeste de *C*.

118. ¿Cuál es la longitud del paralelo situado a 45° N de latitud? ¿Y el situado a 45° S?



$R = 6\,371$ km es el radio de la Tierra.

El triángulo formado es un triángulo rectángulo isósceles, es decir, los catetos son iguales. Llamando *r* al radio del paralelo:

$$R^2 = r^2 + r^2 \rightarrow R^2 = 2r^2 \rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2} R \xrightarrow{R=6371} r = 4\,504,98 \text{ km}$$

Los paralelos situados a 45° N y 45° S son simétricos con respecto al ecuador y tienen la misma longitud:

$$L = 2\pi r = 2\pi \cdot 4\,504,98 = 28\,305,61 \text{ km}$$

119. En cierta fábrica de conservas alimenticias utilizan latas con forma cilíndrica. Su proveedor le ofrece estas posibilidades, siendo $0,02 \text{ €/cm}^2$ el precio del material con que se elaboran las latas.

Tipo de lata	Radio de la base	Altura
A	12	3
B	10	5
C	6	12

¿Qué tipo de lata se debe emplear para envasar la máxima cantidad posible con el menor precio?

$$A_{\text{Lata A}} = 2\pi \cdot 12(12 + 3) = 1\,130,97 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{Precio} = 1\,130,97 \cdot 0,02 = 22,62 \text{ €}$$

$$V = \pi \cdot 12^2 \cdot 3 = 1\,357,17 \text{ cm}^3$$

$$\text{Precio de } 1 \text{ cm}^3 = 22,62 : 1\,357,17 = 0,016667 \text{ €/cm}^3$$

$$A_{\text{Lata B}} = 2\pi \cdot 10(10 + 5) = 942,48 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{Precio} = 942,48 \cdot 0,02 = 18,85 \text{ €}$$

$$V = \pi \cdot 10^2 \cdot 5 = 1\,570,80 \text{ cm}^3$$

$$\text{Precio de } 1 \text{ cm}^3 = 18,85 : 1\,570,80 = 0,01200 \text{ €/cm}^3$$

$$A_{\text{Lata C}} = 2\pi \cdot 6(6 + 12) = 678,58 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{Precio} = 678,58 \cdot 0,02 = 13,57 \text{ €}$$

$$V = \pi \cdot 6^2 \cdot 12 = 1\,357,17 \text{ cm}^3$$

$$\text{Precio de } 1 \text{ cm}^3 = 13,57 : 1\,357,17 = 0,009999 \text{ €/cm}^3$$

Lo más rentable es hacer latas de tipo C.

- 120. Averigua si los siguientes listones de madera caben en una caja de 40 cm de largo, 25 cm de ancho y 18 cm de alto.**

a) 46,5 cm b) 50,3 cm c) 50,6 cm d) 51 cm

¿Cuáles se pueden apoyar en el fondo de la caja?

La mayor longitud de la caja es su diagonal, de modo que cabrán todos los listones que midan menos. Calculamos la diagonal de la base para poder calcular la de la caja:

$$d^2 = 40^2 + 25^2 \rightarrow d = 47,17 \text{ cm}$$

(En la base de la caja se puede poner el listón de 46,5 cm, de modo que ese cabe en la caja)

Calculamos ahora la diagonal de la caja:

$$D^2 = 47,17^2 + 18^2 \rightarrow D = 50,49 \text{ cm}$$

De modo que cabe el listón de 50,3 cm, pero los de 50,6 cm y 51 cm no caben en la caja.

- 121. La habitación de Ramón tiene forma de ortoedro de dimensiones 3,5 m de ancho, 4,2 m de largo y 2,5 m de altura. Decide pintar las paredes y el techo. Tiene una ventana cuadrada de 1,2 m de lado y la puerta mide 90 cm de ancho y 2,1 m de altura. Si con cada bote de pintura puede cubrir una superficie de 20 m², ¿cuántos botes necesitará?**

Calculamos el área de la habitación (excluyendo el suelo, es decir, una de las bases del ortoedro) y le restamos el área de la ventana y de la puerta.

$$A_{\text{ortoedro}} = 3,5 \cdot 4,2 + (3,5 \cdot 2 + 4,2 \cdot 2) \cdot 2,5 = 53,2 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{ventana}} = 1,2^2 = 1,44 \text{ m}^2 \quad A_{\text{puerta}} = 0,9 \cdot 2,1 = 1,89 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{pintar}} = 53,2 - 1,44 - 1,89 = 49,87 \text{ m}^2$$

Necesitará 3 botes, porque con dos botes, cubriría 40 m² que no es suficiente. Con tres botes podría pintar 60 m², de modo que le sobrará pintura.

- 122. Un arquitecto diseña dos torres: una cúbica de 6 m de arista con un tejado en forma piramidal y altura total 7,42 m, y otra cilíndrica de base 24,63 m² y altura 7 m con tejado cónico, siendo la generatriz del cono cuatro veces el radio de la base. Si el coste de cada metro cuadrado de fachada es 205,60 €, ¿qué torre saldrá más cara?**

Necesitamos en cada caso calcular el área lateral de las figuras.

En el caso de la pirámide, necesitamos saber la altura de cada uno de los lados, es decir, la apotema, que podemos calcularla ya que conocemos la altura total de la torre: $ap^2 = 1,42^2 + 3^2 \rightarrow ap = 3,32$ m

$$A_{\text{Torre cúbica}} = 4 \cdot 6^2 + 4 \cdot \frac{6 \cdot 3,32}{2} = 183,84 \text{ m}^2$$

Calculamos el radio del cilindro: $\pi r^2 = 24,63 \rightarrow r = 2,8$ m

La generatriz del cono será: $4 \cdot 2,8 = 11,2$ m

$$A_{\text{Torre cilíndrica}} = 2\pi \cdot 2,8 \cdot 7 + \pi \cdot 2,8 \cdot 11,2 = 221,67 \text{ m}^2$$

Saldrá más cara la torre de base cilíndrica, pues tiene más metros cuadrados de fachada.

123. El rodillo de amasar de Laura tiene un radio de 1,8 cm y 24 cm de largo.

- ¿Qué área cubre en cada vuelta?
- ¿Cuántas vueltas tiene que dar el rodillo para amasar una pieza circular de radio 9,5 cm?
- ¿Cuántas vueltas ha dado Laura al rodillo si la superficie cubierta ha sido 5428,6 cm²?

a) El área que cubre en cada vuelta, es el área lateral del cilindro: $A = 2\pi \cdot 1,8 \cdot 24 = 271,43 \text{ cm}^2$

b) El área de la pieza es $\pi \cdot 9,5^2 = 283,53 \text{ cm}^2$

$$\frac{283,53}{271,43} = 1,04 \rightarrow \text{Son necesarias 2 vueltas.}$$

c) $\frac{5428,6}{271,43} = 20$ vueltas

124. David quiere meter en el ascensor un tubo metálico de 2,88 m. Las medidas del ascensor son $1 \times 1 \times 2,5$ m. ¿Podrá hacerlo?

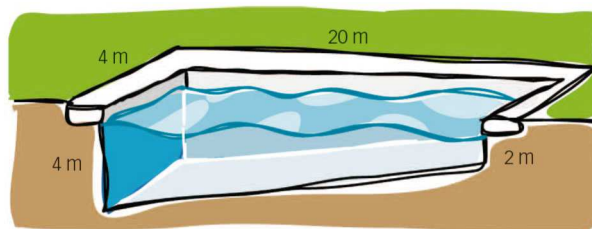
Calculamos la diagonal del ascensor.

La diagonal de la base del ascensor es $d^2 = 1^2 + 1^2 \rightarrow d = \sqrt{2}$ m.

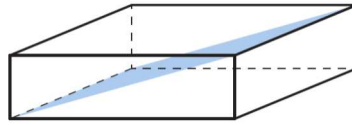
La diagonal del ascensor es $D^2 = (\sqrt{2})^2 + 2,5^2 \rightarrow D = 2,87$ m.

No podrá meter el tubo en el ascensor, porque la máxima longitud en este es de 2,87 m.

125. Halla el volumen de esta piscina.



Podemos dividir la piscina en dos partes: un ortoedro de lados 4 m, 20 m y 2 m y un prisma que es la mitad del ortoedro anterior, ya que se trata de un ortoedro partido por un plano de este modo:

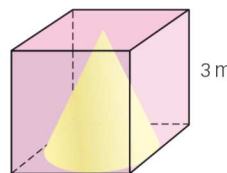
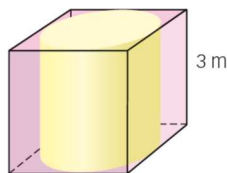
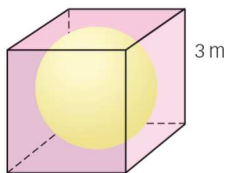


Es decir, el volumen es $\frac{3}{2}$ del volumen de un ortoedro de dimensiones $4 \times 20 \times 2$.

$$V = \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot 20 \cdot 2 = 240 \text{ m}^3$$

126. En un depósito cúbico lleno de agua y de arista 3 m, introducimos los siguientes cuerpos.

- a) ¿Qué porcentaje de la cantidad inicial de agua hay en el cubo después de introducir una esfera de radio 1,5 m?
- b) ¿Qué porcentaje queda de la cantidad inicial de agua si introducimos un cilindro de diámetro y altura 3 m?
- c) ¿Y cuál es el porcentaje si introducimos un cono de 3 m de diámetro e igual altura?



$$V_{\text{inicial}} = 3^3 = 27 \text{ m}^3$$

a) $V_{\text{queda}} = 3^3 - \frac{4}{3} \pi \cdot 1,5^3 = 12,86 \text{ m}^3 \rightarrow$ El porcentaje que queda es $\frac{12,86}{27} \cdot 100 = 47,63 \%$.

b) $V_{\text{queda}} = 3^3 - \pi \cdot 1,5^2 \cdot 3 = 5,79 \text{ m}^3 \rightarrow$ El porcentaje que queda es $\frac{5,79}{27} \cdot 100 = 21,44 \%$.

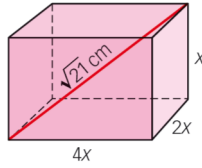
c) $V_{\text{queda}} = 3^3 - \frac{1}{3} \pi \cdot 1,5^2 \cdot 3 = 19,93 \text{ m}^3 \rightarrow$ El porcentaje que queda es $\frac{19,93}{27} \cdot 100 = 73,81 \%$.

DEBES SABER HACER

1. Calcula el número de caras de estos poliedros.

- a) Tiene 16 vértices y 24 aristas.
- b) Tiene 6 vértices y 12 aristas.
 - a) Si es convexo verifica la fórmula de Euler, de modo que tendrá $16 + C = 2 + 24 \rightarrow C = 10$ caras.
 - b) Si es convexo verifica la fórmula de Euler, de modo que tendrá $6 + C = 2 + 12 \rightarrow C = 8$ caras.

2. El largo de un ortoedro es el doble que el ancho, y el ancho es el doble que la altura. Si su diagonal vale $\sqrt{21}$ cm, halla el área total.



La diagonal de la base es $d^2 = (4x)^2 + (2x)^2 \rightarrow d = x\sqrt{20}$.

La diagonal del ortoedro es $D^2 = (\sqrt{21})^2 = x^2 + (x\sqrt{20})^2 \rightarrow 21 = 21x^2 \rightarrow x = 1$.

El área total es $2 \cdot (4 \cdot 2) + (4 \cdot 2 + 2 \cdot 2) \cdot 1 = 28 \text{ cm}^2$.

3. Halla el área total de un prisma hexagonal regular de 25 cm de altura y 12 cm de arista básica.

Calculamos la apotema de la base (por ser un hexágono regular el radio de la base es igual al lado):

$$12^2 = ap^2 + 6^2 \rightarrow ap = 10,39 \text{ cm}$$

$$A = 2 \cdot \frac{(6 \cdot 12) \cdot 10,39}{2} + (6 \cdot 12) \cdot 25 = 2 \ 548,08 \text{ cm}^2.$$

4. Calcula el área de una pirámide cuadrangular regular de arista básica 6 cm y apotema 8 cm.

$$A = 6^2 + 4 \cdot \frac{6 \cdot 8}{2} = 132 \text{ cm}^2$$

5. ¿Qué altura tiene un cilindro de área lateral $75,36 \text{ cm}^2$ y radio de la base 4 cm?

El área lateral del cilindro viene dada por $2\pi r \cdot h = 75,36 \text{ cm}^2$, como $r = 4 \text{ cm}$, tenemos que $h = 3 \text{ cm}$.

6. Halla el área del cono que se obtiene al girar el triángulo rectángulo de catetos 6 cm y 13 cm.

Calculamos la generatriz del cono, que es la diagonal del triángulo: $g^2 = 13^2 + 6^2 \rightarrow g = 14,32 \text{ cm}$.

Suponemos que lo hacemos girar sobre el cateto de 13 cm:

$$A = \pi \cdot 6 \cdot (6 + 14,32) = 383,02 \text{ cm}^2$$

Suponemos que lo hacemos girar sobre el cateto de 6 cm:

$$A = \pi \cdot 13 \cdot (13 + 14,32) = 1 \ 115,77 \text{ cm}^2$$

7. Calcula el volumen de un cubo sabiendo que una de sus caras tiene un área de $70,56 \text{ cm}^2$.

Calculamos la arista del cubo: $70,56 = l^2 \rightarrow l = 8,4 \text{ cm}$.

$$V = 8,4^3 = 592,704 \text{ cm}^3$$

8. Calcula el volumen de un cilindro sabiendo que la base tiene un perímetro de $42,73 \text{ cm}$ y la altura es el doble del radio de la base.

Calculamos el radio de la base: $42,73 = 2\pi r \rightarrow r = 6,8 \text{ cm}$.

$$h = 6,8 \cdot 2 = 13,6 \text{ cm} \rightarrow V = \pi \cdot 6,8^2 \cdot 13,6 = 1 \ 975,63 \text{ cm}^3$$

9. ¿Qué longitud y latitud separan los puntos A , B y C ? ¿Cuál es la diferencia horaria entre ellos?

A (14° E, 55° N) B (37° O, 46° S) C (118° E, 72° S)

Diferencia de latitud entre A y B : 101°

Diferencia de latitud entre A y C : 127°

Diferencia de latitud entre B y C : 26°

Diferencia de longitud entre A y B : 51°

La diferencia horaria entre A y B es $51 : 15 = 3,4$ h = 3 h 24 min

Diferencia de longitud entre A y C : 104°

La diferencia horaria entre A y C es $104 : 15 = 6,93$ h = 6 h 55 min 48 s

Diferencia de longitud entre B y C : 155°

La diferencia horaria entre B y C es $155 : 15 = 10,33$ h = 10 h 19 min 48 s

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

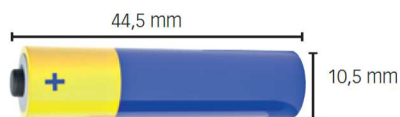
127. La mayoría de los fotógrafos llevan en su bolsa pilas para que funcionen sus *flashes*, incluso pilas especiales para alguna de sus cámaras antiguas que no disponen de baterías recargables.

Uno de los problemas que tienen es que dada su forma cilíndrica no son fáciles de almacenar en bolsas. Con este fin han aparecido unos estuches en forma de pequeñas cajas de plástico donde poder llevarlas con comodidad.

- Una página web dedicada a la venta de material fotográfico anuncia este producto.



Estas son las dimensiones de una pila de tipo AAA. ¿Cuántos centímetros cúbicos quedan sin ocupar por las cuatro pilas en la caja que se publicita en el anuncio?



La caja es un ortoedro, su volumen es $V_{\text{caja}} = 62 \cdot 57 \cdot 18 = 63\,612 \text{ mm}^3$.

El volumen de cada pila es $V_{\text{pila}} = \pi \cdot 5,25^2 \cdot 44,5 = 3\,853,26 \text{ mm}^3$.

El volumen de 4 pilas es: $3\,853,26 \cdot 4 = 15\,413,04 \text{ mm}^3$.

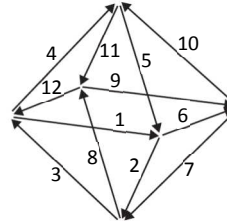
Espacio que sobra: $63\,612 - 15\,413,04 = 48\,198,96 \text{ mm}^3 \approx 48,2 \text{ cm}^3$

FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

128. Una hormiga se encuentra en un vértice de un octaedro y decide recorrer todas sus aristas sin pasar dos veces por la misma arista. Indica un camino posible.

Curiosamente, la hormiga no podría hacer lo mismo en un cubo. Compruébalo.

Para que la hormiga pudiese recorrer el octaedro sin repetir arista, este se tendría que poder dibujar con un solo trazo y efectivamente se puede.

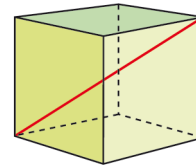


Sin embargo, en un cubo, esto no es posible.

129. Considera x la medida de la arista de un cubo. Demuestra que la diagonal del cubo se obtiene con la fórmula $d = \sqrt{3}x$.

Calcula con ella la diagonal de los siguientes cubos.

- a) Cubo de arista 6 cm
- b) Cubo de arista 4,5 cm



Si el lado del cubo es x , tenemos que la diagonal de la base es: $d_{base}^2 = x^2 + x^2 \rightarrow d_{base} = \sqrt{2} x$

Calculamos ahora la diagonal del cubo: $d^2 = (\sqrt{2} x)^2 + x^2 \rightarrow d = \sqrt{3} x$

- a) $d = \sqrt{3} \cdot 6 = 10,39$ cm
- b) $d = \sqrt{3} \cdot 4,5 = 7,79$ cm

130. Encuentra la expresión que da la altura de un tetraedro en función de su arista.

Necesitamos primero calcular la apotema de la pirámide:

Si la arista mide x , entonces $x^2 = ap^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow ap = \frac{\sqrt{3}}{2} x$.

Como es un triángulo equilátero, sabemos que la distancia de su centro al punto medio de uno de los lados es $1/3$ de la altura. Así, calculamos la altura del tetraedro:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)^2 = H^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} x\right)^2 \rightarrow H = \frac{\sqrt{24}}{6} x = \frac{2\sqrt{6}}{6} x = \frac{\sqrt{6}}{3} x$$

131. Halla las diagonales trazadas desde un vértice en un prisma hexagonal regular cuyas aristas básicas y aristas laterales miden 12 cm.

Se forma un triángulo rectángulo con la diagonal, la arista lateral y dos radios del hexágono de la base:
 $d_1^2 = 12^2 + 24^2 \rightarrow d_1 = 26,83$ cm

Se forma un triángulo rectángulo con la diagonal, la arista lateral y dos alturas de los triángulos en los que se divide la base. Calculamos la altura de los triángulos: $12^2 = h^2 + 6^2 \rightarrow h = 10,39$ cm.

$$d_2^2 = 12^2 + 20,78^2 \rightarrow d_2 = 24$$
 cm

132. Considera x, y, z las dimensiones de un ortoedro. Demuestra que su diagonal d se obtiene con la fórmula: $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

$$d_{\text{Base}}^2 = x^2 + y^2 \rightarrow d_{\text{Ortoedro}}^2 = d_{\text{Base}}^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

133. En el año 1638 el matemático Galileo propuso el siguiente problema: «Si se enrolla una hoja de papel en los dos sentidos posibles, se obtienen dos cilindros distintos».

¿Tienen estos cilindros el mismo volumen?

Sea x uno de los lados de la hoja y y el otro.

Si enrollamos el lado x , entonces $2\pi r = x \rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$, el volumen es $V = \pi \cdot \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \cdot y = \frac{x^2 y}{4\pi}$

Si enrollamos el lado y , entonces $2\pi r = y \rightarrow r = \frac{y}{2\pi}$, el volumen es $V = \pi \cdot \left(\frac{y}{2\pi}\right)^2 \cdot x = \frac{y^2 x}{4\pi}$

Los volúmenes no son iguales.

134. En un libro de Matemáticas hemos encontrado el siguiente problema sobre volúmenes:

«Si el lado de un octaedro es l , su volumen es: $V = l^3 \cdot 0,4714$ ».

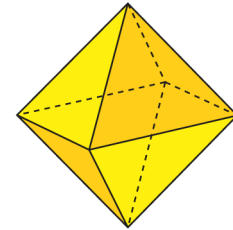
Investiga cómo se obtiene esta fórmula.

Calculamos la apotema de la pirámide: $l^2 = ap^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow ap = \frac{\sqrt{3}}{2} l$.

Calculamos ahora la altura de la pirámide: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} l\right)^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2} l$.

$$V_{\text{Pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} l = 0,2357 l^3$$

$$V_{\text{Octaedro}} = 2 \cdot V_{\text{Pirámide}} = 0,4714 l^3$$



135. El radio de la base de un cilindro y de un cono mide 10 cm. Si la altura del cilindro es de 10 cm, averigua cuál debe ser la generatriz del cono para que ambos tengan:

- a) La misma área lateral. b) La misma área total.

a) $A_{\text{Lateral Cilindro}} = 2\pi \cdot 10 \cdot 10 = 628,32$

$A_{\text{Lateral Cono}} = \pi \cdot 10 \cdot g$

$$\pi \cdot 10 \cdot g = 628,32 \rightarrow g = 20 \text{ cm}$$

b) $A_{\text{Total Cilindro}} = A_L + 2\pi \cdot r^2 = 628,32 + 628,32 = 1\,256,64$

$A_{\text{Total Cono}} = A_L + \pi \cdot r^2 = 10\pi \cdot g + 314,16$

$$31,42 \cdot g + 314,16 = 1\,256,64 \rightarrow g = 30 \text{ cm}$$

PRUEBAS PISA

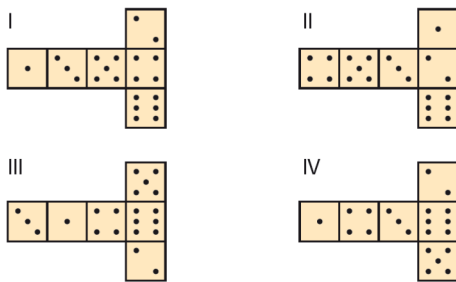
136. A la derecha, hay un dibujo de dos dados. Los dados son cubos con un sistema especial de numeración en los que se aplica la siguiente regla:



«El número total de puntos en dos caras opuestas es siempre siete».

Puedes construir un dado sencillo cortando, doblando y pegando cartón. Estos dados se pueden hacer de muchas maneras. En el dibujo siguiente puedes ver cuatro recortes que se pueden utilizar para hacer cubos, con puntos en las caras. ¿Cuál de las siguientes figuras se puede doblar para formar un cubo que cumpla la regla de que la suma de caras opuestas sea 7?

(Prueba PISA 2006)

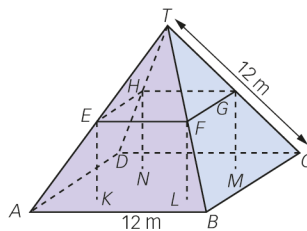


Las figuras II y III.

137. Aquí ves una fotografía de una casa de campo con el tejado en forma de pirámide.



Debajo hay un modelo matemático del tejado de la casa con las medidas correspondientes.



La planta del ático, $ABCD$ en el modelo, es un cuadrado. Las vigas que sostienen el tejado son las aristas de un bloque (prisma rectangular) $EFGHKL MN$. E es el punto medio de \overline{AT} , F es el punto medio de \overline{BT} , G es el punto medio de \overline{CT} y H es el punto medio de \overline{DT} . Todas las aristas de la pirámide tienen 12 m de longitud.

- a) Calcula el área de la planta del ático $ABCD$.
- b) Calcula la longitud de \overline{EF} , una de las aristas horizontales del bloque.

(Prueba PISA 2006)

a) $A = 12^2 = 144 \text{ m}^2$

b) Los triángulos de las caras laterales del tejado están en posición de Tales $\rightarrow \overline{EF} = 6 \text{ m}$