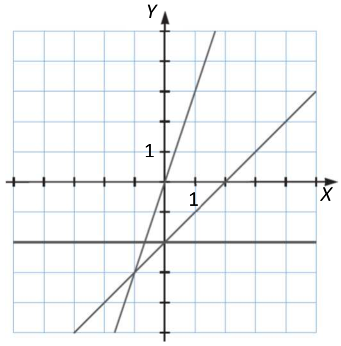
Movimientos y semejanzas

9

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Representa gráficamente estas rectas.

a) $y = x - 2$ b) $y = 3x$ c) $y = -2$



2. Halla el término que falta en cada proporción.

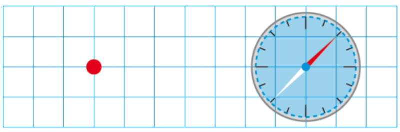
a) $\dfrac{4}{x} = \dfrac{6}{12}$ b) $\dfrac{2{,}5}{3} = \dfrac{x}{24}$ c) $\dfrac{x}{3} = \dfrac{12}{x}$

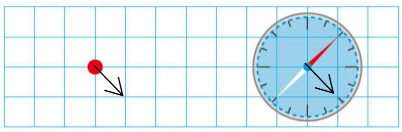
a) $12 \cdot 4 = 6x \rightarrow x = 8$ b) $24 \cdot 2{,}5 = 3x \rightarrow x = 20$ c) $12 \cdot 3 = x^2 \rightarrow x = \pm 6$

VIDA COTIDIANA

La brújula es un instrumento que sirve para orientarse y que tiene su fundamento en la propiedad de las agujas magnetizadas. Posee una aguja imantada que señala siempre al norte magnético.

- **Marca en tu cuaderno la dirección en la cual se mueve el punto si lo hace hacia el este.**





RESUELVE EL RETO

Una butaca muy pesada solo se puede mover mediante giros de 90° alrededor de cualquiera de sus esquinas. ¿Es posible colocarla justo detrás de donde estaba y mirando en la misma dirección?

Fijamos un vector en uno de los lados de la butaca, y queremos ver si se puede trasladar varias unidades hacia atrás. Como solo podemos realizar giros de 90°, no es posible realizar la traslación pedida.

¿Son semejantes la parte pintada y el cuadro con el marco?

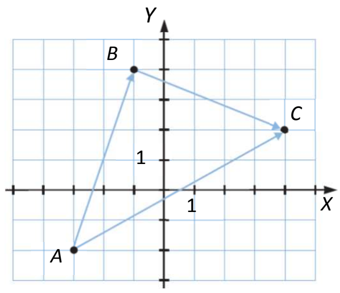
No son semejantes ya que, como el ancho de los lados del marco es el mismo, los lados homólogos del cuadro y del marco no son proporcionales.

La Torre Eiffel tiene 320 m de altura y pesa 7 000 toneladas. Si construimos un modelo a escala, con el mismo material y la mitad de altura, ¿cuánto pesaría?

Si reducimos a la mitad la altura, se reduce también a la mitad el ancho y el fondo de la torre. Por tanto, el volumen de la maqueta queda dividido entre $2^3 = 8$. Como la densidad de la torre Eiffel y la de la maqueta es la misma, el peso de la maqueta sería $7\,000/8 = 875$ toneladas.

ACTIVIDADES

1. **Sean los puntos $A(-3, -2)$, $B(-1, 4)$ y $C(4, 2)$. Dibuja los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$, y halla sus coordenadas y su módulo. Comprueba que los módulos de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{CA}$, y $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CB}$ coinciden.**



$$\overrightarrow{AB} = (-1+3, 4+2) = (2, 6) \rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2+6^2} = \sqrt{40}$$

$$\overrightarrow{AC} = (4+3, 2+2) = (7, 4) \rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{7^2+4^2} = \sqrt{65}$$

$$\overrightarrow{BC} = (4+1, 2-4) = (5, -2) \rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{5^2+(-2)^2} = \sqrt{29}$$

$$\overrightarrow{BA} = (-3+1, -2-4) = (-2, -6) \rightarrow \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{(-2)^2+(-6)^2} = \sqrt{40}$$

$$\overrightarrow{CA} = (-3-4, -2-2) = (-7, -4) \rightarrow \left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{(-7)^2+(-4)^2} = \sqrt{65}$$

$$\overrightarrow{CB} = (-1-4, 4-2) = (-5, 2) \rightarrow \left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{(-5)^2+2^2} = \sqrt{29}$$

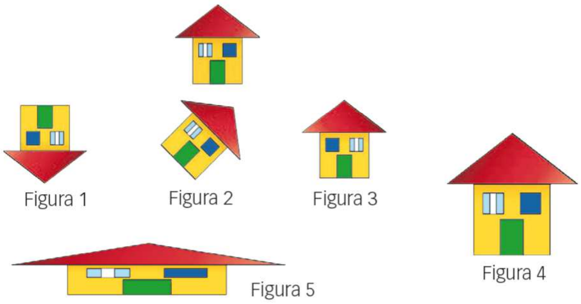
2. **Calcula las coordenadas del punto B si $\overrightarrow{AB} = (5, -1)$ y $A = (0, 3)$.**

$$B(b_1, b_2) \longrightarrow \overrightarrow{AB} = (5, -1) = (b_1 - 0, b_2 - 3) \rightarrow \left.\begin{matrix} b_1 = 5 \\ b_2 = 2 \end{matrix}\right\}$$

3. **¿Cuántos vectores $\overrightarrow{AB}$, con A un punto fijo, tienen igual módulo?**

Infinitos. Todos aquellos cuyo extremo pertenece a la circunferencia de centro A y radio el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

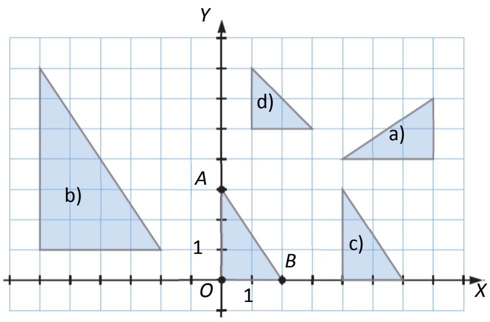
4. **Debajo puedes ver varias transformaciones de la figura de la derecha. Determina cuáles son movimientos.**



Las figuras 1, 2 y 3, porque tienen la misma forma y tamaño.

5. **Dibuja un triángulo de vértices *O*(0, 0), *A*(0, 3) y *B*(2, 0). Dibuja a partir de él otros triángulos en los que se conserven estas características.**

a) El tamaño
b) La forma
c) El tamaño y la forma
d) Ni el tamaño ni la forma



6. **Dibuja la figura geométrica que más te guste y aplícale distintas transformaciones. Indica cuáles de ellas son movimientos.**

Respuesta libre. Depende de la figura que se quiera y de las transformaciones que se apliquen.

7. **Para cada punto *A* y vector $\vec{v}$, determina las coordenadas del transformado de *A* mediante la traslación $t_{\vec{v}}$:**

a) $A(3, -2)$, $\vec{v} = (2, -1)$
b) $A(-4, 5)$, $\vec{v} = (7, 2)$
c) $A(1, 6)$, $\vec{v} = (-4, -3)$
d) $A(-3, 1)$, $\vec{v} = (-5, 1)$

a) $A \xrightarrow{\vec{v}} A'(3+2, -2-1) = A'(5, -3)$

b) $A \xrightarrow{\vec{v}} A'(-4+7, 5+2) = A'(3, 7)$

c) $A \xrightarrow{\vec{v}} A'(1-4, 6-3) = A'(-3, 3)$

d) $A \xrightarrow{\vec{v}} A'(-3-5, 1+1) = A'(-8, 2)$

8. **Determina el vector de la traslación que transforma el punto *A*(−1, 4) en *A*′(5, 2).**

Sea $\vec{v} = (v_1, v_2)$

$$A(-1,4) \xrightarrow{\vec{v}} A'(5,2) = A'(-1+v_1, 4+v_2) \rightarrow \left.\begin{array}{l} 5 = -1+v_1 \\ 2 = 4+v_2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 6 = v_1 \\ -2 = v_2 \end{array}\right\}$$

9. **Aplica la traslación de vector $\vec{v} = (2, 3)$ seguida de un giro de centro $B(3, 2)$ y ángulo 270°. ¿Es lo mismo aplicar el giro y luego la traslación?**

No, el resultado es diferente.

10. **Traza el segmento *AB* determinado por estos puntos y calcula su transformado mediante una traslación de vector $\vec{v} = (3, 4)$.**

a) $A(1, -2), B(3, -1)$ c) $A(3, 1), B(0, 4)$

b) $A(-1, 4), B(-3, 2)$ d) $A(7, 2), B(4, -1)$

a) $\begin{cases} A(1,-2) \xrightarrow{\vec{v}} A'(4,2) \\ B(3,-1) \xrightarrow{\vec{v}} B'(6,3) \end{cases}$ c) $\begin{cases} A(3,1) \xrightarrow{\vec{v}} A'(6,5) \\ B(0,4) \xrightarrow{\vec{v}} B'(3,8) \end{cases}$

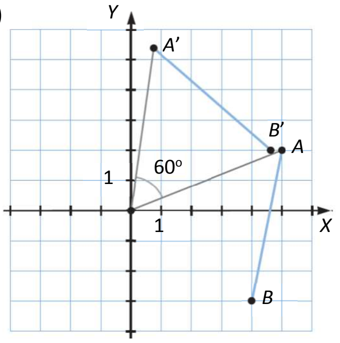
b) $\begin{cases} A(-1,4) \xrightarrow{\vec{v}} A'(2,8) \\ B(-3,2) \xrightarrow{\vec{v}} B'(0,6) \end{cases}$ d) $\begin{cases} A(7,2) \xrightarrow{\vec{v}} A'(10,6) \\ B(4,-1) \xrightarrow{\vec{v}} B'(7,3) \end{cases}$

11. **Para cada pareja de puntos *A* y *B*, traza el segmento *AB* y su transformado mediante un giro de centro el origen de coordenadas y ángulo de 60°.**

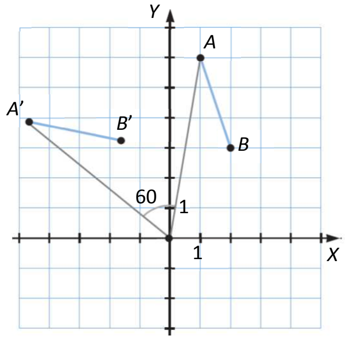
a) $A(5, 2), B(4, -3)$ c) $A(1, 6), B(2, 3)$

b) $A(-2, 4), B(-3, 1)$ d) $A(1, -2), B(4, 5)$

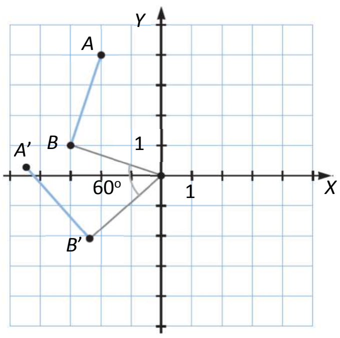
a)



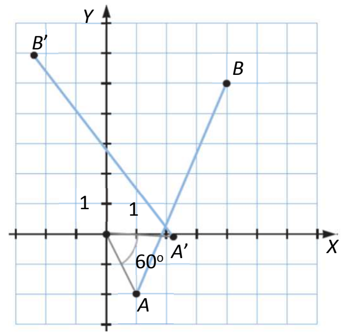
c)



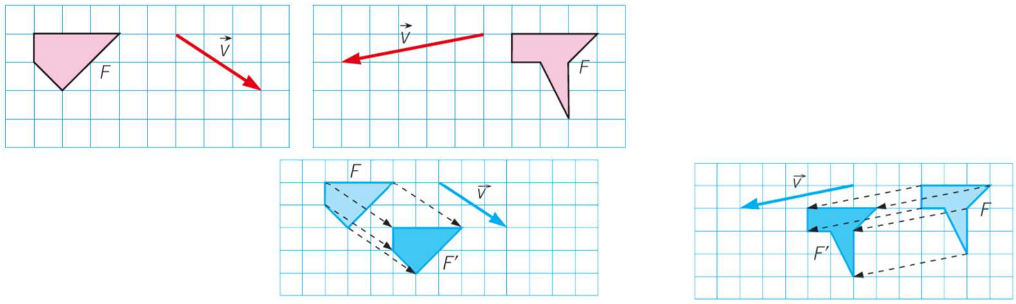
b)



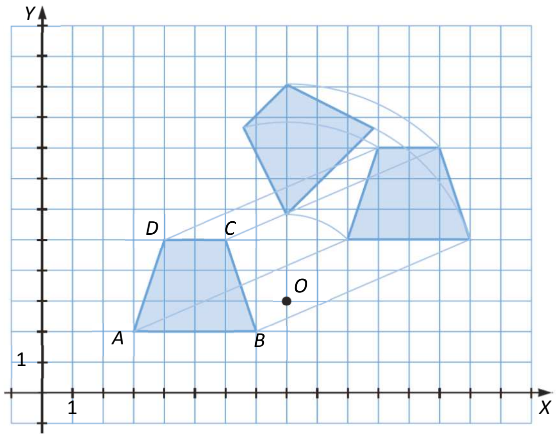
d)



12. **Obtén la transformada de la figura *F* mediante una traslación de vector $\vec{v}$.**

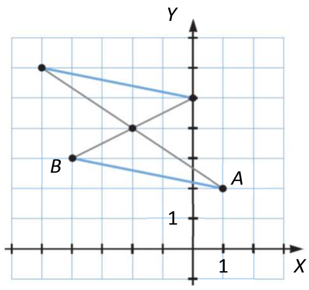


13. **Dibuja el trapecio isósceles de vértices *A*(3, 2), *B*(7, 2), *C*(6, 5) y *D*(4, 5), y transfórmalo mediante una traslación de vector $\vec{v} = (7, 3)$ y a continuación un giro de centro (8, 3) y ángulo de 45°.**

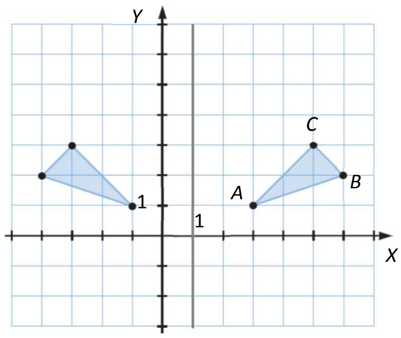


14. **Realiza una simetría central de centro *C*(−2, 4) sobre estos elementos.**

- Punto *A*(1, 2)
- Punto *B*(−4, 3)
- Segmento *AB*, con *A* y *B* los anteriores.



15. **Dado el triángulo de vértices *A*(3, 1), *B*(6, 2) y *C*(5, 3), haz una simetría axial de eje la recta $x = 1$.**

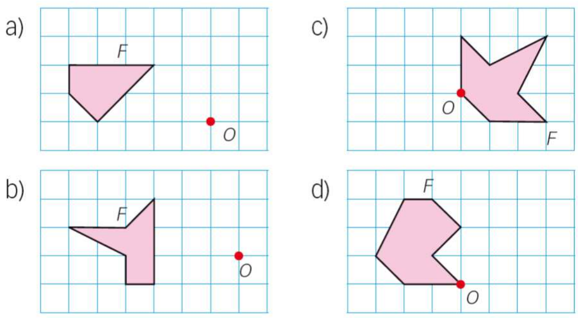


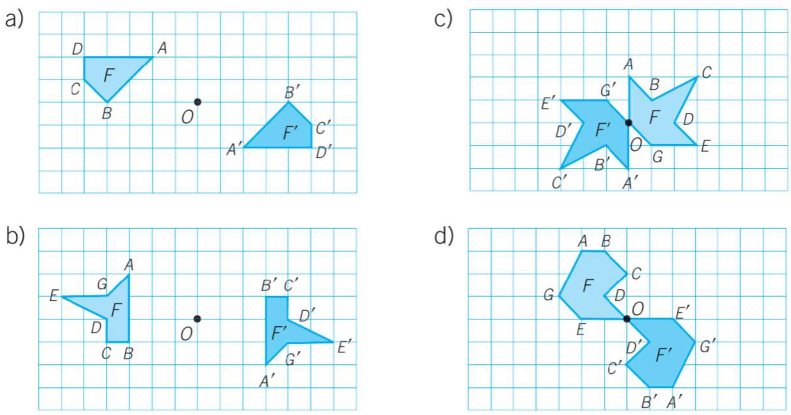
16. **Completa en tu cuaderno la tabla.**

Punto	Eje de simetría	Punto trasladado
$A(1, 3)$	Ordenadas	
	Ordenadas	$B'(0, 3)$
$C(2, -1)$	Abscisas	

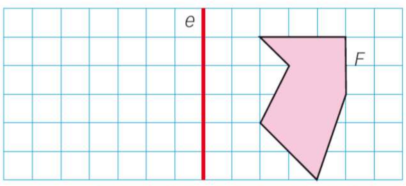
Punto	Eje de simetría	Punto trasladado
$A(1, 3)$	Ordenadas	**$A'(-1, 3)$**
$B(0, 3)$	Ordenadas	$B'(0, 3)$
$C(2, -1)$	Abscisas	**$C'(2, 1)$**

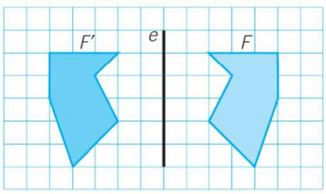
17. **Aplica a *F* una simetría central de centro *O*.**



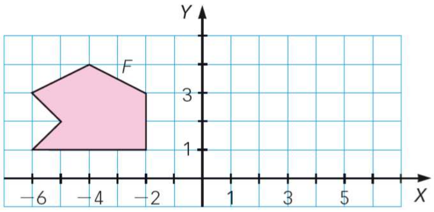


18. **Aplica a *F* una simetría de eje *e*.**

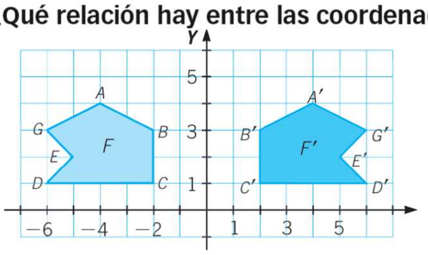




19. **Determina la figura transformada de *F* mediante una simetría de eje el eje de ordenadas.**



¿Qué relación hay entre las coordenadas de los vértices de *F* y los de sus transformados?



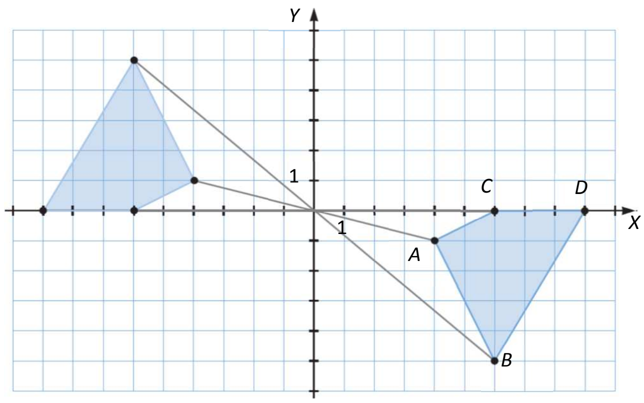
$A(-4, 4) \longrightarrow A'(4, 4)$
$B(-2, 3) \longrightarrow B'(3, 2)$
$C(-2, 1) \longrightarrow C'(1, 2)$
$D(-6, 1) \longrightarrow D'(1, 6)$
$E(-5, 2) \longrightarrow E'(5, 2)$
$G(-6, 3) \longrightarrow G'(3, 6)$

Las abscisas son las opuestas al aplicar la simetría.

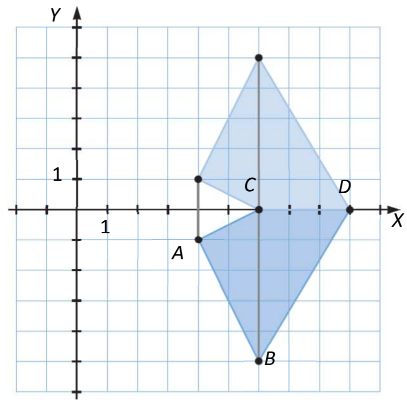
20. **Dibuja la figura de vértices: *A*(4, −1), *B*(6, −5), *C*(6, 0), *D*(9, 0). Calcula su transformada por una:**

a) Simetría central de centro el origen.
b) Simetría central de centro el punto *A*(4, 2).
c) Simetría axial de eje el eje de abscisas.
d) Simetría axial de eje la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

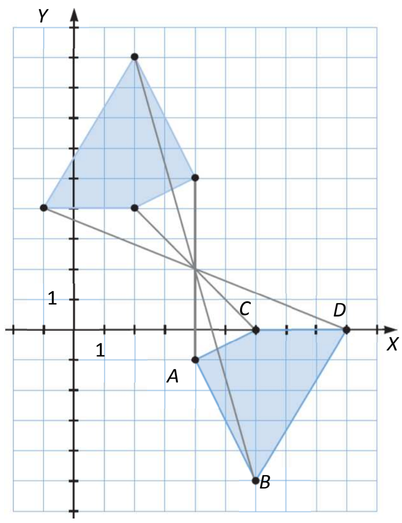
a)



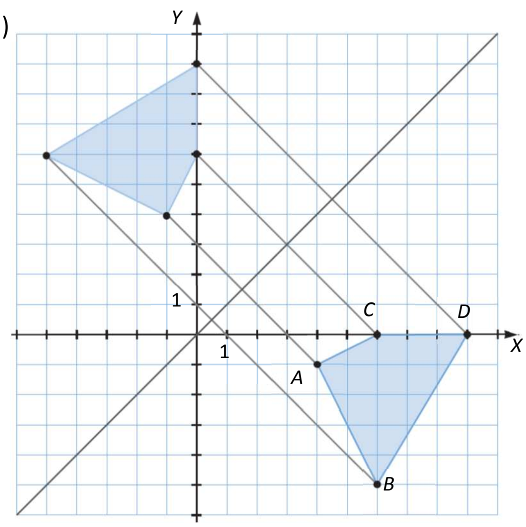
c)



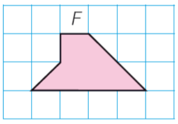
b)

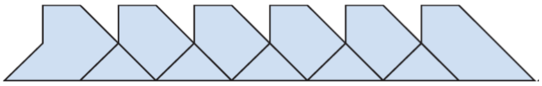


d)



21. **Construye un friso a partir de esta figura utilizando una traslación cuyo vector mide la mitad de la base de la figura.**





22. **Dibuja una figura y construye un friso utilizando giros de 90° con centro en un punto exterior a la figura y una traslación.**

Solución libre, depende de la figura y el punto que se tome.

23. **¿Cuál es la figura básica que se ha utilizado para construir este mosaico de la Alhambra de Granada?**

¿A partir de qué movimientos se ha obtenido?

La figura básica es:

Los movimientos son giros de 120° y traslaciones.

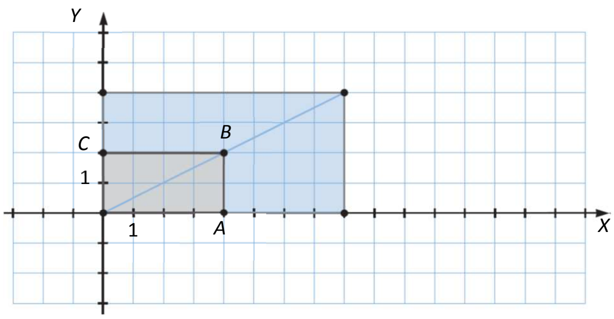
24. **Dibuja el rectángulo de vértices $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(4, 2)$ y $C(0, 2)$ y aplica una:**

a) Homotecia de centro el origen y razón 2.

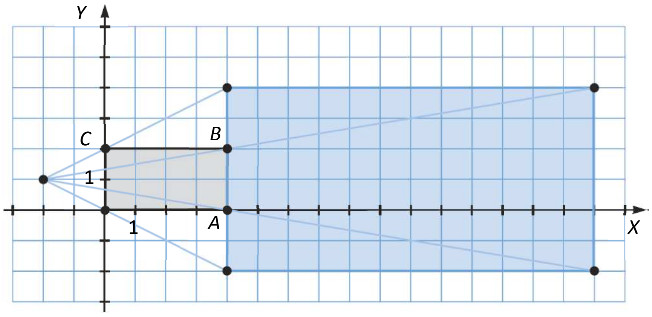
b) Homotecia de centro $(-2, 1)$ y razón 3.

c) Homotecia de centro $(0, 4)$ y razón $\frac{1}{2}$.

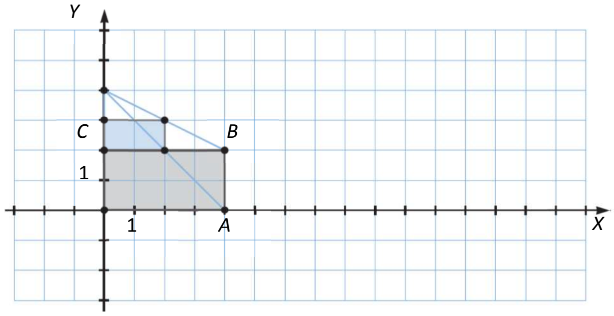
a)



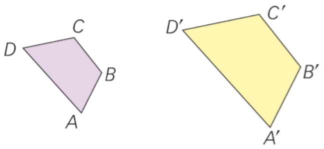
b)

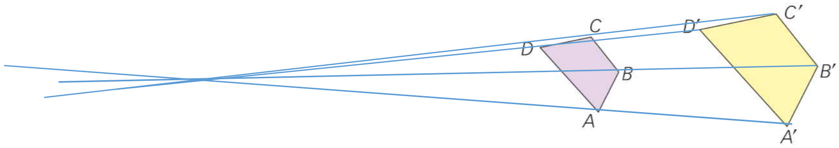


c)



25. **Encuentra el centro y calcula la razón de esta homotecia.**





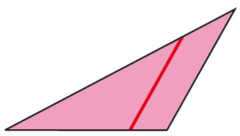
La razón de la homotecia es 1,5.

26. **Determina los puntos y rectas dobles de una homotecia.**

El único punto doble de una homotecia es el centro de la homotecia, *O*.

Las rectas dobles son las rectas que se transforman en sí mismas, es decir, las rectas que pasan por el centro de la homotecia.

27. **Sabiendo que $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{AB'} = 6$ cm y $\overline{AC} = 5$ cm, calcula la longitud del segmento $\overline{AC'}$.**



$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} \rightarrow \frac{6}{4} = \frac{\overline{AC'}}{5} \rightarrow \overline{AC'} = 7{,}5 \text{ cm}$$

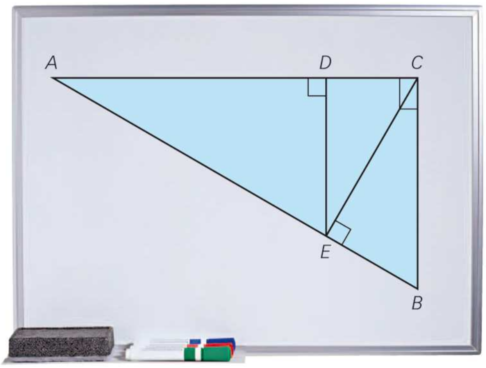
28. **Considera el triángulo rectángulo de catetos 6 y 8 cm. Calcula la medida de los catetos de otro triángulo semejante a él cuya hipotenusa mide 9 cm.**

La hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos 6 y 8 cm mide $\sqrt{6^2+8^2}=10$ cm.

Llamando c_1 y c_2 a los catetos del triángulo semejante al anterior cuya hipotenusa mide 9 cm, se tiene:

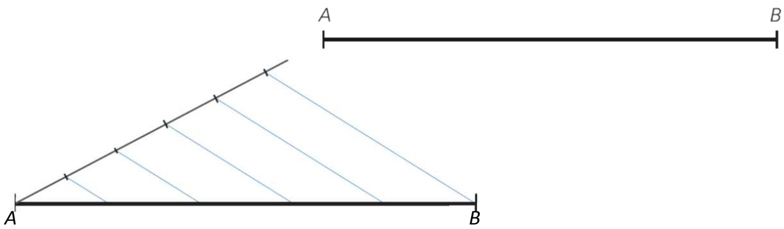
$$\frac{10}{9}=\frac{6}{c_1}=\frac{8}{c_2}\rightarrow c_1=\frac{54}{10}=5{,}4 \text{ cm y } c_2=\frac{72}{10}=7{,}2 \text{ cm}$$

29. **Identifica los triángulos semejantes.**

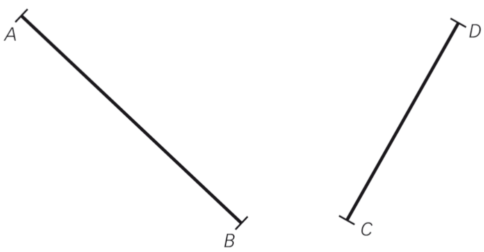


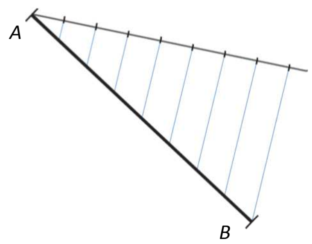
Son semejantes los triángulos: $\overset{\triangle}{ABC}$, $\overset{\triangle}{AED}$, $\overset{\triangle}{CBE}$, $\overset{\triangle}{ACE}$, $\overset{\triangle}{ECD}$

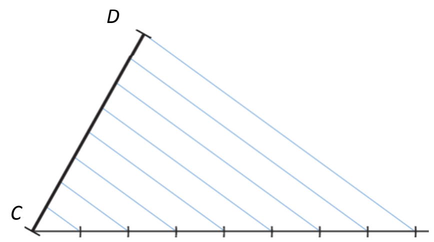
30. **Copia en tu cuaderno este segmento y divídelo en cinco partes iguales aplicando el teorema de Tales.**



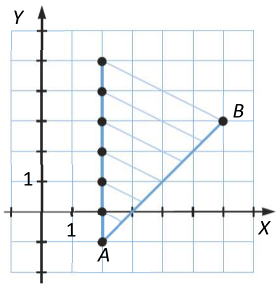
31. **Copia estos segmentos en tu cuaderno y divídelos en ocho partes iguales aplicando el teorema de Tales.**



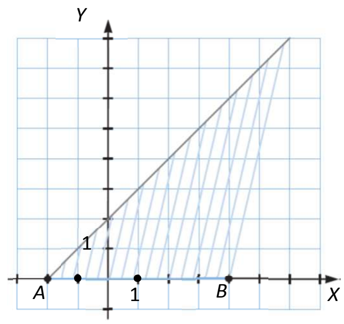




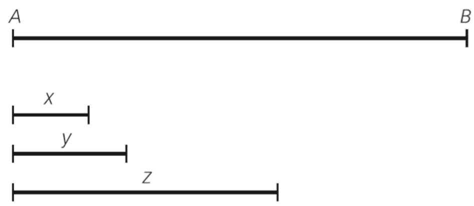
32. **Dibuja sobre unos ejes de coordenadas el segmento de extremos *A*(2, −1) y *B*(6, 3) y, aplicando el teorema de Tales, divídelo en seis partes iguales.**

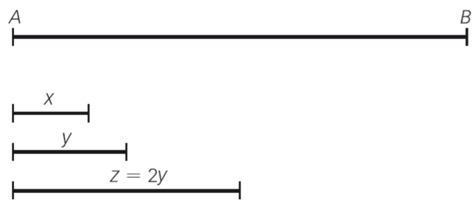


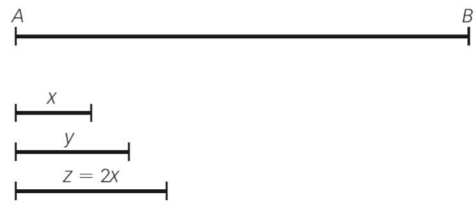
33. **Dibuja sobre unos ejes de coordenadas el segmento de extremos *A*(−2, 0) y *B*(4, 0) y, aplicando el teorema de Tales, divídelo en cuatro partes proporcionales a 2, 5 y 8.**



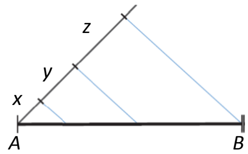
34. **Copia en tu cuaderno el segmento *AB*. Divídelo en partes proporcionales a los segmentos *x*, *y* y *z* aplicando el teorema de Tales.**

a) 

b) 

c) 

Los tres apartados se hacen de modo similar. Desde un extremo del segmento *AB, A,* se traza una línea en la que se sitúan uno a continuación de otro, los segmentos *x, y, z*. Desde el extremo de *z*, se traza una línea que une ese extremo con *B* y luego paralelas por cada uno de los extremos de los segmentos *x* e *y*.



35. **Observa esta foto a escala 1 : 5 500.**

a) ¿Qué distancia real hay entre *A* y *B*?

b) Si dos puntos de la ciudad distan 4 km, ¿qué distancia habrá entre ellos en un mapa con esta escala?

a) La distancia entre *A* y *B* es 35 cm.

$$\left.\begin{array}{l}1\text{ cm} \rightarrow 5\,500\text{ cm}\\ 3\text{ cm} \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{3\text{ cm} \cdot 5\,500\text{ cm}}{1\text{ cm}} = 16\,500\text{ cm} = 16{,}5\text{ m}$$

b) $$\left.\begin{array}{l}1\text{ cm} \rightarrow 5\,500\text{ cm} = 55\text{ m}\\ x \rightarrow 4\text{ km} = 4\,000\text{ m}\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{1\text{ cm} \cdot 4\,000\text{ m}}{55\text{ m}} = 72{,}72\text{ cm}$$

36. **Antonio va a hacer un dibujo de su huerto. Su huerto es un trozo de terreno rectangular de 75 m de largo y 34 m de ancho. Quiere utilizar una escala 1 : 150. ¿Le cabrá el dibujo en un papel de tamaño DIN A4?**

$$\left.\begin{array}{l}1\text{ cm} \rightarrow 150\text{ cm} = 1{,}5\text{ m}\\ x \rightarrow 75\text{ m}\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{1\text{ cm} \cdot 75\text{ m}}{1{,}5\text{ m}} = 50\text{ cm de largo}$$

$$\left.\begin{array}{l}1\text{ cm} \rightarrow 150\text{ cm} = 1{,}5\text{ m}\\ y \rightarrow 34\text{ m}\end{array}\right\} \rightarrow y = \frac{1\text{ cm} \cdot 34\text{ m}}{1{,}5\text{ m}} = 22{,}67\text{ cm de ancho}$$

Por tanto, no podrá dibujarlo porque las medidas del huerto a escala son mayores que las medidas del papel DIN A4, que son 29 cm × 21 cm.

37. **Carlos ha utilizado una escala 12 : 5 para realizar un boceto de sus esculturas.**

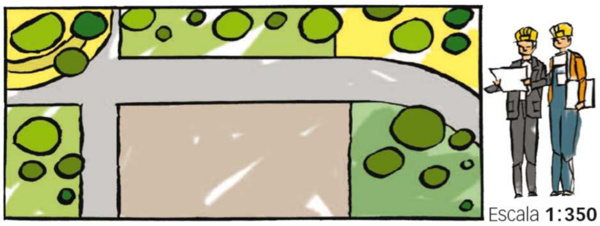
a) ¿Qué será mayor, el boceto o las esculturas?

b) Si una de sus esculturas mide 12 cm, ¿qué altura tendrá en el boceto?

a) Será mayor el boceto.

b) $$\left.\begin{array}{l}12\text{ cm} \rightarrow 5\text{ cm}\\ x \rightarrow 12\text{ cm}\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{12\text{ cm} \cdot 12\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 28{,}8\text{ cm}$$

38. **Este es el plano de un terreno donde se construirá una casa. Si se quiere dejar un patio de 150 m², ¿qué dimensiones como máximo tendrá la casa? ¿Qué superficie máxima puede ocupar?**



Medimos el terreno, que tiene un ancho de 6,3 cm y un alto de 2,8 cm. En la realidad estas medidas son:

$$\left.\begin{array}{l} 1\text{ cm} \rightarrow 350\text{ cm} = 3{,}5\text{ m} \\ 2{,}8\text{ cm} \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{2{,}8\text{ cm} \cdot 3{,}5\text{ m}}{1\text{ cm}} = 9{,}8\text{ m}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1\text{ cm} \rightarrow 350\text{ cm} = 3{,}5\text{ m} \\ 6{,}3\text{ cm} \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{6{,}3\text{ cm} \cdot 3{,}5\text{ m}}{1\text{ cm}} = 22{,}05\text{ m}$$

El área de esa zona es $22{,}05 \cdot 9{,}8 = 216{,}09$ m². Si se dejan 150 m² de patio, la planta de la casa podrá tener como máximo 66,06 m².

39. **Considera este cuadrado.**

a) Calcula sus medidas si lo representamos a una escala 1 : 5.

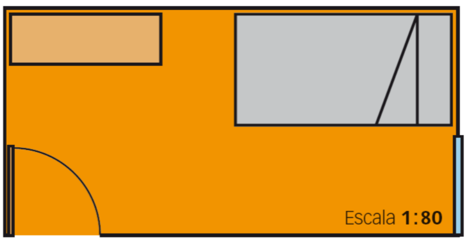
b) Calcula sus medidas y su área si lo representamos a una escala 5 : 12.

a) La medida del lado del cuadrado será: $\left.\begin{array}{l} 1\text{ cm} \rightarrow 5\text{ cm} \\ 6\text{ cm} \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{6\text{ cm} \cdot 5\text{ cm}}{1\text{ cm}} = 30\text{ cm}$.

b) La medida del lado del cuadrado será: $\left.\begin{array}{l} 5\text{ cm} \rightarrow 12\text{ cm} \\ 6\text{ cm} \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{6\text{ cm} \cdot 12\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \frac{72}{5}\text{ cm} = 14{,}4\text{ cm}$.

Y su área será $14{,}4^2 = 207{,}36$ cm².

40. **Este es el plano de la habitación de Tomás.**



a) ¿Cabe un armario que mide 4,5 m de largo y 1 m de profundidad?

b) ¿Qué superficie queda en la habitación si se pone una cama de 150 × 200 cm?

c) ¿Caben el armario y la cama en la habitación?

a) Tomamos medidas de la habitación: 6 cm de largo y 3 cm de ancho. En la realidad la habitación mide:

$$\left.\begin{array}{l}1\text{ cm}\to 80\text{ cm}\\ 6\text{ cm}\to x\end{array}\right\}\to x=\frac{6\text{ cm}\cdot 80\text{ cm}}{1\text{ cm}}=480\text{ cm}=4{,}8\text{ m}\qquad \left.\begin{array}{l}1\text{ cm}\to 80\text{ cm}\\ 3\text{ cm}\to x\end{array}\right\}\to x=\frac{3\text{ cm}\cdot 80\text{ cm}}{1\text{ cm}}=240\text{ cm}=2{,}4\text{ m}$$

Tomamos medidas de la cama: 2,8 cm de largo y 1,4 cm de ancho. En la realidad la cama tendrá estas medidas:

$$\left.\begin{array}{l}1\text{ cm}\to 80\text{ cm}\\ 2{,}8\text{ cm}\to x\end{array}\right\}\to x=\frac{2{,}8\text{ cm}\cdot 80\text{ cm}}{1\text{ cm}}=224\text{ cm}=2{,}24\text{ m}\qquad \left.\begin{array}{l}1\text{ cm}\to 80\text{ cm}\\ 1{,}4\text{ cm}\to x\end{array}\right\}\to x=\frac{1{,}4\text{ cm}\cdot 80\text{ cm}}{1\text{ cm}}=112\text{ cm}=1{,}12\text{ m}$$

Si tenemos en cuenta la situación de la puerta y de la cama no cabe el armario.

b) $\text{Área}_{\text{Habitación}} = 4{,}8 \cdot 2{,}4 = 11{,}52\text{ m}^2$. $\text{Área}_{\text{Cama}} = 1{,}5 \cdot 2 = 3\text{ m}^2$. Por tanto, el área sobrante es $8{,}52\text{ m}^2$.

c) No, por las medidas de ambos.

41. ¿A qué escala está dibujado un hexágono regular en el que el lado mide 3 cm si la medida real es 60 cm? Halla la relación entre las áreas.

$$\left.\begin{array}{l}3\text{ cm}\to 60\text{ cm}\\ 1\text{ cm}\to x\end{array}\right\}\to x=\frac{1\text{ cm}\cdot 60\text{ cm}}{3\text{ cm}}=20\text{ cm}$$ → Por tanto, la escala es 1:20.

Llamando A_D al área del dibujo y A_R al área real, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l}A_D=\dfrac{P_D\cdot ap_D}{2}\\ A_R=\dfrac{P_R\cdot ap_R}{2}\end{array}\right\}\to \frac{A_R}{A_D}=\frac{P_R\cdot ap_R}{P_D\cdot ap_D}=\frac{20\cdot P_D\cdot 20\cdot ap_D}{P_D\cdot ap_D}=20\cdot 20=20^2$$

Área real = 400 · Área del dibujo

ACTIVIDADES FINALES

42. Considera los puntos:

$$A(0,4),\ B(6,0),\ C(5,7),\ D(4,-4)\text{ y }E(-2,-1)$$

Halla las coordenadas de los siguientes vectores.

$$\overrightarrow{AC}\quad \overrightarrow{AE}\quad \overrightarrow{BD}\quad \overrightarrow{EB}\quad \overrightarrow{CD}\quad \overrightarrow{EC}$$

$\overrightarrow{AC}=(5-0,7-4)=(5,3)$ $\quad\overrightarrow{AE}=(-2-0,-1-4)=(-2,-5)$ $\quad\overrightarrow{BD}=(4-6,-4-0)=(-2,-4)$

$\overrightarrow{EB}=(6+2,0+1)=(8,1)$ $\quad\overrightarrow{CD}=(4-5,-4-7)=(-1,-11)$ $\quad\overrightarrow{EC}=(5+2,7+1)=(7,8)$

43. Considera los puntos: $A(2,3)$ y $C(3,-1)$.

a) Halla las coordenadas de B tales que $\overrightarrow{AB}=(3,-1)$.

b) Si la segunda coordenada de B y la de D son iguales, encuentra D para que $|\overrightarrow{BD}|=8$.

c) Halla el módulo del vector $\overrightarrow{DA}$.

a) Sea $B(b_1, b_2)$ → $\overrightarrow{AB}=(3,-1)=(b_1-2,b_2-3)\to\begin{cases}3=b_1-2\\-1=b_2-3\end{cases}\to\begin{cases}5=b_1\\2=b_2\end{cases}$

b) $B(5,2)=D(d_1,2)\ \to\ |\overrightarrow{BD}|=8=\sqrt{(d_1-5)^2+(2-2)^2}=\sqrt{(d_1-5)^2}=\pm(d_1-5)\to\begin{cases}d_1=13\\d_1=-3\end{cases}\to\begin{cases}D_1(13,2)\\D_2(-3,2)\end{cases}$

c) $\overrightarrow{D_1A}=(2-13,3-2)=(-11,1)$ $\qquad |\overrightarrow{D_1A}|=\sqrt{(-11)^2+1^2}=\sqrt{121+1}=\sqrt{122}$

$\overrightarrow{D_2A}=(2+3,3-2)=(5,1)$ $\qquad |\overrightarrow{D_2A}|=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$

44. **Los vértices de un rectángulo son:**

$$A(-4, 4), B(2, 4), C(2, 1) \text{ y } D(-4, 1)$$

a) Halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{DA}$.

b) Halla el módulo de las diagonales del rectángulo.

a) $\overrightarrow{AB} = (6, 0)$ $\quad \overrightarrow{BC} = (0, -3)$ $\quad \overrightarrow{CD} = (-6, 0)$ $\quad \overrightarrow{DA} = (0, 3)$

b) $\overrightarrow{AC} = (6, -3)$ $\quad \overrightarrow{BD} = (-6, -3)$ $\quad \left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45}$ $\quad \left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45}$

45. **¿Qué significa que una de las dos coordenadas de un vector sea cero?**

Si la primera coordenada es 0, el vector tiene dirección vertical, y sentido hacia arriba si la 2.ª coordenada es positiva y sentido hacia abajo si la 2.ª coordenada es negativa.
Si la segunda coordenada es 0, el vector tiene dirección horizontal, y sentido hacia la derecha si la 1.ª coordenada es positiva y sentido hacia la izquierda si la 1.ª coordenada es negativa.

46. **Indica, observando este dibujo, si las siguientes figuras se han obtenido mediante un movimiento o no. Razona tu respuesta.**

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Las figuras 1 y 2 conservan la forma y el tamaño, por lo que se han obtenido mediante un movimiento. Las figuras 3 y 4, no; la figura 3 no conserva ni la forma ni el tamaño, y la figura 4 conserva la forma pero no el tamaño.

47. **Dibuja, a partir de las figuras, otras figuras en las que se conserve lo indicado.**

a) El tamaño

b) La forma

c) El tamaño y la forma

d) Ni el tamaño ni la forma

a)


b)


c)

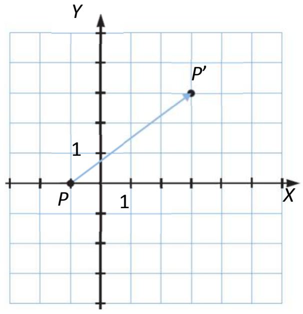

d)


48. **Dibuja y obtén el trasladado del punto *P* por el vector $\vec{v}$ en cada caso:**

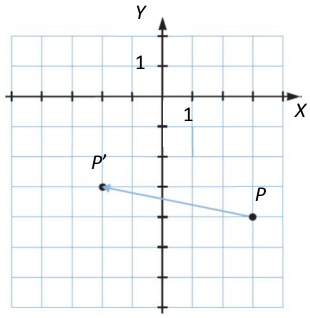
a) $P(-1, 0)$ y $\vec{v} = (4, 3)$ c) $P(3, -4)$ y $\vec{v} = (-5, 1)$

b) $P(4, -3)$ y $\vec{v} = (1, -5)$ d) $P(-2, 6)$ y $\vec{v} = (-3, -2)$

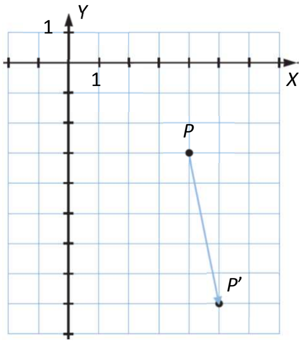
a) $P(-1,0) \xrightarrow{\vec{v}} P'(3,3)$



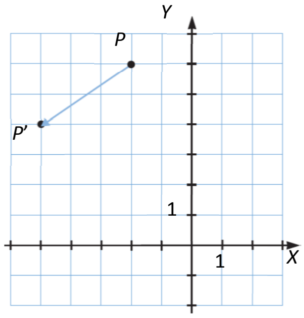
c) $P(3,-4) \xrightarrow{\vec{v}} P'(-2,-3)$



b) $P(4,-3) \xrightarrow{\vec{v}} P'(5,-8)$



d) $P(-2,6) \xrightarrow{\vec{v}} P'(-5,4)$

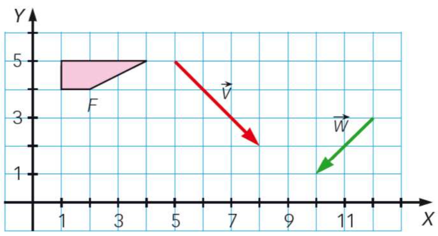


49. **Halla el vector de traslación que transforma *P* en *P′*.**

a) $P(2, -1), P'(-1, 3)$ b) $P(-5, 0), P'(0, -2)$

a) $\vec{v} = (-3,4)$ b) $\vec{v} = (5,-2)$

50. **Obtén la figura *F′* transformada de la figura *F* por una traslación de vector $\vec{v}$. Después, halla la transformada de *F′* por la traslación de vector $\vec{w}$, *F″*.**



a) ¿Puedes pasar directamente de *F* a *F″* con una traslación? Si crees que sí, dibuja el vector de dicha traslación y escribe sus coordenadas.

b) Escribe las coordenadas de $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y suma sus abscisas y ordenadas. ¿Qué relación tiene el resultado con el del apartado anterior?

$\vec{v} = (8, 2) - (5, 5) = (3, -3)$

Los puntos de F se convertirán en:

$A(1, 5) \xrightarrow{\vec{v} = (3, -3)} A'(4, 2)$

$B(4, 5) \longrightarrow B'(7, 2)$

$C(2, 4) \longrightarrow C'(5, 1)$

$D(1, 4) \longrightarrow D'(4, 1)$

$\vec{w} = (10, 1) - (12, 3) = (-2, -2)$

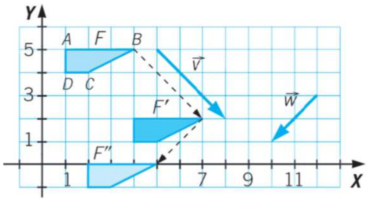
Los puntos de F' se convertirán en:

$A'(4, 2) \xrightarrow{\vec{w} = (-2, -2)} A''(2, 0)$

$B'(7, 2) \longrightarrow B''(5, 0)$

$C'(5, 1) \longrightarrow C''(3, -1)$

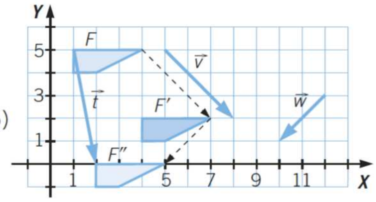
$D'(4, 1) \longrightarrow D''(2, -1)$



a) Sí, porque mantienen la forma y el tamaño. Lo comprobamos con la transformación de un punto de *F* en *F''* y lo aplicamos a los otros tres puntos de *F*.

$A(1, 5) \xrightarrow{\vec{t} = (x, y)} A''(2, 0)$

$$\left.\begin{array}{r} 1 + x = 2 \rightarrow x = 1 \\ 5 + y = 0 \rightarrow y = -5 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{t} = (1, -5)$$



Si aplicamos el vector $\vec{t}$ a los otros tres puntos de F:

$B(4, 5) \xrightarrow{\vec{t} = (1, -5)} B''(5, 0)$

$C(2, 4) \longrightarrow C''(3, -1)$

$D(1, 4) \longrightarrow D''(2, -1)$

Vemos que coinciden con los puntos obtenidos mediante los dos movimientos.

b) $\vec{v} + \vec{w} = (3, -3) + (-2, -2) = (1, -5)$

Se trata del vector $\vec{t}$ obtenido en el apartado a).

51. **Dibuja los siguientes elementos geométricos y sus transformados por el vector de traslación $\vec{v} = (3, -4)$.**

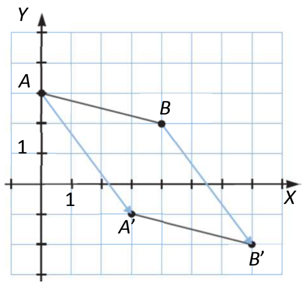
a) Segmento *AB*: *A*(0, 3) y *B*(4, 2).

b) Triángulo *ABC*: *A*(2, −3), *B*(4, 1) y *C*(1, 2).

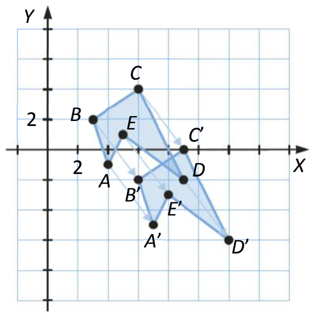
c) Pentágono *ABCDE*: *A*(4, −1), *B*(3, 2), *C*(6, 4), *D*(9, −2) y *E*(5, 1).

d) Círculo de centro *C*(−3, 2) y radio $r = 2$.

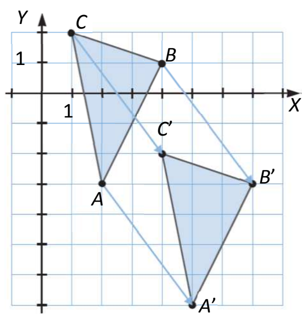
a)



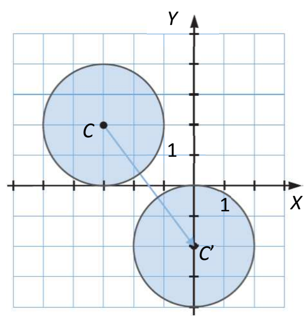
c)



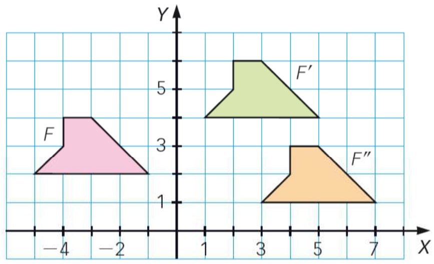
b)



d)

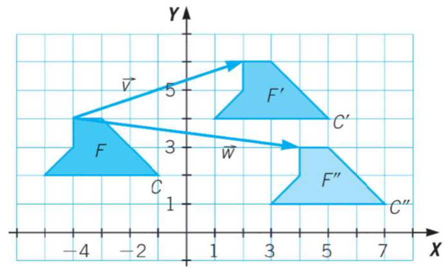


52. **Determina gráficamente los vectores de las traslaciones que transforman la figura *F* en *F′* y *F″*, respectivamente. Obtén también sus coordenadas.**



Tomamos el vértice superior izquierdo de las tres figuras:

En $F \to A(-4, 4)$
En $F' \to A'(2, 6)$ $\to \vec{v} = (2 - (-4), 6 - 4) = (6, 2)$
En $F'' \to A''(4, 3)$ $\to \vec{w} = (4 - (-4), 3 - 4) = (8, -1)$



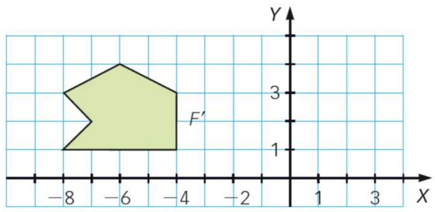
Lo comprobamos transformando el vértice derecho de la figura F:

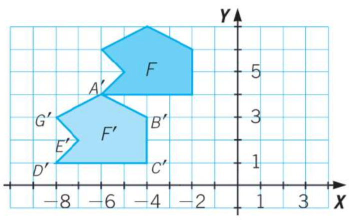
$$C(-1, 2) \xrightarrow{\vec{v} = (6, 2)} C'(5, 4)$$

$$C(-1, 2) \xrightarrow{\vec{w} = (8, -1)} C''(7, 1)$$

que corresponden a las coordenadas de los picos de F' y F''.

53. **Halla la figura *F* que ha dado lugar a la figura *F′*, al aplicarle una traslación de vector $\vec{v} = (-2, -3)$. Antes de hacerlo, determina cuáles serán las coordenadas de los vértices de la figura *F*.**





$$A(x_1, y_1) \xrightarrow{\vec{v} = (-2, -3)} A'(-6, 4) \to \begin{cases} x_1 - 2 = -6 \to x_1 = -4 \\ y_1 - 3 = 4 \longrightarrow y_1 = 7 \end{cases}$$

$$B(x_2, y_2) \xrightarrow{\vec{v} = (-2, -3)} B'(-4, 3) \to \begin{cases} x_2 - 2 = -4 \to x_2 = -2 \\ y_2 - 3 = 3 \longrightarrow y_2 = 6 \end{cases}$$

$$C(x_3, y_3) \xrightarrow{\vec{v} = (-2, -3)} C'(-4, 1) \to \begin{cases} x_3 - 2 = -4 \to x_3 = -2 \\ y_3 - 3 = 1 \longrightarrow y_3 = 4 \end{cases}$$

$$D(x_4, y_4) \xrightarrow{\vec{v} = (-2, -3)} D'(-8, 1) \to \begin{cases} x_4 - 2 = -8 \to x_4 = -6 \\ y_4 - 3 = 1 \longrightarrow y_4 = 4 \end{cases}$$

$$E(x_5, y_5) \xrightarrow{\vec{v} = (-2, -3)} E'(-7, 2) \to \begin{cases} x_5 - 2 = -7 \to x_5 = -5 \\ y_5 - 3 = 2 \longrightarrow y_5 = 5 \end{cases}$$

$$G(x_6, y_6) \xrightarrow{\vec{v} = (-2, -3)} G'(-8, 3) \to \begin{cases} x_6 - 2 = -8 \to x_6 = -6 \\ y_6 - 3 = 3 \longrightarrow y_6 = 6 \end{cases}$$

54. ¿Qué observas al hallar los vectores de traslación que transforman *P* en *P′*, *P′* en *P″* y *P* en *P″*?

a) $P(-3, -1)$ $P'(2, 0)$ $P''(3, 8)$

b) $P(4, 2)$ $P'(-1, 3)$ $P''(-2, -2)$

Sea $\vec{v}$ el vector de traslación que transforma *P* en *P'*; sea $\vec{u}$ el vector de traslación que transforma *P'* en *P''* y sea $\vec{w}$ el vector de traslación que transforma *P* en *P''*.

a) $\vec{v}=(5,1)$ $\vec{u}=(1,8)$ $\vec{w}=(6,9)\rightarrow\vec{v}+\vec{u}=\vec{w}$

b) $\vec{v}=(-5,1)$ $\vec{u}=(-1,-5)$ $\vec{w}=(-6,-4)\rightarrow\vec{v}+\vec{u}=\vec{w}$

55. Dado el triángulo $\widehat{ABC}$: *A*(−2, −1), *B*(2, 6) y *C*(6, −4).

a) ¿En qué puntos se transforman *B* y *C* mediante la traslación que transforma *A* en *B*?

b) ¿En qué puntos se transforman *A* y *C* mediante la traslación que transforma *B* en *C*?

c) ¿En qué puntos se transforman *A* y *B* en la traslación que transforma *C* en *A*?

a) $\overrightarrow{AB}=(4,7)$

$$B(2,6)\xrightarrow{\overrightarrow{AB}}B'(6,13)$$
$$C(6,-4)\xrightarrow{\overrightarrow{AB}}C'(10,3)$$

b) $\overrightarrow{BC}=(4,-10)$

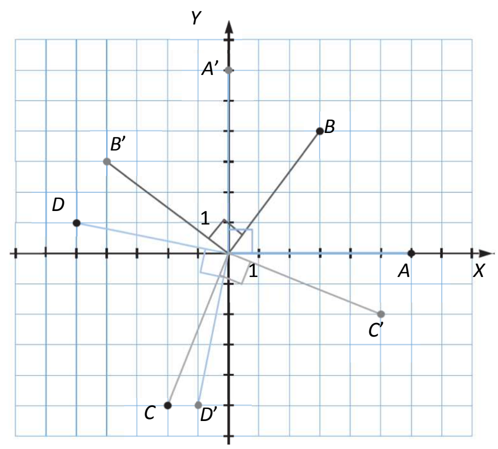
$$A(-2,-1)\xrightarrow{\overrightarrow{BC}}A'(2,-11)$$
$$C(6,-4)\xrightarrow{\overrightarrow{BC}}C'(10,-14)$$

c) $\overrightarrow{CA}=(-8,3)$

$$A(-2,-1)\xrightarrow{\overrightarrow{CA}}A'(-10,2)$$
$$B(2,6)\xrightarrow{\overrightarrow{CA}}B'(-6,9)$$

56. Dibuja el punto transformado de estos puntos por un giro de centro el origen de coordenadas y ángulo de 90°.

***A*(6, 0)** ***B*(3, 4)** ***C*(−2, −5)** ***D*(−5, 1)**



57. **Dibuja los puntos y el segmento que forman *A* y *B*. Halla su transformado por un giro de 90° de centro *C*(−1, −2).**

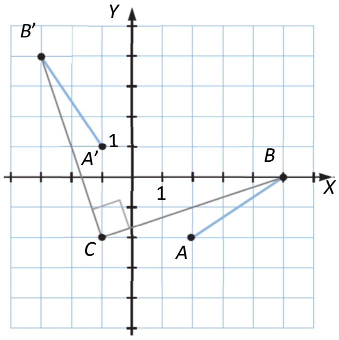
a) $A(2, -2)$, $B(5, 0)$

b) $A(-11, -1)$, $B(-8, 2)$

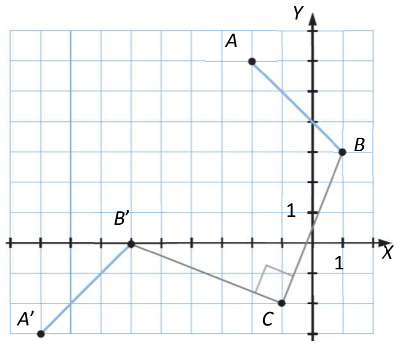
c) $A(-2, 6)$, $B(1, 3)$

d) $A(0, 0)$, $B(-1, -2)$

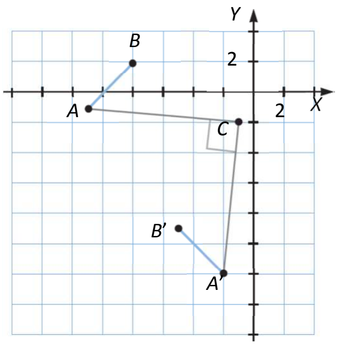
a)



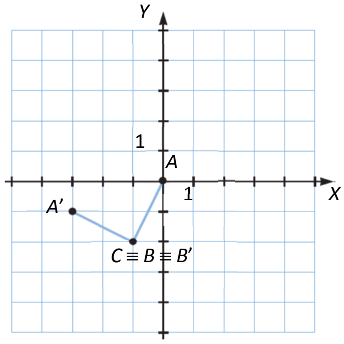
c)



b)



d)

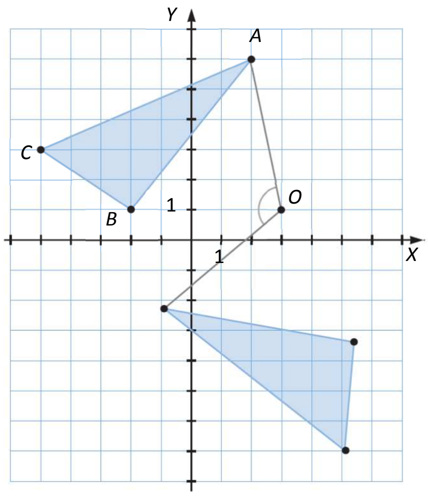


58. **Dibuja estos elementos y sus transformados por el giro de centro *O*(3, 1) y ángulo 120°.**

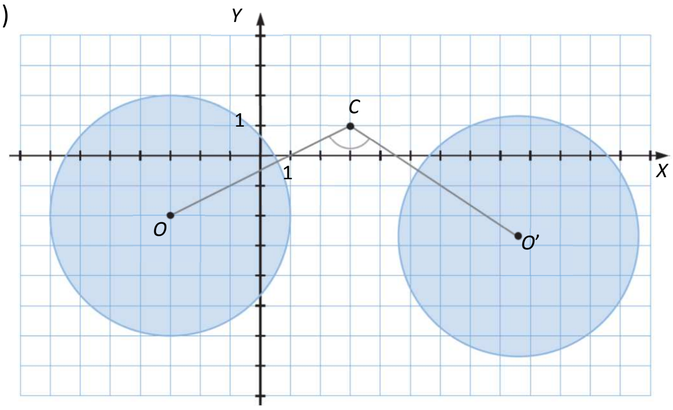
a) Triángulo de vértices: $A(2, 6)$, $B(-2, 1)$ y $C(-5, 3)$.

b) Círculo de centro $C(-3, -2)$ y radio $r = 4$.

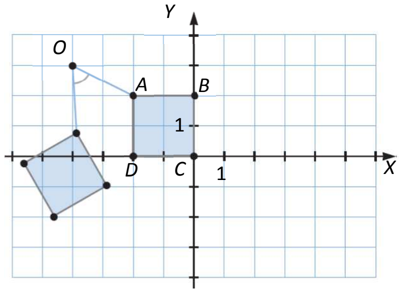
a)



b)



59. **Dibuja el cuadrilátero *ABCD*, *A*(−2, 2), *B*(0, 2), *C*(0, 0) y *D*(−2, 0) y aplícale un giro de centro *O*(−4, 3) y ángulo −60°.**



60. **Obtén la transformación que aplica varios giros al punto *P*(3, 5) con el mismo centro *C*(0, 0).**

a) Dos giros, uno de 40° y otro de 40°.

b) Tres giros, uno de 60°, otro de 30° y el último de 90°.

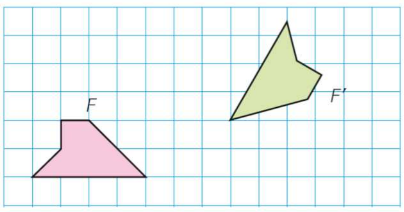
c) Dos giros, uno de −30° y otro de 120°.

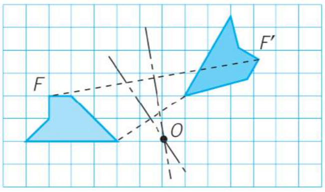
a) Giro de centro *C*(0, 0) y ángulo 80º.

b) Giro de centro *C*(0, 0) y ángulo 180º.

c) Giro de centro *C*(0, 0) y ángulo 90º.

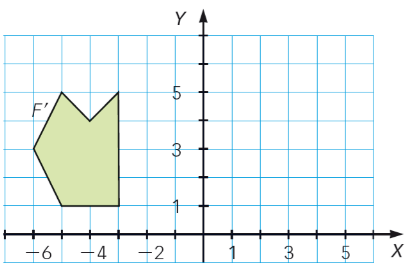
61. **Determina el centro y el ángulo del giro que transforma *F* en *F*′.**





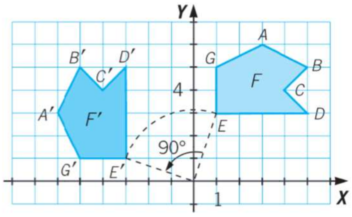
El centro *O* es el de la figura. El ángulo del giro es de –120º, aproximadamente.

62. **Halla la figura *F* de la que procede la figura *F*′ al aplicarle un giro de centro el origen y ángulo de 90°.**



Al aplicar un giro de 90° a los vértices de F, se cumple que:

$A(x_1, y_1) \rightarrow A'(-6, 3) \rightarrow x_1 = 3, y_1 = 6$
$B(x_2, y_2) \rightarrow B'(-5, 5) \rightarrow x_2 = 5, y_2 = 5$
$C(x_3, y_3) \rightarrow C'(-4, 4) \rightarrow x_3 = 4, y_3 = 4$
$D(x_4, y_4) \rightarrow D'(-3, 5) \rightarrow x_4 = 5, y_4 = 3$
$E(x_5, y_5) \rightarrow E'(-3, 1) \rightarrow x_5 = 1, y_5 = 3$
$G(x_6, y_6) \rightarrow G'(-5, 1) \rightarrow x_6 = 1, y_6 = 5$



63. Indica los dos transformados de estos puntos por una simetría respecto a ambos ejes de coordenadas.

$A(2, 0)$ $B(6, 2)$ $C(0, 8)$ $D(-1, 4)$
$E(-5, 0)$ $F(-3, -4)$ $G(0, -9)$ $H(2, -6)$

Punto	Simétrico respecto al eje *X*	Simétrico respecto al eje *Y*
$A(2, 0)$	(2, 0)	(–2, 0)
$B(6, 2)$	(6, –2)	(–6, 2)
$C(0, 8)$	(0, –8)	(0, 8)
$D(–1, 4)$	(–1, –4)	(1, 4)
$E(–5, 0)$	(–5, 0)	(5, 0)
$F(–3, –4)$	(–3, 4)	(3, –4)
$G(0, –9)$	(0, 9)	(0, –9)
$H(2, –6)$	(2, 6)	(–2, –6)

64. Halla el transformado por el movimiento indicado del triángulo *ABC*: $A(-1, 6)$, $B(-2, 1)$ y $C(-5, 3)$.

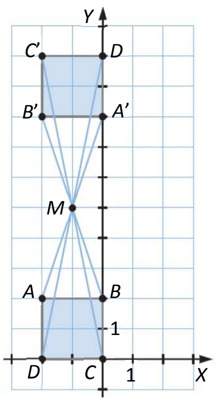
a) Simetría central respecto del origen, $O(0, 0)$.
b) Simetría central de centro el punto $D(4, 2)$.
c) Simetría respecto al eje de ordenadas.

a) $A'(1, -6)$ $B'(2, -1)$ $C'(5, -3)$ b) $A'(9, -2)$ $B'(10, 3)$ $C'(13, 1)$ c) $A'(1, 6)$ $B'(2, 1)$ $C'(5, 3)$

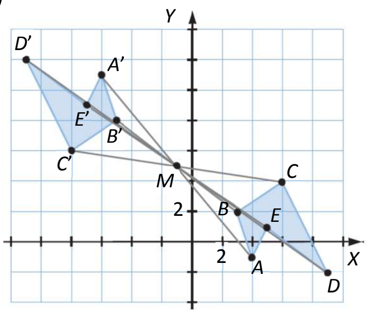
65. Realiza una simetría central respecto al punto $M(-1, 5)$, a cada una de las figuras.

a) Cuadrado *ABCD*: $A(-2, 2)$, $B(0, 2)$, $C(0, 0)$ y $D(-2, 0)$.
b) Polígono de vértices: $A(4, -1)$, $B(3, 2)$, $C(6, 4)$, $D(9, -2)$ y $E(5, 1)$.

a)



b)

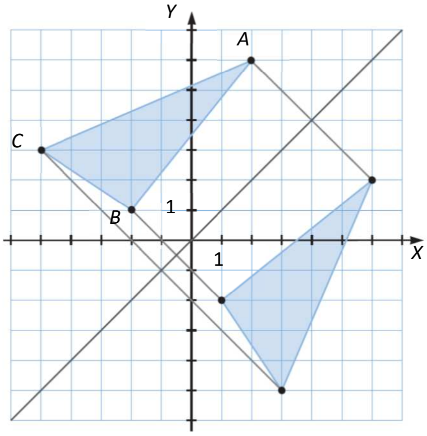


66. **Construye la figura simétrica respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.**

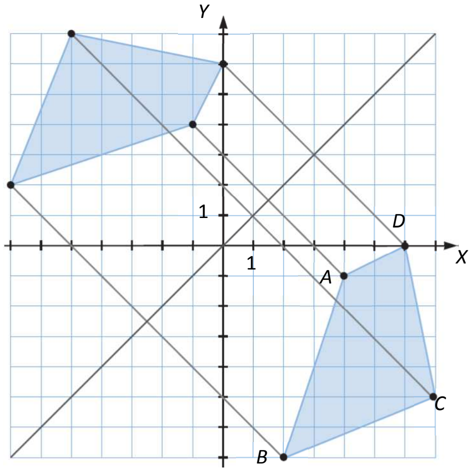
a) Triángulo: $A(2, 6)$, $B(-2, 1)$ y $C(-5, 3)$.

b) Cuadrilátero: $A(4, -1)$, $B(2, -7)$, $C(7, -5)$ y $D(6, 0)$.

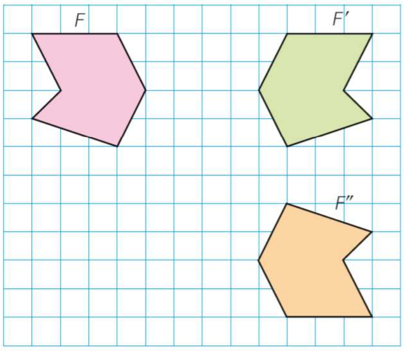
a)

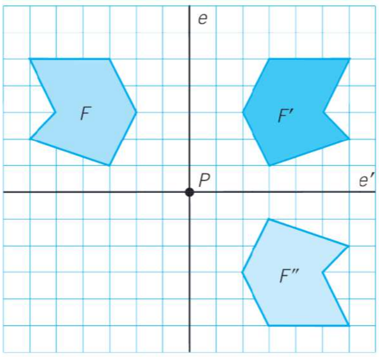


b)



67. **Determina el centro de simetría que transforma *F* en *F′* y *F′* en *F″*, y el eje de simetría que realiza las mismas transformaciones.**



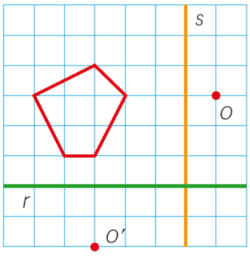


La simetría respecto al eje *e* transforma *F* en *F′* y la simetría respecto a *e′* transforma *F′* en *F″*.

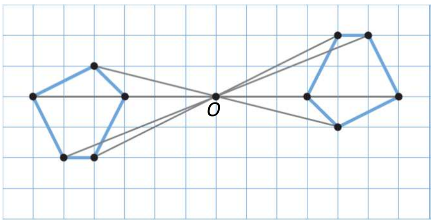
La simetría respecto al punto *P* transforma *F* en *F″*.

68. **Considera el pentágono *ABCDE*.**
Dibuja los siguientes simétricos del pentágono:

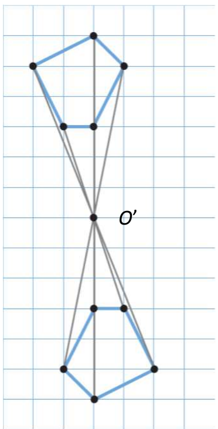
a) El simétrico respecto al centro de simetría *O*.
b) El simétrico respecto al centro de simetría *O'*.
c) El simétrico respecto a *r* como eje de simetría.
d) El simétrico respecto a *s* como eje de simetría.



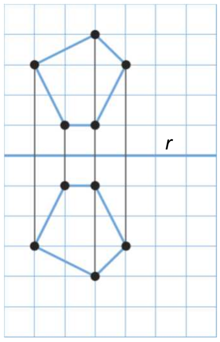
a)



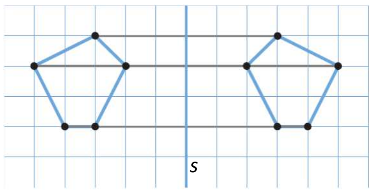
b)



c)



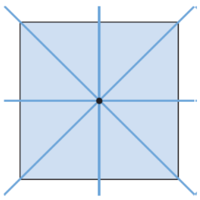
d)



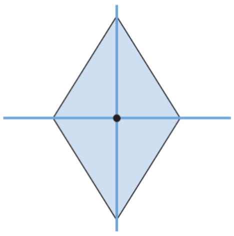
70. **Dibuja los ejes de simetría y el centro de estas figuras.**

a) Un cuadrado
b) Un rombo
c) Un rectángulo
d) Un trapecio isósceles
e) Un triángulo isósceles
f) Un hexágono regular

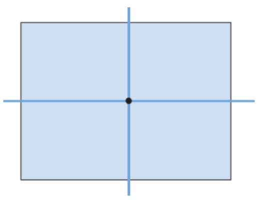
a)



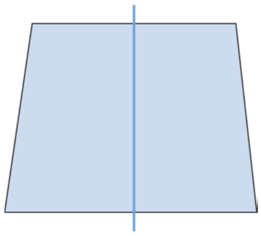
b)



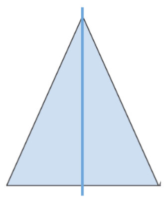
c)



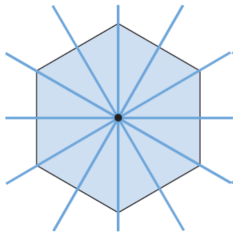
d)



e)



f)



71. **Dado el triángulo cuyos lados miden 3, 6 y 8 cm, respectivamente, calcula:**

a) La longitud de los lados de otro triángulo semejante a este con razón de semejanza $k = 2$.

b) La longitud de los lados de otro triángulo semejante con razón de semejanza $k = \frac{1}{2}$.

c) ¿Cuál es la razón de semejanza que hay entre los dos triángulos transformados?

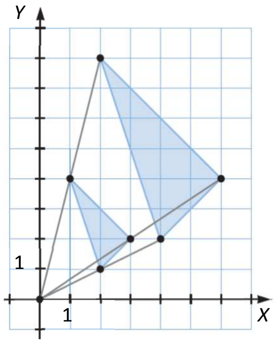
a) 6 cm, 12 cm y 16 cm   b) 1,5 cm, 3 cm y 4 cm   c) $k = 4$

72. **Dibuja los polígonos que se detallan a continuación y los que se obtienen aplicándoles una homotecia de centro $O(0, 0)$ y razón $k = 2$.**

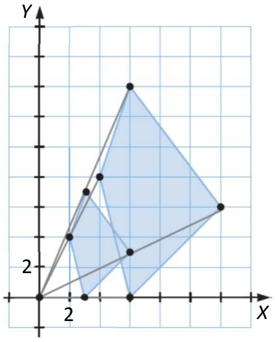
a) Triángulo ABC: $A(1, 4)$, $B(2, 1)$ y $C(3, 2)$.

b) Cuadrilátero $ABCD$: $A(3, 0)$, $B(6, 3)$, $C(2, 4)$ y $D(3, 7)$.

a)

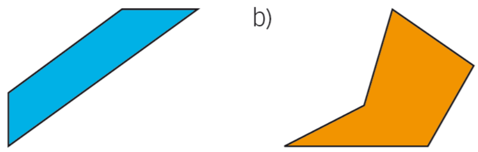


b)



74. **Construye dos figuras semejantes a estas con razones de semejanza 3 y $\frac{1}{2}$, respectivamente.**

a) b)



a) b)

75. **$A(1, 3)$, $B(4, 1)$ y $C(3, 4)$ son los vértices de un triángulo. Construye los siguientes transformados:**

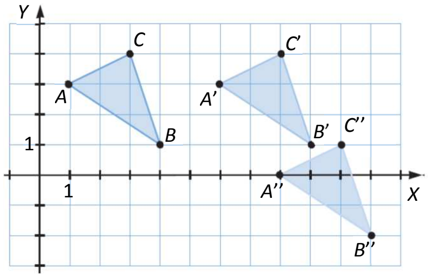
a) Traslación de vector $\vec{v} = (5, 0)$ seguida de otra traslación de vector $\vec{v} = (2, -3)$.

b) Homotecia de centro $O(0, 0)$ y razón $k = 4$ seguida de un giro de centro A' y ángulo de 90°.

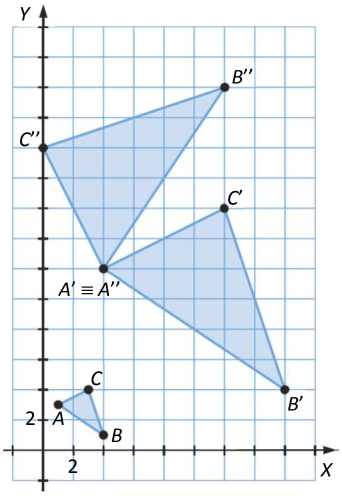
c) Simetría de eje el eje de ordenadas y una homotecia de centro $O(-3, 0)$ y razón $k = 3$.

d) Giro de centro $O(-1, 5)$ y ángulo de $-120°$ y una simetría de eje la bisectriz del 2.° y 4.° cuadrantes.

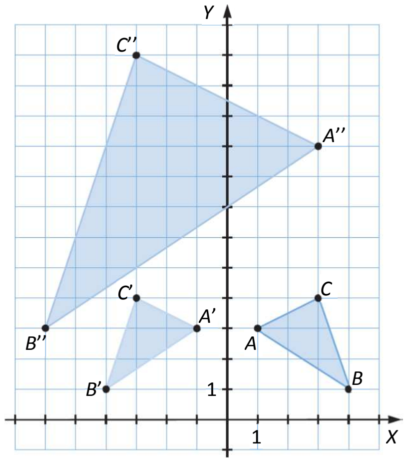
a)



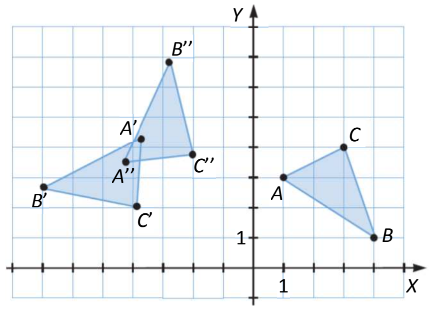
b)



c)



d)



76. **Los lados de un rectángulo miden 4 y 7 cm, y es semejante a otro cuyo perímetro es 132 cm.**

a) Halla las dimensiones del segundo rectángulo.

b) Calcula la razón de semejanza entre ambos rectángulos.

a) Perímetro del rectángulo de lados 4 y 7 cm: $(4 + 7) \cdot 2 = 22$ cm.

Perímetro del rectángulo semejante: $132 = 22k$ de donde $k = 6$. Por tanto, las dimensiones del rectángulo semejante son: $4k = 4 \cdot 6 = 24$ cm y $7k = 7 \cdot 6 = 42$ cm.

b) $k = 6$

77. **Razona si es verdadero o falso:**

a) Todos los triángulos rectángulos son semejantes.

b) Si la razón de semejanza de dos figuras es r, entonces una figura es la transformada de la otra en una homotecia de razón r.

c) Si los lados de dos hexágonos regulares son proporcionales, entonces son semejantes.

d) Si la razón de semejanza entre dos cuadrados es m, la razón entre sus perímetros es $4m$ y entre sus áreas es m^2.

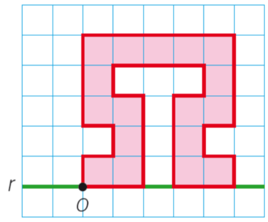
a) Falso, los ángulos agudos pueden ser diferentes.

b) Verdadero

c) Verdadero

d) Falso, la razón entre los perímetros es m, no $4m$.

78. **Construye, en cada caso, un friso a partir de la figura que se da y siguiendo las indicaciones.**

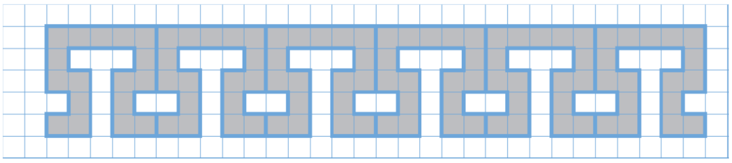


a) Utilizar una traslación de vector $\vec{v} = (5, 0)$.

b) Realizar un giro de 90° con centro en O y una traslación de vector $\vec{u} = (7, 0)$.

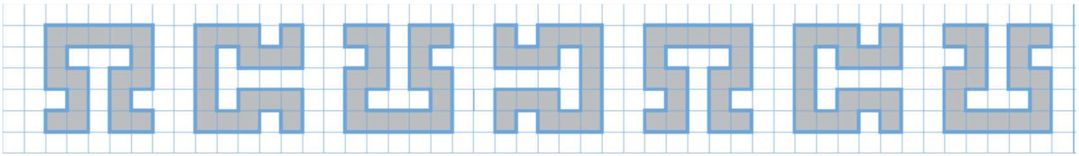
c) Aplicar una simetría axial respecto de la recta r y una traslación de vector $\vec{w} = (8, 0)$.

a)

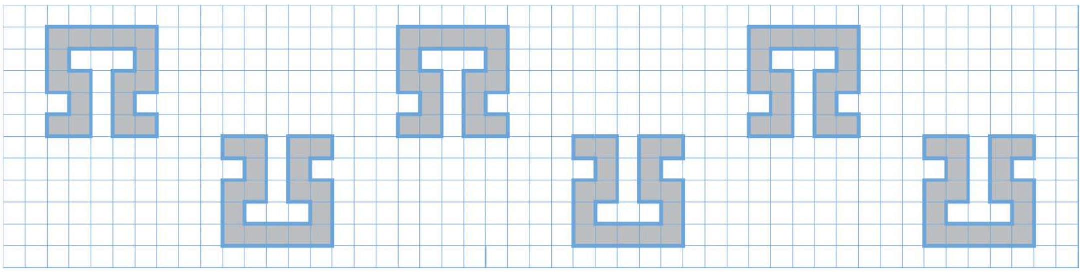


b) Con estos dos movimientos las figuras se solapan y no se forma un friso.

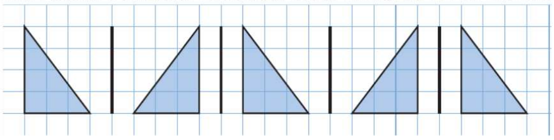
Bastaría cambiar el centro de giro por el centro de la figura, y se obtendía:



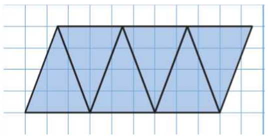
c)



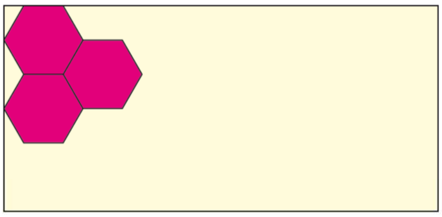
79. **Dibuja el friso que se obtiene a partir de un triángulo rectángulo aplicándole una tras otra simetrías axiales respecto de una recta vertical situada una unidad a su derecha.**

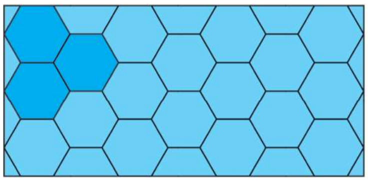


80. **Dibuja el friso que se obtiene a partir de un triángulo isósceles aplicándole uno tras otro giros de ángulo $-180°$ con centro en el punto medio de uno de los lados de igual medida.**

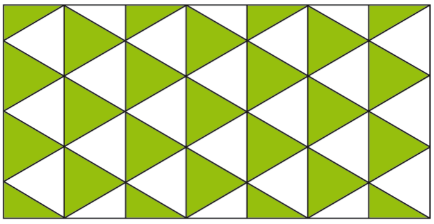


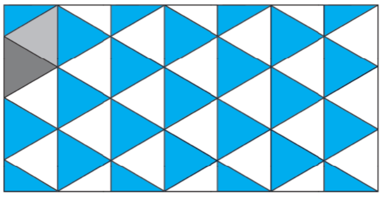
81. **Completa en tu cuaderno el mosaico formado por hexágonos que ves a la derecha.**





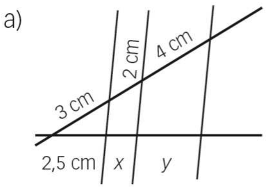
82. **Identifica qué movimientos intervienen en este mosaico.**

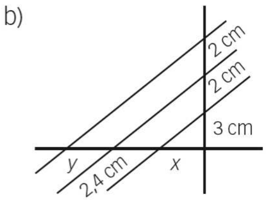




Los movimientos que intervienen son dos giros de 120º cada uno y una traslación.

83. **Halla las medidas desconocidas.**





a) $\frac{3}{2{,}5} = \frac{2}{x} = \frac{4}{y} \rightarrow x = \frac{5}{3}$ cm, $y = \frac{10}{3}$ cm

b) $\frac{3}{x} = \frac{2}{2{,}4} = \frac{2}{y} \rightarrow x = 3{,}6$ cm; $y = 2{,}4$ cm

84. **El lado desigual de un triángulo isósceles mide 3 cm y los lados iguales miden 8 cm.**
Calcula la medida del lado desigual de un triángulo isósceles semejante al anterior cuyos lados iguales miden 14 cm.

$\frac{8}{14} = \frac{3}{x} \rightarrow x = 5{,}25$ cm

85. Averigua si son semejantes estos triángulos:

I. 4 cm; 7 cm y 9 cm

II. 3 cm; 4 cm y 6 cm

III. 6,75; 9 cm y 13 cm

IV. 6 cm; 10,5 y 13,5 cm

Son semejantes I y IV: $\frac{6}{4}=\frac{10,5}{7}=\frac{13,5}{9}=1,5$

No son semejantes I y II: $\frac{4}{3}\neq\frac{7}{4}\neq\frac{9}{6}$

No son semejantes I y III: $\frac{4}{6,75}\neq\frac{7}{9}\neq\frac{9}{13}$

No son semejantes II y III: $\frac{3}{6,75}=\frac{4}{9}\neq\frac{6}{13}$

No son semejantes II y IV: $\frac{3}{6}\neq\frac{4}{10,5}\neq\frac{6}{13,5}$

No son semejantes III y IV: $\frac{6}{6,75}\neq\frac{10,5}{9}\neq\frac{13,5}{13}$

86. Halla la medida de los catetos y de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de perímetro 37,17 cm semejante a otro de catetos 5 cm y 2 cm.

La hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos 5 cm y 2 cm mide $\sqrt{25+4}=\sqrt{29}=5,39\text{ cm}$, con lo que el perímetro es 5 + 2 + 5,39 = 12,39 cm.

La razón de semejanza entre los dos triángulos es $k=\frac{37,17}{12,39}=3$.

Así, los catetos pedidos miden 5 · 3 = 15 cm y 2 · 3 = 6 cm; y la hipotenusa mide 5,39 · 3 = 16,17 cm.

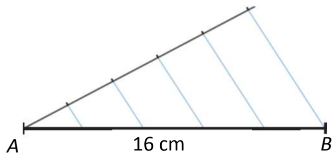
87. Divide gráficamente cada segmento.

a) Segmento de longitud 16 cm en 5 partes iguales.

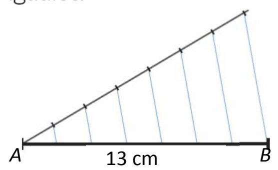
b) Segmento de longitud 13 cm en 7 partes iguales.

c) Segmento de longitud 20 cm en 15 partes iguales.

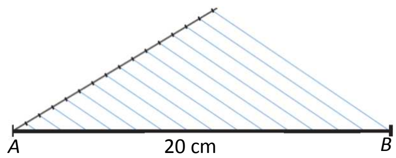
a)



b)



c)



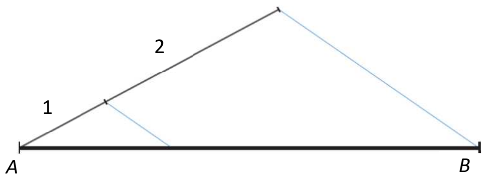
88. Divide un segmento de 12 cm.

a) En partes proporcionales a 1 y 2.

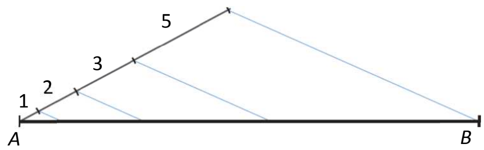
b) En partes proporcionales a 2, 3 y 4.

c) En partes proporcionales a 1, 2, 3 y 5.

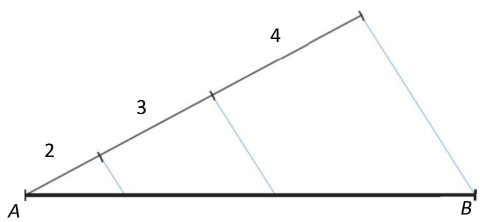
a)



c)



b)



89. **La escala de un mapa es 1 : 400 000. Halla:**

a) La distancia real que separa dos ciudades si en el mapa es 11 cm.

b) La distancia en el mapa de dos localidades que en la realidad se distancian 236 km.

a) Hacemos la regla de tres correspondiente:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \to 400\,000 \\ 11 \to x \end{array}\right\} \to x = 4\,400\,000 \text{ cm} = 44 \text{ km}$$

b) Hacemos la regla de tres correspondiente:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \to 400\,000 \text{ cm} = 4 \text{ km} \\ y \to 236 \text{ km} \end{array}\right\} \to y = \frac{236}{4} = 59 \text{ cm}$$

90. **En el plano de una casa cada metro de la vivienda mide 0,5 cm. Calcula:**

a) La escala a la que se ha realizado el plano.

b) Dimensiones reales de una habitación que en el plano mide 1,75 cm de ancho y 2,5 cm de largo.

c) Dimensiones en el plano de la terraza cuadrada de la vivienda que ocupa una superficie de 16 m².

a) Hacemos la regla de tres correspondiente:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}5 \to 1 \text{ m} = 100 \text{ cm} \\ 1 \to x \end{array}\right\} \to x = 200 \text{ cm} \quad \to \quad \text{La escala es } 1:200$$

b) Hacemos la regla de tres correspondiente:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \to 200 \text{ cm} = 2 \text{ m} \\ 1{,}75 \text{ cm} \to x \end{array}\right\} \to x = 1{,}75 \cdot 2 = 3{,}5 \text{ m} \qquad \left.\begin{array}{l} 1 \to 200 \text{ cm} = 2 \text{ m} \\ 2{,}5 \text{ m} \to y \end{array}\right\} \to y = 2{,}5 \cdot 2 = 5 \text{ m}$$

c) Área = 16 m² ⟶ lado = 4 m

$$\left.\begin{array}{l} 1 \to 200 \text{ cm} = 2 \text{ m} \\ x \to 4 \text{ m} \end{array}\right\} \to x = 4:2 = 2 \text{ m}$$ ⟶ El lado de la terraza cuadrada en el plano mide 2 cm.

91. **La carretera que va de Pedroche a Pajuelo mide 45 km. Halla esa longitud en un plano de escala:**

a) 1 : 25 000 b) 1 : 50 000 c) 1 : 350 000

a) $$\left.\begin{array}{l} 1 \to 25\,000 \text{ cm} \\ x \to 45 \text{ km} = 4\,500\,000 \text{ cm} \end{array}\right\} \to x = 180 \text{ cm}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} 1 \to 50\,000 \text{ cm} \\ x \to 45 \text{ km} = 4\,500\,000 \text{ cm} \end{array}\right\} \to x = 90 \text{ cm}$$

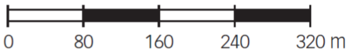
c) $$\left.\begin{array}{l} 1 \to 350\,000 \text{ cm} \\ x \to 45 \text{ km} = 4\,500\,000 \text{ cm} \end{array}\right\} \to x = 12{,}85 \text{ cm}$$

92. **¿A qué escala está dibujado un mapa en el que la distancia entre dos poblaciones es 6,2 cm y la distancia real es 372 km?**

$$\left.\begin{array}{l} 6{,}2 \text{ cm} \to 372 \text{ km} = 37\,200\,000 \text{ cm} \\ 1 \text{ cm} \to x \end{array}\right\} \to x = \frac{37\,200\,000}{6{,}2} = 6\,000\,000$$

La escala es 1:6 000 000.

93. **En un mapa aparece esta escala gráfica:**



a) ¿Cuál es su escala numérica?

b) ¿Qué distancia real separa dos puntos que en el mapa distan 8 cm?

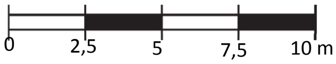
a) 1 : 8 000

b) $8 \cdot 8\,000 = 64\,000$ cm $= 640$ m

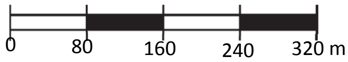
94. **Construye la escala gráfica que corresponde a estas escalas numéricas:**

a) 1 : 250 b) 1 : 8 000

a)



b)



95. **Determina la medida de cada parcela en el lado que da a la calle de las Rosas.**

$16 + 14 + 12 + 10 + 8 = 60$

$\frac{60}{90} = \frac{16}{x} = \frac{14}{y} = \frac{12}{z} = \frac{10}{w} = \frac{8}{t}$ $\frac{60}{90} = \frac{16}{x} \rightarrow x = 24$ $\frac{60}{90} = \frac{14}{y} \rightarrow y = 21$

$\frac{60}{90} = \frac{12}{z} \rightarrow z = 18$ $\frac{60}{90} = \frac{10}{w} \rightarrow w = 15$ $\frac{60}{90} = \frac{8}{t} \rightarrow t = 12$

96. **Para amueblar su casita de muñecas, Laura pide un armario y una cómoda, réplicas de las que tiene en su habitación. Calcula las dimensiones que tendrán las réplicas a una escala de 1 : 12 si las dimensiones reales del armario son 180 × 110 × 60 cm y las de la cómoda son 120 × 80 × 45 cm.**

$\left.\begin{array}{l} 1\text{ cm} \rightarrow 12\text{ cm} \\ x \rightarrow 180\text{ cm} \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{180}{12} = 15\text{ cm}$ $\left.\begin{array}{l} 1\text{ cm} \rightarrow 12\text{ cm} \\ x \rightarrow 110 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{110}{12} = 9{,}17\text{ cm}$

$\left.\begin{array}{l} 1\text{ cm} \rightarrow 12\text{ cm} \\ x \rightarrow 60 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{60}{12} = 5\text{ cm}$

Las dimensiones de la réplica del armario son $15 \times 9{,}17 \times 5$ cm.

$\left.\begin{array}{l} 1\text{ cm} \rightarrow 12\text{ cm} \\ x \rightarrow 120 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{120}{12} = 10\text{ cm}$ $\left.\begin{array}{l} 1\text{ cm} \rightarrow 12\text{ cm} \\ x \rightarrow 80 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{80}{12} = 6{,}67\text{ cm}$

$\left.\begin{array}{l} 1\text{ cm} \rightarrow 12\text{ cm} \\ x \rightarrow 45 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{45}{12} = 3{,}75\text{ cm}$

Las dimensiones de la réplica de la cómoda son $10 \times 6{,}67 \times 3{,}75$ cm.

97. Toma un papel tamaño DIN A4 (297 × 210 mm). Indica si es semejante con estos otros:

a) La mitad de esa hoja, dividiéndola al medio por su lado largo.

b) La mitad de esa hoja, dividiéndola al medio por su lado corto.

c) El doble de esa hoja, uniendo las hojas por su lado largo.

d) El doble de esa hoja, uniendo las hojas por su lado corto.

a) $\frac{297}{210}=\frac{210}{148,5}$ b) $\frac{210}{105}\neq\frac{297}{297}$ c) $\frac{297}{210}=\frac{420}{297}$ d) $\frac{210}{210}\neq\frac{594}{297}$

Son semejantes el papel de tamaño DIN A4 con el papel descrito en el apartado a) y el del apartado c).
No son semejantes al papel de tamaño DIN A4 los papeles de los apartados b) y d).

98. Considera un mapa a escala 1 : 250 000 y dos lugares que se encuentran a 50 km uno de otro. Calcula:

a) ¿Qué distancia separa a estos lugares en el mapa?

b) ¿Cuánto distan en una fotocopia reducida un 20 %?

c) ¿Cuánto distan en una fotocopia ampliada un 20 %?

d) Calcula las nuevas escalas de los nuevos mapas.

a) $\left.\begin{array}{l}1 \text{ cm} \rightarrow 250\,000 \text{ cm} = 2,5 \text{ km}\\ x \rightarrow 50 \text{ km}\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{50}{2,5} = 20 \text{ cm}$

b) $20 \cdot 0,8 = 16$ cm

c) $20 \cdot 1,2 = 24$ cm

d) En la fotocopia reducida: $\left.\begin{array}{l}0,8 \text{ cm} \rightarrow 250\,000 \text{ cm}\\ 1 \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{250\,000}{0,8} = 312\,500$, es decir, la escala es 1: 312 500.

En la fotocopia ampliada: $\left.\begin{array}{l}1,2 \text{ cm} \rightarrow 250\,000 \text{ cm}\\ 1 \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{250\,000}{1,2} = 208\,333,33$, es decir, la escala es 1: 208 333,33.

99. ¿Cuántos aumentos tiene un microscopio electrónico que permite ver una célula de 3,5 micrómetros con un diámetro de 1,75 cm?

3,5 micrómetros $= 3,5 \cdot 10^{-4}$ cm $= 0,00035$ cm

$\frac{1,75}{0,00035} = 5000$ aumentos

100. A las 18:00 h la sombra de Luis mide 2,3 m. Si su altura es 1,8 m, calcula:

a) La altura de un árbol cuya sombra en este instante mide 4 m.

b) La altura de una casa cuya sombra mide 6,75 m.

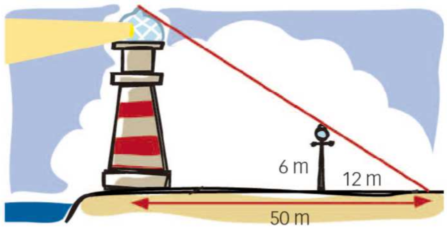
a) $\frac{4}{2,3} = \frac{\text{altura del árbol}}{1,8} \rightarrow \text{altura del árbol} = 3,13 \text{ m}$

b) $\frac{6,75}{2,3} = \frac{\text{altura de la casa}}{1,8} \rightarrow \text{altura de la casa} = 5,28 \text{ m}$

102. **La sombra de un edificio, a una determinada hora del día, medía 15 m. En ese mismo momento, la sombra de una farola de 5 m de altura medía 3 m. ¿Cuál es la altura del edificio?**

$$\frac{15}{3} = \frac{\text{altura del edificio}}{5} \to \text{altura del edificio} = 25 \text{ m}$$

103. **¿Cuál es la altura del faro?**



$$\frac{50}{12} = \frac{\text{altura del faro}}{6} \to \text{altura del faro} = 25 \text{ m}$$

104. **A las 15:00 h la sombra de Luis mide 0,8 m. Si su altura es 1,6 m, calcula:**

a) La altura de un árbol cuya sombra en este instante mide 3 m.

b) La altura de una torre cuya sombra mide 25 m.

a) $\frac{3}{0{,}8} = \frac{\text{altura del árbol}}{1{,}6} \to \text{altura del árbol} = 6 \text{ m}$

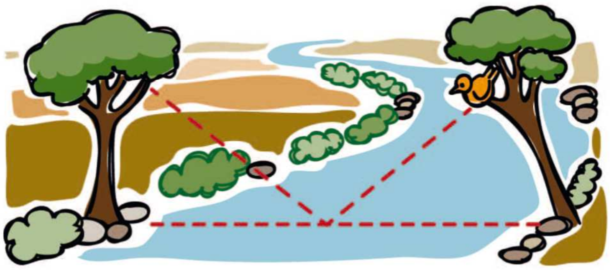
b) $\frac{25}{0{,}8} = \frac{\text{altura de la casa}}{1{,}6} \to \text{altura de la casa} = 50 \text{ m}$

105. **Se va a hacer un desvío en una carretera de forma que su trazado sea una línea recta respecto a dos poblaciones, *A* y *B*. Calcula en qué punto de la carretera habrá que hacer el desvío para que el trayecto hacia ambas poblaciones sea el mínimo.**

El desvío debe hacerse en el punto en el que se formen dos triángulos semejantes.

$$\frac{3}{x} = \frac{6}{12 - x} \to 36 - 3x = 6x \to 9x = 36 \to x = 4 \text{ km}$$

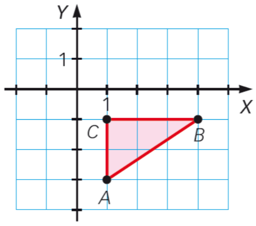
106. **Un pájaro está posado sobre la rama de un árbol (punto *A*), situado al borde de un río, y quiere pasar a otro árbol de la orilla opuesta (punto *B*), aprovechando para beber agua sin parar su vuelo. ¿Hacia qué punto del río debe dirigirse para hacer el recorrido más corto?**



Debe dirigirse hacia el punto en el que los dos triángulos que se forman con su trayectoria, el río y las alturas de los puntos, sean semejantes. Es el punto donde el pájaro ve reflejado el punto *B* en el agua.

DEBES SABER HACER

1. **Halla las coordenadas y módulos de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ de este triángulo.**



$$\overrightarrow{AB}=(4-1,-1+3)=(3,2)\rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

$$\overrightarrow{BC}=(1-4,-1+1)=(-3,0)\rightarrow\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-3)^2+0^2}=3$$

$$\overrightarrow{CA}=(1-1,-3+1)=(0,-2)\rightarrow\left|\overrightarrow{CA}\right|=\sqrt{0^2+(-2)^2}=2$$

2. **Al aplicar a *A*(5, 1) una traslación se obtiene *B*(3, −2). ¿Cuál es su vector de traslación $\vec{v}$? Al aplicar a *B* una traslación de vector $\vec{u}=(-4, 6)$ se obtiene *C*, ¿cuáles son las coordenadas de *C*? ¿Qué vector de traslación transforma *A* en *C*?**

$$A(5,1)\xrightarrow{\vec{v}}B(3,-2)$$

$$\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(3-5,-2-1)=(-2,-3)$$

$$A(5,1)\xrightarrow{\vec{w}=?}C(-1,4)$$

$$\vec{w}=(-1-5,4-1)=(-6,3)=\vec{v}+\vec{u}$$

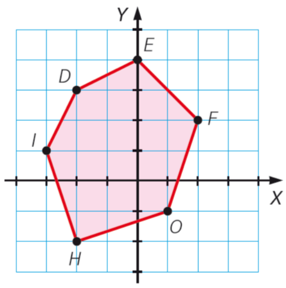
$$B(3,-2)\xrightarrow{\vec{u}=(-4,6)}C$$

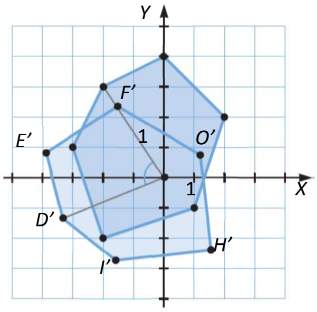
$$C(3-4,-2+6)=C(-1,4)$$

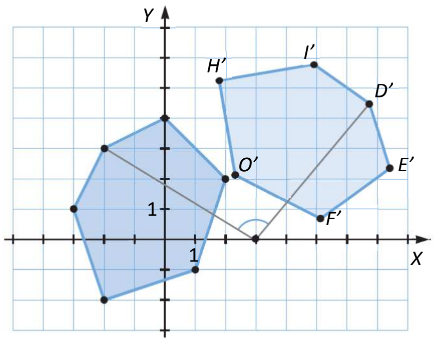
3. **Gira la figura de la imagen:**

a) Mediante un giro de centro el origen de coordenadas y ángulo de 80°.

b) Mediante un giro de centro el punto *C*(3, 0) y ángulo de −100°.



a) 

b) 

4. Halla las coordenadas del transformado del segmento de extremos $A(4, -3)$ y $B(0, 2)$:

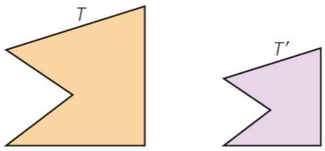
a) Por una simetría de centro el punto $C(0, -3)$.

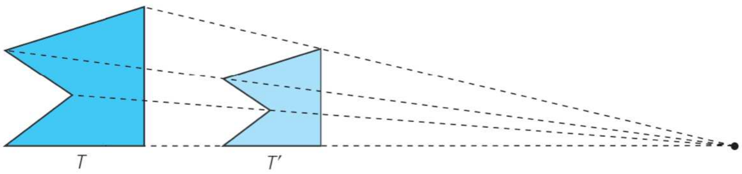
b) Por una simetría de eje la recta vertical que pasa por B.

c) Por una simetría de eje el eje de abscisas.

a) $A'(-4,-3)$ y $B'(0,-8)$ b) $A'(-4,-3)$ y $B' = B$ c) $A'(4,3)$ y $B'(0,-2)$

5. Las figuras T y T' son semejantes. Halla el centro y la razón de la homotecia.





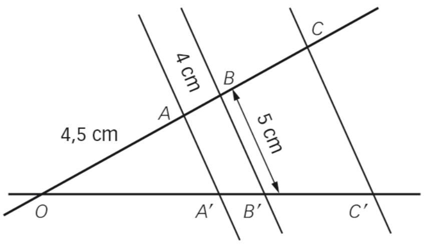
La razón de la homotecia es 0,7.

6. En esta figura se cumple que la razón $\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = 0{,}8$. Calcula $\overline{OA'}$, $\overline{A'B'}$ y $\overline{CC'}$.

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{4{,}5}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = 0{,}8 \rightarrow \overline{OA'} = \frac{4{,}5}{0{,}8} = 5{,}625 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{4}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = 0{,}8 \rightarrow \overline{A'B'} = \frac{4}{0{,}8} = 5 \text{ cm}$$

$\overline{CC'}$ no se puede calcular con los datos que tenemos.



7. La altura de un árbol en la realidad es 4,05 m. ¿Cuál será su altura en un dibujo realizado a escala 1 : 45? Si en el mismo dibujo aparece una farola de 5,6 cm de altura, ¿qué altura real tiene la farola?

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ cm} \rightarrow 45 \text{ cm} = 0{,}45 \text{ m} \\ x \rightarrow 4{,}05 \text{ m} \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{4{,}05}{0{,}45} = 9 \text{ cm}$$

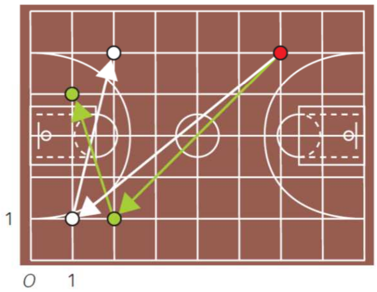
$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ cm} \rightarrow 45 \text{ cm} = 0{,}45 \text{ m} \\ 5{,}6 \text{ cm} \rightarrow y \end{array}\right\} \rightarrow y = 5{,}6 \cdot 0{,}45 = 2{,}52 \text{ m}$$

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

107. En la actualidad, las brújulas han sido sustituidas por los sistemas GPS. El uso de estos sistemas ha crecido gracias a las numerosas aplicaciones que tienen. Por ejemplo, en el deporte, colocando un GPS a cada jugador, podemos saber todos sus posicionamientos durante el partido y analizarlos posteriormente.

- **Un entrenador de baloncesto analiza los movimientos de sus jugadores mediante un GPS.**

  En el gráfico se ven los movimientos de un jugador; el punto rojo es la posición inicial, y los puntos blancos, los movimientos durante la jugada.



El entrenador propone un nuevo movimiento señalado por las flechas verdes. Utilizando el sistema de coordenadas que se ha superpuesto en el dibujo, calcula las coordenadas de los vectores que muestran los movimientos del jugador.

Movimientos en blanco: $\begin{cases} J(6,5) \xrightarrow{\vec{v}=(-5,-4)} J'(1,1) \\ J'(1,1) \xrightarrow{\vec{w}=(1,4)} J''(2,5) \end{cases}$ Movimientos en verde: $\begin{cases} J(6,5) \xrightarrow{\vec{u}=(-4,-4)} J'(2,1) \\ J'(2,1) \xrightarrow{\vec{t}=(-1,3)} J''(1,4) \end{cases}$

FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

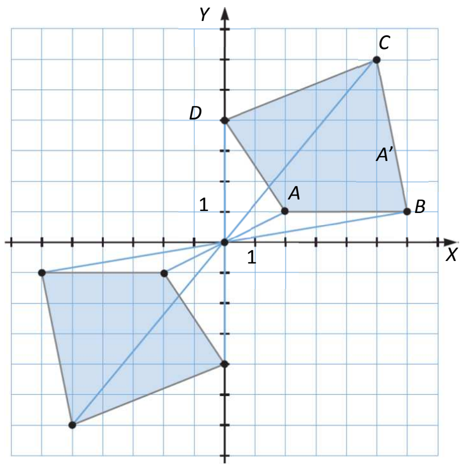
108. Si *P′* es el transformado de *P* por un giro de centro *O* y ángulo α, ¿con qué transformación se obtiene *P* desde *P′*?

Con un giro de centro *O* y ángulo $-\alpha$.

109. Halla el movimiento que equivale a realizar, a la misma figura, varios giros de distintas amplitudes con el mismo centro.

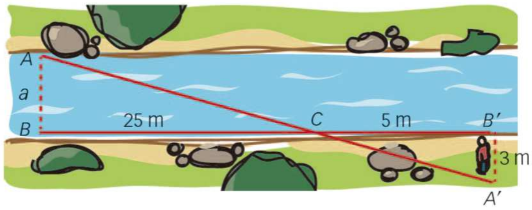
Un giro de centro el mismo centro y amplitud la suma de las amplitudes.

110. Dibuja la figura de vértices *A*(2, 1), *B*(6, 1), *C*(5, 6) y *D*(0, 4) y aplícale una simetría de centro el origen de coordenadas. Comprueba que este movimiento equivale a un giro de centro el centro de la simetría y ángulo de 180°. ¿Pasa siempre esto?



Sí, siempre sucede esta equivalencia.

111. **Halla el ancho del río.**



ABC y *A'B'C'* son semejantes por ser triángulos rectángulos y tener un ángulo agudo igual (por ser opuestos por el vértice). Entonces:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \to \frac{a}{3} = \frac{25}{5} \to a = 15 \text{ m}$$

112. **Verifica que resulta lo mismo en estas dos transformaciones:**

- **Aplicar consecutivamente a una figura dos simetrías axiales de ejes paralelos, e_1 y e_2.**
- **Aplicar una traslación cuyo vector es perpendicular a los ejes e_1 y e_2, y tiene por módulo el doble de la distancia entre ellos.**

El desplazamiento de cada punto se hace perpendicularmente a los dos ejes (por ser paralelos).

Si la distancia de un punto *A* al eje e_1 es d_1 y al eje e_2 es d_2:

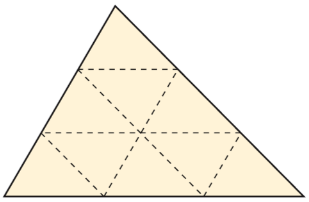
Distancia de *A* a $A' = 2d_1$ Distancia de A' a $e_2 = d_2 - 2d_1$

Por tanto:

Distancia de A' a $A'' = 2(d_2 - 2d_1)$ Distancia de *A* a $A'' = 2(d_2 - 2d_1) + 2d_1 = 2(d_2 - d_1)$.

La traslación que sufren todos los puntos tiene la misma dirección y la misma longitud, por lo que todos los puntos de la figura sufren la misma traslación de módulo $2(d_2 - d_1)$.

113. **Escribe el perímetro, *p*, la altura, *h*, y el área, *a*, de los triángulos pequeños en función del perímetro, *P*, la altura, *H*, y el área, *A*, del triángulo grande.**

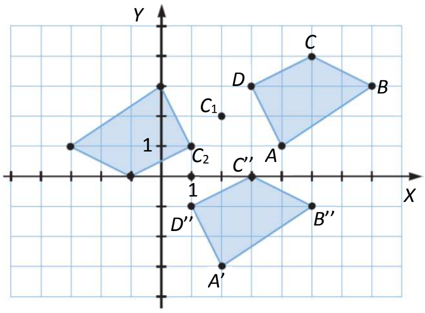


Los lados y la altura de cada triángulo pequeño son un tercio de los del triángulo grande:

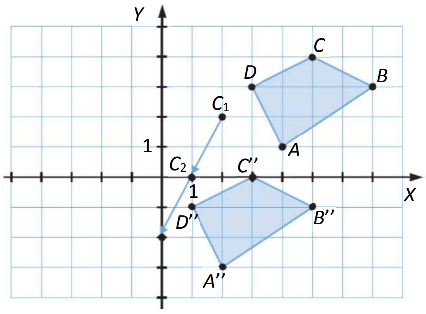
$$h = \frac{H}{3} \qquad p = \frac{P}{3} \qquad a = \frac{\text{base} \cdot h}{2} = \frac{\frac{\text{BASE}}{3} \cdot \frac{H}{3}}{2} = \frac{A}{9}$$

114. **Comprueba, con ayuda de algunos ejemplos, que si aplicas consecutivamente a una figura dos simetrías centrales con distintos centros, C_1 y C_2, resulta lo mismo que si aplicas una traslación cuyo vector es igual al doble del vector definido por los dos centros de simetría.**

Aplicando dos simetrías:

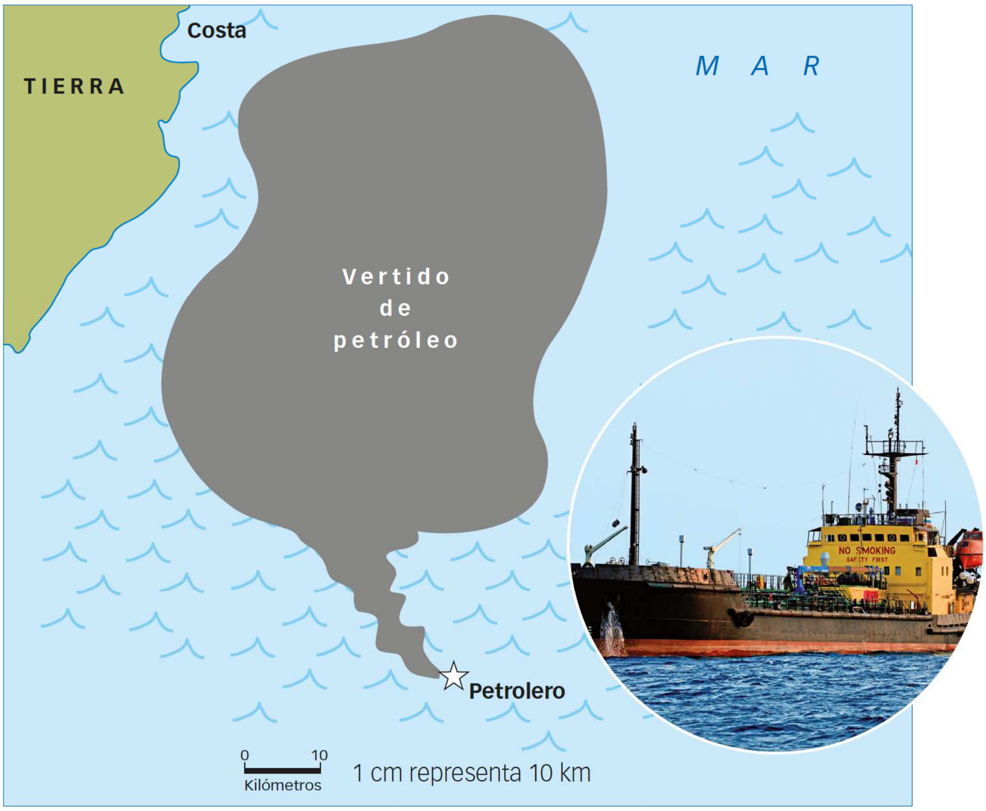


Aplicando la traslación:



PRUEBAS PISA

115. **Un petrolero chocó contra una roca en medio del mar y esta produjo un agujero en los tanques de almacenamiento de petróleo. El petrolero se encontraba a unos 65 km de tierra. Unos días después, el petróleo se había extendido tal y como se muestra en el mapa de la derecha.**
Utilizando la escala del mapa, calcula la superficie (área) del vertido de petróleo en kilómetros cuadrados (km²).



(Prueba PISA 2010)

La mancha de vertido, irregular y curva, tiene aproximadamente 5 cm de ancho y 6 cm de alto. Así, aproximadamente la superficie de vertido de petróleo en el plano es $5 \cdot 6 = 30$ cm^2.
Por tanto, en la realidad serán aproximadamente $50 \cdot 60 = 3\,000$ km^2.