

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Expresa en lenguaje algebraico los siguientes enunciados.

- a) El triple de un número.
- b) La cuarta parte de un número.
- c) La mitad de un número.
- d) El cuadrado de un número menos tres unidades.

a) $3x$ b) $\frac{x}{4}$ c) $\frac{x}{2}$ d) $x^2 - 3$

2. Relaciona cada expresión escrita con su correspondiente expresión algebraica.

- a) La tercera parte de un número más otro número.
- b) La tercera parte de la suma de dos números.
- c) El doble del cuadrado de un número.

i) $2x^2$ ii) $\frac{x+y}{3}$ iii) $\frac{x}{3} + y$

- a) iii b) ii c) i

3. Aplica la propiedad distributiva en las siguientes expresiones.

- a) $7 \cdot (4 + 2)$ c) $9x \cdot (x - 4)$
b) $3 \cdot (x - 5)$ d) $(-2x) \cdot (3x^2 - 4x + 7)$

a) $7 \cdot (4 + 2) = 28 + 14 = 42$ c) $9x \cdot (x - 4) = 9x^2 - 36x$
b) $3 \cdot (x - 5) = 3x - 15$ d) $(-2x) \cdot (3x^2 - 4x + 7) = -6x^3 + 8x^2 - 14x$

VIDA COTIDIANA

El mayor logro de Gutenberg con la imprenta fue el desarrollo de un método que permitió fundir letras con dimensiones precisas. Este avance contribuyó de forma decisiva a la aceptación del libro impreso.

- Existen imprentas que solo pueden imprimir sobre páginas que sean el doble de ancho que de largas. ¿Cuál es la expresión algebraica que nos da el área y el perímetro de esas hojas?

Largo de página $\rightarrow x$ Ancho de página $\rightarrow 2x$

Área de página $= 2x \cdot x = 2x^2$

Perímetro de página $= 2 \cdot 2x + 2 \cdot x = 4x + 2x = 6x$

RESUELVE EL RETO

Si nos juntas nos anulas, si nos multiplicas nos transformas y si nos divides nos conviertes en -1 .
¿Qué monomios somos?

Dos monomios opuestos.

$$A \cdot B = 6 \quad B \cdot D = 24$$

$$A \cdot C = 12 \quad C \cdot D = 36$$

¿Cuánto vale $A \cdot B \cdot C \cdot D$?

$$A \cdot B \cdot C \cdot D = (A \cdot B) \cdot (C \cdot D) = 6 \cdot 36 = 216$$

$$ab + bc = 6 \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = 1$$

Si a, b y c no son 0, ¿cuánto vale $a \cdot b \cdot c$?

$$ab + bc = b(a + c) = 6$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{c + a}{ac} = 1 \rightarrow a + c = ac$$

$$\text{Así: } b \underbrace{(a + c)}_{=ac} = b \cdot a \cdot c = 6 \rightarrow a \cdot b \cdot c = 6$$

Sin efectuar operaciones, halla el valor de A .

$$A = 83\,683\,470^2 - (83\,683\,469 \cdot 83\,683\,471)$$

Si hacemos $x = 83\,683\,470$, entonces:

$$x - 1 = 83\,683\,469$$

$$x + 1 = 83\,683\,471$$

$$\text{Así: } A = 83\,683\,470^2 - (83\,683\,469 \cdot 83\,683\,471) = x^2 - ((x - 1) \cdot (x + 1)) = x^2 - (x^2 - 1) = 1$$

ACTIVIDADES

1. Razona cuáles de las siguientes expresiones son monomios y, para las que lo sean, escribe el opuesto.

$$\frac{3}{2}x \quad -5yz^2 \quad 4 + x \quad x - x^3 \quad 4x^2y^3$$

Monomios: $\frac{3}{2}x$, opuesto $-\frac{3}{2}x$

$-5yz^2$, opuesto $5yz^2$

$4x^2y^3$, opuesto $-4x^2y^3$

2. Escribe tres monomios semejantes a $-a^2b$. ¿Cuántos monomios opuestos puedes escribir?

Semejantes: $2a^2b$, $\frac{5}{3}a^2b$ y $-3a^2b$

Solo existe un opuesto: a^2b .

3. ¿Existe un monomio semejante a xy de grado 3 con coeficiente -5 ?

No, ya que no tendrían el mismo grado.

4. Efectúa estas operaciones.

a) $-7x^3 + 6x^3$ d) $3x^2 \cdot 4y^3$

b) $3y^2 + 9y^2 - 2y^2$ e) $15xyz : 3xy$

c) $-5x^4 \cdot 8y$ f) $16x^3y^4 : 2x^2y$

a) $-x^3$ b) $10y^2$ c) $-40x^4y$ d) $12x^2y^3$ e) $5z$ f) $8xy^3$

5. Realiza estas operaciones.

a) $6x^3 - 2x + 3x^2 - 8x + x^2$

b) $4xy^2 + 7x^3y^2 - (6xy^2 + 3x^3y^2)$

a) $6x^3 + 4x^2 - 10x$ b) $-2xy^2 + 4x^3y^2$

6. Calcula $-x^4 + 3x^2 - 7x$.

No se puede operar porque no existen términos semejantes.

7. Indica los términos y el grado de estos polinomios.

a) $P(x) = -x^2 + 3x^2 - 2x + 4x - 6$

b) $P(y) = y^3 + 2y - 3y^3 + y - 3$

c) $P(x, y) = 5x^3y - 2x + 3y^2 + 8x^2 + 4$

a) Términos: $2x^2, 2x, -6$. Grado: 2

b) Términos: $-2y^3, 3y, -3$. Grado: 3

c) Términos: $5x^3y, 3y^2, 8x^2, -2x, 4$. Grado: 4

8. Calcula el polinomio opuesto.

$$P(x, y) = 3x^3y - 4x^3y - 5x + 4x - 1$$

$$P(x, y) = -x^3y - x - 1 \quad -P(x, y) = x^3y + x + 1$$

9. Escribe un polinomio reducido de dos variables, de grado 6 y con término independiente -7 .

Respuesta abierta. Por ejemplo: $P(x, y) = 2x^4y^2 - 5x^5 + 4x^2y - y - 7$

10. Calcula el valor numérico del polinomio $P(x) = 2x^4 - x^3 + 8x - 3$ para $x = -5$, $x = -1$ y $x = 0$.

$$P(-5) = 2 \cdot (-5)^4 - (-5)^3 + 8 \cdot (-5) - 3 = 1250 + 125 - 40 - 3 = 1332$$

$$P(-1) = 2 \cdot (-1)^4 - (-1)^3 + 8 \cdot (-1) - 3 = 2 + 1 - 8 - 3 = -8$$

$$P(0) = -3$$

11. Calcula $P(2, 1)$, $P(0, -2)$, $P(-1, 3)$ y $P(-1, -4)$ en los siguientes polinomios.

a) $P(x, y) = x^2y - 7xy + xy^2 + 4x^2 - y^3$

b) $P(x, y) = -2x^3 + y^2 - xy + 4x + 1$

a) $P(2, 1) = 2^2 \cdot 1 - 7 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 2^2 - 1^3 = 4 - 14 + 2 + 16 - 1 = 7$

$P(0, -2) = 0 - 0 + 0 + 0 - (-2)^3 = 8$

$P(-1, 3) = (-1)^2 \cdot 3 - 7 \cdot (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 3^2 + 4 \cdot (-1)^2 - 3^3 = 3 + 21 - 9 + 4 - 27 = -8$

$P(-1, -4) = (-1)^2 \cdot (-4) - 7 \cdot (-1) \cdot (-4) + (-1) \cdot (-4)^2 + 4 \cdot (-1)^2 - (-4)^3 = -4 - 28 - 16 + 4 + 64 = 20$

b) $P(2, 1) = -2 \cdot 2^3 + 1^2 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 = -16 + 1 - 2 + 8 + 1 = -8$

$P(0, -2) = 0 + (-2)^2 - 0 + 0 + 1 = 5$

$P(-1, 3) = -2 \cdot (-1)^3 + 3^2 - (-1) \cdot 3 + 4 \cdot (-1) + 1 = 2 + 9 + 3 - 4 + 1 = 11$

$P(-1, -4) = -2 \cdot (-1)^3 + (-4)^2 - (-1) \cdot (-4) + 4 \cdot (-1) + 1 = 2 + 16 - 4 - 4 + 1 = 11$

12. Comprueba para cuáles de los siguientes polinomios $x = 2$ es una raíz del polinomio.

a) $P(x) = x^2 + x - 2$ c) $R(x) = x^2 - 5x + 6$

b) $Q(x) = x^2 - x - 2$ d) $S(x) = x^2 - 3x + 4$

a) $P(2) = 2^2 + 2 - 2 = 4 \rightarrow$ No es raíz.

b) $Q(2) = 2^2 - 2 - 2 = 0 \rightarrow$ Sí es raíz.

c) $R(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0 \rightarrow$ Sí es raíz.

d) $S(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 4 = 2 \rightarrow$ No es raíz.

13. Calcula el valor de a para que el polinomio $P(x) = x^2 - ax - 2$ tenga una raíz en $x = 2$.

$P(2) = 0 \rightarrow P(2) = 2^2 - a \cdot 2 - 2 = 0 \rightarrow -2a + 2 = 0 \rightarrow a = 1$

14. Calcula la suma, la resta y el producto de cada par de polinomios.

a) $P(x) = 4x^2 - x$ y $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$

b) $P(x) = -5x^2 + 9x - 3$ y $Q(x) = -x^2 + 6x$

a) $P(x) + Q(x) = 4x^2 - x + x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = x^3 - x^2 + x + 8$

$P(x) - Q(x) = 4x^2 - x - (x^3 - 5x^2 + 2x + 8) = 4x^2 - x - x^3 + 5x^2 - 2x - 8 = -x^3 + 9x^2 - 3x - 8$

$P(x) \cdot Q(x) = (4x^2 - x) \cdot (x^3 - 5x^2 + 2x + 8) = 4x^5 - 21x^4 + 13x^3 + 30x^2 - 8x$

b) $P(x) + Q(x) = -5x^2 + 9x - 3 + (-x^2 + 6x) = -6x^2 + 15x - 3$

$P(x) - Q(x) = -5x^2 + 9x - 3 - (-x^2 + 6x) = -4x^2 + 3x - 3$

$P(x) \cdot Q(x) = (-5x^2 + 9x - 3) \cdot (-x^2 + 6x) = 5x^4 - 39x^3 + 57x^2 - 18x$

15. Dados los polinomios $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ y $Q(x) = x + 4$, calcula $-P(x) + Q(x) - 3 \cdot Q(x)$.

$-P(x) + Q(x) - 3 \cdot Q(x) = -(2x^2 - 3x + 1) + x + 4 - 3 \cdot (x + 4) = -2x^2 + 3x - 1 + x + 4 - 3x - 12 = -2x^2 + x - 9$

16. Averigua el valor de a para que $(3x - 4) \cdot (x - a) = 3x^2 + 2x - 8$.

$$(3x - 4) \cdot (x - a) = 3x^2 + 2x - 8$$

$$3x^2 - (3a + 4)x + 4a = 3x^2 + 2x - 8 \rightarrow \begin{cases} -3ax - 4x = 2x \rightarrow -3a - 4 = 2 \rightarrow a = -2 \\ 4a = -8 \rightarrow a = -2 \end{cases}$$

17. Realiza las siguientes divisiones.

a) $(x^4 + x^3 + 8x^2 - x) : x$

b) $(x^4 + 6x^3 - 5x^2) : x^2$

c) $(4x^5 - x^4 + 2x^3) : x^3$

d) $(6x^4 + 8x^3 - 4x^2) : 2x^2$

e) $(12x^6 + 9x^5 - 15x^4 - 6x^3) : 3x^3$

f) $(4x^8 + 40x^6 + 18x^4 - 16x^2) : 4x^2$

a) $x^3 + x^2 + 8x - 1$

c) $4x^2 - x + 2$

e) $4x^3 + 3x^2 - 5x - 2$

b) $x^2 + 6x - 5$

d) $3x^2 + 4x - 2$

f) $x^6 + 10x^4 + \frac{9}{2}x^2 - 4$

18. Indica el cociente y el resto de estas divisiones.

a) $(x^3 - x^2) : (x + 1)$

d) $(-x^3 + 3x^2 - 8x - 11) : (x - 3)$

b) $(7x^4 + 2x^3) : (x - 2)$

e) $(9x^4 - 15x^3 + x - 7) : (3x - 2)$

c) $(6x^3 - 2x^2 - 8) : (2x + 3)$

f) $(10x^6 + 8x^4 - 6x^2) : (x + 4)$

a)

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 \\ -x^3 - x^2 \\ \hline -2x^2 \\ 2x^2 + 2x \\ \hline 2x \\ -2x - 2 \\ \hline -2 \end{array} \quad \begin{array}{r} |x+1 \\ x^2 - 2x + 2 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 7x^4 + 2x^3 \\ -7x^4 + 14x^3 \\ \hline 16x^3 \\ -16x^3 + 32x^2 \\ \hline 32x^2 \\ -32x^2 + 64x \\ \hline 64x \\ -64x + 128 \\ \hline 128 \end{array} \quad \begin{array}{r} |x-2 \\ 7x^3 + 16x^2 + 32x + 64 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r}
 6x^3 - 2x^2 \quad -8 \quad |2x+3 \\
 \underline{-6x^3 - 9x^2} \quad \quad \quad 3x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{33}{4} \\
 -11x^2 \quad -8 \\
 \underline{11x^2 + \frac{33}{2}x} \\
 \frac{33}{2}x - 8 \\
 \underline{-\frac{33}{2}x - \frac{99}{4}} \\
 -\frac{131}{4}
 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{r}
 -x^3 + 3x^2 - 8x - 11 \quad |x-3 \\
 \underline{x^3 - 3x^2} \quad \quad \quad -x^2 - 8 \\
 -8x - 11 \\
 \underline{8x - 24} \\
 -35
 \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{r}
 9x^4 - 15x^3 \quad +x-7 \quad |3x-2 \\
 \underline{-9x^4 + 6x^3} \quad \quad \quad 3x^3 - 3x^2 - 2x - 1 \\
 -9x^3 \quad +x-7 \\
 \underline{9x^3 - 6x^2} \\
 -6x^2 + x - 7 \\
 \underline{6x^2 - 4x} \\
 -3x - 7 \\
 \underline{3x - 2} \\
 -9
 \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{r}
 10x^6 \quad +8x^4 \quad -6x^2 \\
 \underline{-10x^6 - 40x^5} \\
 -40x^5 + 8x^4 \quad -6x^2 \\
 \underline{40x^5 + 160x^4} \\
 168x^4 \quad -6x^2 \\
 \underline{-168x^4 - 672x^3} \\
 -672x^3 - 6x^2 \\
 \underline{672x^3 + 2\,688x^2} \\
 2\,682x^2 \\
 \underline{-2\,682x^2 - 10\,728x} \\
 -10\,728x \\
 \underline{10\,728x + 42\,912} \\
 42\,912
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 |x+4 \\
 \hline
 10x^5 - 40x^4 + 168x^3 - 672x^2 + 2\,682x - 10\,728
 \end{array}$$

21. Calcula el resto de esta división sin realizarla.

Dividendo $\rightarrow P(x) = x^5 + x^3 - x^2 + 5x - 3$

Divisor $\rightarrow Q(x) = x^3 + x - 1$

Cociente $\rightarrow C(x) = x^2$

$$R(x) = P(x) - Q(x) \cdot C(x)$$

$$R(x) = x^5 + x^3 - x^2 + 5x - 3 - (x^3 + x - 1) \cdot x^2 = x^5 + x^3 - x^2 + 5x - 3 - x^5 - x^3 + x^2 = 5x - 3$$

22. Realiza estas divisiones utilizando la regla de Ruffini.

a) $(x^4 + 4x^3 + x^2 - x - 1) : (x - 1)$

b) $(x^4 - x^3 + 3x^2 - 8x - 11) : (x - 1)$

c) $(x^5 + x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x + 1) : (x - 2)$

d) $(x^4 - x^3 + x^2 + x + 5) : (x - 2)$

e) $(x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 6x + 2) : (x - 3)$

f) $(x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 + 3x - 4) : (x + 2)$

g) $(x^5 - 6x^4 + 4x^3 + 3x^2 - x + 2) : (x + 1)$

a)

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 4 & 1 & -1 & -1 \\ & & 1 & 5 & 6 & 5 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 5 & 4 \end{array}$$

Cociente: $x^3 + 5x^2 + 6x + 5$

Resto: 4

b)

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -1 & 3 & -8 & -11 \\ & & 1 & 0 & 3 & -5 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & -5 & -16 \end{array}$$

Cociente: $x^3 + 3x - 5$

Resto: -16

c)

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ & & 2 & 6 & 16 & 30 & 66 \\ \hline & 1 & 3 & 8 & 15 & 33 & 67 \end{array}$$

Cociente: $x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 15x + 33$

Resto: 67

d)

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ & & 2 & 2 & 6 & 14 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 7 & 19 \end{array}$$

Cociente: $x^3 + x^2 + 3x + 7$

Resto: 19

e)

$$\begin{array}{r|rrrrr} 3 & 1 & 2 & 3 & -6 & 2 \\ & & 3 & 15 & 54 & 144 \\ \hline & 1 & 5 & 18 & 48 & 146 \end{array}$$

Cociente: $x^3 + 5x^2 + 18x + 48$

Resto: 146

f)

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 1 & 1 & -5 & 1 & 3 & -4 \\ & & -2 & 2 & 6 & -14 & 22 \\ \hline & 1 & -1 & -3 & 7 & -11 & 18 \end{array}$$

Cociente: $x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x - 11$

Resto: 18

g)

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 1 & -6 & 4 & 3 & -1 & 2 \\ & & -1 & 7 & -11 & 8 & -7 \\ \hline & 1 & -7 & 11 & -8 & 7 & -5 \end{array}$$

Cociente: $x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 8x + 7$

Resto: -5

23. Indica el cociente y el resto de estas divisiones.

a) $(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 2) : (x + 1)$

b) $(x^4 - 9x^2 - 6x + 7) : (x - 2)$

c) $(3x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 8) : (x + 3)$

a)

$$\begin{array}{r|rrrrrrrrr} & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

Cociente: $x^7 - x^6 + x^3 - x^2$

Resto: 2

b)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -9 & -6 & 7 \\ 2 & & 2 & 4 & -10 & -32 \\ \hline & 1 & 2 & -5 & -16 & -25 \end{array}$$

Cociente: $x^3 + 2x^2 - 5x - 16$

Resto: -25

c)

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 3 & -1 & 1 & -1 & 0 & 8 \\ -3 & & -9 & 30 & -93 & 282 & 846 \\ \hline & 3 & -10 & 31 & -94 & 282 & 854 \end{array}$$

Cociente: $3x^4 - 10x^3 + 31x^2 - 94x + 282$

Resto: 854

24. Completa en tu cuaderno e indica para cada división el dividendo, el divisor, el cociente y el resto.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} ? & 1 & -3 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ \hline & & & & & & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 2 & -1 & 3 & ? \\ \hline & & & & & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 3 & 1 & -3 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ & & 3 & 0 & 9 & 42 & 132 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & 14 & 44 & 133 \end{array}$$

Dividendo: $x^5 - 3x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 2x + 1$

Divisor: $x - 3$

Cociente: $x^4 + 3x^2 + 14x + 44$

Resto: 133

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 2 & -1 & 3 & 10 \\ & & -2 & 0 & 2 & -10 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}$$

Dividendo: $x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x + 10$

Divisor: $x + 2$

Cociente: $x^3 - x + 5$

Resto: 0

25. Extrae factor común.

- a) $x^4 + x^3$ f) $2x^4 + 3x^3 - x^2$
 b) $x^4 - 5x^2$ g) $10x^4 + 4x^3 - 8x^2$
 c) $2x^3 + 6x$ h) $7x^4 + 14x^3 - 21x^2 + 49x$
 d) $3x^2 - 12x^4$ i) $7x^4 + 14x^3 - 21x^2 + 49x + 35$
 e) $6x^6 - x^3$ j) $7x^4 + 14x^3 - 21x^2 + 49$

a) $x^3 \cdot (x + 1)$

b) $x^2 \cdot (x^2 - 5)$

c) $2x \cdot (x^2 + 3)$

d) $3x^2 \cdot (1 - 4x^2)$

e) $x^3 \cdot (6x^3 - 1)$

f) $x^2 \cdot (2x^2 + 3x - 1)$

g) $2x^2 \cdot (5x^2 + 2x - 4)$

h) $7x \cdot (x^3 + 2x^2 - 3x + 7)$

i) $7 \cdot (x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 7x + 5)$

j) $7 \cdot (x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 7)$

26. Completa en tu cuaderno.

- a) $x^6 - 2x^3 = \square \cdot (x^3 - \square)$
 b) $\square + 3x^3 - \square = 3x \cdot (3x^3 + \square - 2)$
 c) $25x^3y^2 + \square - \square = 5xy \cdot (\square + 2x - 1)$

a) $x^6 - 2x^3 = x^3 \cdot (x^3 - 2)$

b) $9x^4 + 3x^3 - 6x = 3x \cdot (3x^3 + x^2 - 2)$

c) $25x^3y^2 + 10x^2y - 5xy = 5xy \cdot (5x^2y + 2x - 1)$

27. Calcula a , b y c para que el factor común de $x^4y^5z^3 + x^ay^bz^c$ sea x^3y^2z .

$$a = 3, b = 2, c = 1$$

$$x^4y^5z^3 + x^3y^2z^1 = x^3y^2z^1 \cdot (xy^3z^2 + 1)$$

28. Aplica las igualdades notables.

- a) $(3x + 2)^2$
 b) $(2x - 3y)^2$
 c) $(x + 4y) \cdot (x - 4y)$

a) $(3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$

b) $(2x - 3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

c) $(x + 4y) \cdot (x - 4y) = x^2 - 16y^2$

29. Calcula $(3x^2 + 4)^2 + (x - 2)^2$.

$$(3x^2 + 4)^2 + (x - 2)^2 = 9x^4 + 16 + 24x^2 + x^2 + 4 - 4x = 9x^4 + 25x^2 - 4x + 20$$

30. Completa en tu cuaderno.

a) $(x + \square)^2 = \square + 4y^2 + \square$

b) $(\square - y^2)^2 = x^4 + \square - \square$

a) $(x + 2y)^2 = x^2 + 4y^2 + 4xy$

b) $(x^2 - y^2)^2 = x^4 + y^4 - 2x^2y^2$

31. Expresa estos polinomios como el cuadrado de una suma o de una resta, cuando sea posible.

a) $9x^2 + 30xy + 25y^2$ d) $16 - 24x + 9x^2$

b) $16y^2 - 24xy + 9x$ e) $x^4 + y^2 + x^2y$

c) $49x^2 + 28xy + 4y^2$ f) $x^4 + y^2 - 2x^2y$

a) $9x^2 + 30xy + 25y^2 = (3x + 5y)^2$

d) $16 - 24x + 9x^2 = (4 - 3x)^2$

b) No es posible.

e) No es posible.

c) $49x^2 + 28xy + 4y^2 = (7x + 2y)^2$

f) $x^4 + y^2 - 2x^2y = (x^2 - y)^2$

32. Expresa estos polinomios como el producto de una suma por una diferencia, cuando sea posible.

a) $9x^2 - 25y^2$ d) $16 - 9x^2$

b) $16y^2 - 9x^4$ e) $x^4 - y^2$

c) $49x^2 - 4y^2$ f) $64x^4 - 81y^6$

a) $(3x + 5y) \cdot (3x - 5y)$

b) $(4y + 3x^2) \cdot (4y - 3x^2)$

c) $(7x + 2y) \cdot (7x - 2y)$

d) $(4 + 3x) \cdot (4 - 3x)$

e) $(x^2 + y) \cdot (x^2 - y)$

f) $(8x^2 + 9y^3) \cdot (8x^2 - 9y^3)$

33. Comprueba si $(x + 2)$ es divisor de estos polinomios.

a) $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

b) $Q(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

a)

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 6 & 11 & 6 \\ & & -2 & -8 & -6 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}$$

Resto: 0. Sí es divisor.

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ & & -2 & -2 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Resto: 0. Sí es divisor.

34. Calcula a para que $(x - 1)$ sea divisor de $2x^3 - x^2 + 3x + a$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -1 & 3 & a \\ & & 2 & 1 & 4 \\ \hline & 2 & 1 & 4 & 4+a \end{array}$$

$$4 + a = 0 \rightarrow a = -4$$

35. Calcula los divisores de $P(x) = x(x + 1)(x - 5)$.

Los divisores son: $x, x + 1, x - 5, x \cdot (x + 1), x \cdot (x - 5), (x + 1) \cdot (x - 5), x \cdot (x + 1) \cdot (x - 5)$

36. Factoriza estos polinomios.

a) $A(x) = x^2 + 3x + 2$

e) $E(x) = x^2 + 2x + 1$

b) $B(x) = x^2 - x - 2$

f) $F(x) = x^2 + 8x + 16$

c) $C(x) = x^2 + x - 2$

g) $G(x) = x^2 - 6x + 9$

d) $D(x) = x^2 - 3x + 2$

h) $H(x) = x^2 - 4x$

a) $A(x) = x^2 + 3x + 2 = (x + 1) \cdot (x + 2)$

e) $E(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

b) $B(x) = x^2 - x - 2 = (x - 2) \cdot (x + 1)$

f) $F(x) = x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$

c) $C(x) = x^2 + x - 2 = (x + 2) \cdot (x - 1)$

g) $G(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

d) $D(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 2) \cdot (x - 1)$

h) $H(x) = x^2 - 4x = x \cdot (x - 4)$

37. Encuentra la descomposición factorial de estos polinomios.

a) $K(x) = x^3 + 8x^2 + 21x + 18$

e) $O(x) = x^5 - 25x^3$

b) $L(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$

f) $P(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2$

c) $M(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

g) $Q(x) = (5x^3 + 4x)^3$

d) $N(x) = x^4 - x$

a) $K(x) = x^3 + 8x^2 + 21x + 18 = (x + 2) \cdot (x + 3)^2$

b) $L(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = (x - 3) \cdot (x + 3)^2$

c) $M(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$

d) $N(x) = x^4 - x = x \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$

e) $O(x) = x^5 - 25x^3 = x^3 \cdot (x + 5) \cdot (x - 5)$

f) $P(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 = x^2 \cdot (x - 3)^2$

g) $Q(x) = (5x^3 + 4x)^3 = x^3 \cdot (5x^2 + 4)^3$

42. Resuelve estas operaciones entre monomios.

- a) $2x \cdot 5x^2 \cdot 3y$ d) $8xyz^3 \cdot 7x^3z^2 \cdot (-6xy^2z)$
 b) $-3xy^3 \cdot 6x^3y \cdot y^4$ e) $5x^2y^4 \cdot 9xz^3 \cdot (-x^3yz^4)$
 c) $7yz^2 \cdot (-4xz) \cdot x^5$ f) $-9y^3z \cdot 3x^4z \cdot (-7xyz^2)$
- a) $30x^3y$ b) $-18x^4y^8$ c) $-28x^6yz^3$ d) $-336x^5y^3z^6$ e) $-45x^6y^5z^7$ f) $189x^5y^4z^4$

43. Efectúa las siguientes divisiones.

- a) $20x^5y^4 : 5x^2$ e) $(-5x^3y^2z^4) : (-xy^2z)$
 b) $-32x^6y^3 : 6x^3y$ f) $45x^2y^4z^5 : 9xz^3$
 c) $27xyz^2 : (-3xz)$ g) $-9xy^3z^4 : (-3xyz^2)$
 d) $63x^3yz^3 : 7x^3z^2$ h) $35y^2z^4 : (-5yz^4)$
- a) $4x^3y^4$ c) $-9yz$ e) $5x^2z^3$ g) $3y^2z^2$
 b) $-\frac{16}{3}x^3y^2$ d) $9yz$ f) $5xy^4z^2$ h) $-7y$

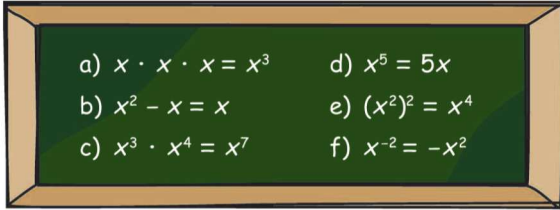
44. Obtén el resultado de estas operaciones con monomios.

- a) $7x^2 + 4x \cdot (x + y) - 5y^2$
 b) $2x^2y + (5x - y) \cdot xy - 8xy^2$
 c) $-6xy + 3y \cdot (x - x^2) + 4x^2y$
 d) $2x \cdot (3x + 5y) - 7x^2 - 8xy$
 e) $(2x^2 - x) \cdot 3y + 5xy - x^2y$
- a) $7x^2 + 4x^2 + 4xy - 5y^2 = 11x^2 + 4xy - 5y^2$
 b) $2x^2y + 5x^2y - xy^2 - 8xy^2 = 7x^2y - 9xy^2$
 c) $-6xy + 3xy - 3x^2y + 4x^2y = -3xy + x^2y$
 d) $6x^2 + 10xy - 7x^2 - 8xy = -x^2 + 2xy$
 e) $6x^2y - 3xy + 5xy - x^2y = 5x^2y + 2xy$

45. Calcula y escribe el resultado de estas operaciones.

- a) $5x \cdot (x - y^2 - z) - 3y \cdot (x + y - z^2) + x \cdot (x - y)$
 b) $(-x + y - z^2) \cdot (-2yz) - (x + y - z) \cdot xy + (x^2 - z^3)$
- a) $5x^2 - 5xy^2 - 5xz - 3xy - 3y^2 + 3yz^2 + x^2 - xy = 6x^2 - 5xy^2 - 5xz - 4xy - 3y^2 + 3yz^2$
 b) $2xyz - 2y^2z + 2yz^3 - x^2y - xy^2 + xyz + x^2 - z^3 = 3xyz - 2y^2z + 2yz^3 - x^2y - xy^2 + x^2 - z^3$

46. Razona si estas igualdades son verdaderas o falsas.



- a) Verdadera: $x \cdot x \cdot x = x^{1+1+1} = x^3$.
- b) Falsa, pues no podemos restar potencias con la misma base y distinto exponente.
- c) Verdadera: $x^3 \cdot x^4 = x^{3+4} = x^7$.
- d) Falsa, ya que una potencia consiste en multiplicar un determinado número de veces la base, y no sumarla.
- e) Verdadera: $(x^2)^2 = x^{2 \cdot 2} = x^4$.
- f) Falsa: $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

47. Determina el grado, las variables y el término independiente de estos polinomios.

- a) $P(x) = -x^3 + x^2 - 7x - 2$
- b) $Q(x) = -x^2 + 2x + 6$
- c) $P(x, y) = -2x^5 - x^2y^2 + 5x^3 - 1 + 3x^3 + 3$
- d) $Q(x, y) = x^2 + 4x^3 - x - 9 + 4x^4y^3$
- e) $P(x, y, z) = 7x^2yz - 3xy^2z + 8xyz^2$

	a)	b)	c)	d)	e)
Grado	3	2	5	7	4
Variables	x	x	x, y	x, y	x, y, z
Término independiente	-2	6	-1 + 3 = 2	-9	0

48. Escribe, en cada caso, dos polinomios que cumplan las siguientes características.

- a) Es de grado 3, tiene tres términos y sus variables son x e y.
- b) Es de grado 5, su término independiente es -1, el coeficiente del término de mayor grado es 2 y sus variables son x, y, z.
- c) Tiene dos términos con coeficientes 4 y -3, una única variable, x, y es de grado 4.

- a) Respuesta abierta. Por ejemplo: $P(x, y) = 5x + 3y^2 - 2x^2y$ $Q(x, y) = 2xy - y^3 + 1$
- b) Respuesta abierta. Por ejemplo: $P(x, y, z) = 6xy + 8xz^2 + 2x^3yz - 1$ $Q(x, y, z) = 2xy^4 - y^3z - 1$
- c) Respuesta abierta. Por ejemplo: $P(x) = -3x^4 + 4$ $Q(x) = 4x^4 - 3x^2$

49. Razona si son verdaderas o falsas estas afirmaciones.

- a) Todos los polinomios tienen término independiente.
- b) Los coeficientes de un polinomio son siempre números naturales.
- c) Solo existe un polinomio opuesto a un polinomio.
- d) No existe ningún polinomio con tres términos que sea de grado 1.
- e) Los polinomios con tres términos tienen siempre grado 3.

a) Falso. Por ejemplo: $x^3 + 3x^2 - 7x$.

b) Falso. Por ejemplo: $P(x) = x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$.

c) Verdadero.

d) Verdadero. Con tres términos, el grado es al menos 2.

e) Falso. Por ejemplo: $P(x) = x^7 + x^2 + x$

50. Calcula el valor numérico de cada polinomio para los valores indicados.

- a) $A(x) = x + 1$, para $x = 1$.
- b) $B(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3$, para $x = 2$.
- c) $C(x) = 4x^5 - x^2 + 3$, para $x = -1$.
- d) $D(x) = -9x^4 + 7x^2 + 5$, para $x = 1$.
- e) $E(x) = x^3 + x^2 + x + 2$, para $x = -2$.
- f) $F(x) = x^4 + x^4 - x^3 + x^2 - 7x - 2$, para $x = 0$.
- g) $G(x) = -14$, para $x = -2$.

a) $A(1) = 1 + 1 = 2$

b) $B(2) = 8 + 3 = 11$

c) $C(-1) = -4 - 1 + 3 = -2$

d) $D(1) = -9 + 7 + 5 = 3$

e) $E(-2) = -8 + 4 - 2 + 2 = -4$

f) $F(0) = -2$

g) $G(-2) = -14$

51. Halla los valores numéricos para el polinomio:

$$P(x, y) = 2x^2y + xy^2 - 3xy + 5x - 6y + 9$$

- a) $P(0, 0)$
- b) $P(1, 1)$
- c) $P(-1, 1)$
- d) $P(1, -1)$
- e) $P(1, 2)$
- f) $P(2, 1)$

a) $P(0, 0) = 2 \cdot 0^2 \cdot 0 + 0 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 9 = 9$

b) $P(1, 1) = 2 \cdot 1^2 \cdot 1 + 1 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 9 = 8$

c) $P(-1, 1) = 2 \cdot (-1)^2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1^2 - 3 \cdot (-1) \cdot 1 + 5 \cdot (-1) - 6 \cdot 1 + 9 = 2$

d) $P(1, -1) = 2 \cdot 1^2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot 1 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 - 6 \cdot (-1) + 9 = 22$

e) $P(1, 2) = 2 \cdot 1^2 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 - 3 \cdot 1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 - 6 \cdot 2 + 9 = 4$

f) $P(2, 1) = 2 \cdot 2^2 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 6 \cdot 1 + 9 = 17$

52. ¿Puede un polinomio $P(x)$ tener distintos valores numéricos para un mismo valor de la variable x ?
¿Y el mismo valor numérico para distintos valores de la variable? Justifica tu respuesta.

Un polinomio $P(x)$ no puede tener distintos valores numéricos para un mismo valor de x , pero sí puede tener el mismo valor numérico para distintos valores de la variable x . Por ejemplo:

$$P(x) = x^2 - x + 1 \quad P(0) = 1 \quad P(1) = 1 - 1 + 1 = 1$$

53. Dados los polinomios:

$$P(x) = x^2 - 4x + 3 \quad Q(x) = 1 - x^2$$

calcula.

a) $[P(-1) + Q(3)] \cdot (-5)$ b) $\frac{4}{3} - 4 \cdot P(0)$

a) $\left. \begin{array}{l} P(-1) = 1 + 4 + 3 = 8 \\ Q(3) = 1 - 9 = -8 \end{array} \right\} \rightarrow [P(-1) + Q(3)] \cdot (-5) = 0$

b) $P(0) = 3 \rightarrow \frac{4}{3} - 4 \cdot P(0) = \frac{4}{3} - 12 = \frac{-32}{3}$

55. Calcula el valor de k en cada polinomio, sabiendo que $P(1) = 6$.

a) $P(x) = kx^7 + x^3 + 3x + 1$

b) $P(x) = kx^4 + kx^3 + 4$

c) $P(x) = 9x^5 + kx^2 + kx - k$

d) $P(x) = kx^6 - kx^3 + kx + k$

e) $P(x) = k$

a) $k + 1 + 3 + 1 = 6 \rightarrow k = 1$

d) $k - k + k + k = 6 \rightarrow k = 3$

b) $k + k + 4 = 6 \rightarrow k = 1$

e) $k = 6$

c) $9 + k + k - k = 6 \rightarrow k = -3$

56. Calcula el valor de a en el polinomio $P(x, y) = x^4y + 4x - ay$ si su valor numérico en $x = 1$ e $y = 0$ es 4.

$$4 = P(1, 0) = 0 + 4 + 0 \rightarrow \text{Se cumple para todo valor de } a.$$

57. Determina cuáles de los siguientes polinomios tienen como raíz $x = -1$.

a) $P(x) = x^2 + 5x + 4$

d) $S(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

b) $Q(x) = x^2 + 2x - 3$

e) $T(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x - 5$

c) $R(x) = x^3 + 7x^2 + 14x + 8$

f) $U(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 5$

a) $P(-1) = 1 - 5 + 4 = 0 \rightarrow$ Es raíz.

d) $S(-1) = 1 - 10 + 9 = 0 \rightarrow$ Es raíz.

b) $Q(-1) = 1 - 2 - 3 \neq 0 \rightarrow$ No es raíz.

e) $T(-1) = 1 + 3 + 4 - 3 - 5 = 0 \rightarrow$ Es raíz.

c) $R(-1) = -1 + 7 - 14 + 8 = 0 \rightarrow$ Es raíz.

f) $U(-1) = -2 + 9 - 12 + 5 = 0 \rightarrow$ Es raíz.

58. Determina el valor de m para que $x = -2$ sea raíz de estos polinomios.

a) $P(x) = x^3 - mx^2 + mx - 10$ c) $P(x) = x^3 + mx^2 + 11x + m$

b) $P(x) = x^3 - mx^2 - 2mx + 8$ d) $P(x) = x^4 - (m + 1)x^2 + m$

a) $P(-2) = 0 = -8 - 4m - 2m - 10 \rightarrow 18 = -6m \rightarrow m = -3$

b) $P(-2) = 0 = -8 - 4m + 4m + 8 \rightarrow 8 = 8 \rightarrow$ Se cumple para cualquier valor de m .

c) $P(-2) = 0 = -8 + 4m - 22 + m \rightarrow 30 = 5m \rightarrow m = 6$

d) $P(-2) = 0 = 16 - 4m - 4 + m \rightarrow 12 = 3m \rightarrow m = 4$

59. Dados los polinomios:

$P(x) = 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6$

$Q(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1$

$R(x) = 3x^2 - x + 1$

$S(x) = 2x + 3$

calcula.

a) $P(x) + Q(x) + R(x) + S(x)$ c) $[P(x) + Q(x)] - [R(x) + Q(x)]$

b) $P(x) - R(x) + S(x) - Q(x)$ d) $[P(x) - Q(x)] - [R(x) - Q(x)]$

a) $(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) + (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1) + (3x^2 - x + 1) + (2x + 3) = 2x^5 + 5x^3 + 6x^2 - 3x - 3$

b) $(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) - (3x^2 - x + 1) + (2x + 3) - (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1) = 2x^5 - 6x^4 + 9x^3 - 10x^2 + 13x - 3$

c) $[(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) + (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1)] + [(3x^2 - x + 1) + (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1)] = (2x^5 + 5x^3 + 3x^2 - 4x - 7) - (3x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 8x) = 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 4x - 7$

d) $[(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) - (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1)] + [(3x^2 - x + 1) - (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1)] = [2x^5 - 6x^4 + 9x^3 - 7x^2 + 10x - 5] - [-3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x + 2] = 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 4x - 7$

60. Halla cuál es el polinomio $Q(x)$ que hay que sumar a $P(x) = x^2 + 2x - 1$ para obtener como resultado $R(x)$.

a) $R(x) = x - 1$ d) $R(x) = -7x^2 - 3x$

b) $R(x) = 2x^2 - x - 6$ e) $R(x) = x^3 - x$

c) $R(x) = 5x^2 - x + 1$ f) $R(x) = x^3 - x^2$

$Q(x) = R(x) - P(x)$

a) $Q(x) = -x^2 - x$ d) $Q(x) = -8x^2 - 5x + 1$

b) $Q(x) = x^2 - 3x - 5$ e) $Q(x) = x^3 - x^2 - 3x + 1$

c) $Q(x) = 4x^2 - 3x + 2$ f) $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 1$

61. Dados los polinomios:

$$P(x) = 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6$$

$$Q(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1$$

$$R(x) = 3x^2 - x + 1 \quad S(x) = 2x + 3$$

calcula.

a) $[P(x) - Q(x)] \cdot S(x)$ c) $[P(x) + Q(x) + R(x)] \cdot S(x)$

b) $[R(x) - Q(x)] \cdot S(x)$ d) $[P(x) + Q(x) - R(x)] \cdot S(x)$

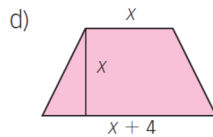
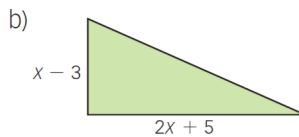
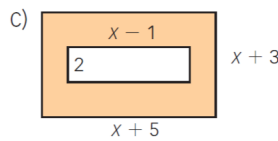
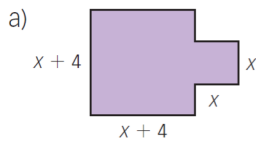
$$\begin{aligned} \text{a) } & [(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) - (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1)] \cdot (2x + 3) = \\ & = (2x^5 - 6x^4 + 9x^3 - 7x^2 + 10x - 5) \cdot (2x + 3) = \\ & = 4x^6 - 6x^5 + 13x^3 - x^2 + 20x - 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & [(3x^2 - x + 1) - (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1)] \cdot (2x + 3) = \\ & = (-3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x + 2) \cdot (2x + 3) = \\ & = -6x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 22x + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & [(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) + (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1) + \\ & + (3x^2 - x + 1)] \cdot (2x + 3) = (2x^5 + 5x^3 + 6x^2 - 5x - 6) \cdot (2x + 3) = \\ & = 4x^6 + 6x^5 + 10x^4 + 27x^3 + 8x^2 - 27x - 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } & [(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) + (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1) - \\ & - (3x^2 - x + 1)] \cdot (2x + 3) = (2x^5 + 5x^3 - 3x - 8) \cdot (2x + 3) = \\ & = 4x^6 + 6x^5 + 10x^4 + 15x^3 - 6x^2 - 25x - 24 \end{aligned}$$

62. Expresa el área de cada figura mediante un polinomio. Simplifica su expresión.



a) $(x + 4)^2 + x^2 = 2x^2 + 8x + 16$

b) $\frac{(x - 3) \cdot (2x + 5)}{2} = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{15}{2}$

c) $(x + 5) \cdot (x + 3) - 2(x - 1) = x^2 + 8x + 15 - 2x + 2 = x^2 + 6x + 17$

d) $\frac{x + (x + 4)}{2} \cdot x = x^2 + 2x$

63. Divide.

a) $(4x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x + 7) : (x - 1)$

b) $(4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5) : (x + 1)$

c) $(7x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 1) : (x^2 + x)$

$$\begin{array}{r}
 \text{a) } 4x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x + 7 \quad \left| \begin{array}{l} x - 1 \\ \hline 4x^3 + 7x^2 + 2x + 3 \end{array} \right. \\
 \underline{- 4x^4 + 4x^3} \\
 7x^3 - 5x^2 + x + 7 \\
 \underline{- 7x^3 + 7x^2} \\
 2x^2 + x + 7 \\
 \underline{- 2x^2 + 2x} \\
 3x + 7 \\
 \underline{- 3x + 3} \\
 10
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{b) } 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5 \quad \left| \begin{array}{l} x + 1 \\ \hline 4x^3 - 6x^2 + 9x - 11 \end{array} \right. \\
 \underline{- 4x^4 - 4x^3} \\
 - 6x^3 + 3x^2 - 2x + 5 \\
 \underline{6x^3 + 6x^2} \\
 9x^2 - 2x + 5 \\
 \underline{- 9x^2 - 9x} \\
 - 11x + 5 \\
 \underline{11x + 11} \\
 16
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{c) } 7x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 1 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + x \\ \hline 7x^3 - 3x^2 + 6x - 11 \end{array} \right. \\
 \underline{- 7x^5 - 7x^4} \\
 - 3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 1 \\
 \underline{3x^4 + 3x^3} \\
 6x^3 - 5x^2 + 2x - 1 \\
 \underline{- 6x^3 - 6x^2} \\
 - 11x^2 + 2x - 1 \\
 \underline{11x^2 + 11x} \\
 13x - 1
 \end{array}$$

64. Utiliza la regla de Ruffini para realizar estas divisiones.

- a) $(x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 5) : (x + 2)$ d) $(2x^3 + x^2 - 3x + 5) : (x - 1)$
 b) $(x^3 - 8x + 12) : (x + 1)$ e) $(x^4 + 4x^3 + 5x^2 - x - 5) : (x + 1)$
 c) $(x^4 - x^3 + 4x^2 - 3) : (x - 2)$ f) $(x^3 - x^2 + 7) : (x - 1)$

a)

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 -2 & 1 & -3 & 1 & 3 & -5 \\
 & & -2 & 10 & -22 & 38 \\
 \hline
 & 1 & -5 & 11 & -19 & 33
 \end{array}$$

Cociente: $x^3 - 5x^2 + 11x - 19$ Resto: 33

b)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -1 & 1 & 0 & -8 & 12 \\
 & & -1 & 1 & 7 \\
 \hline
 & 1 & -1 & -7 & 19
 \end{array}$$

Cociente: $x^2 - x - 7$ Resto: 19

c)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & 4 & 0 & -3 \\ 2 & & 2 & 2 & 12 & 24 \\ \hline & 1 & 1 & 6 & 12 & 21 \end{array}$$

Cociente: $x^3 + x^2 + 6x + 12$ Resto: 21

d)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & & 2 & 3 & 0 \\ \hline & 2 & 3 & 0 & 5 \end{array}$$

Cociente: $2x^2 + 3x$ Resto: 5

e)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4 & 5 & -1 & -5 \\ -1 & & -1 & -3 & -2 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & -3 & -2 \end{array}$$

Cociente: $x^3 + 3x^2 + 2x - 3$ Resto: -2

f)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & & 1 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 7 \end{array}$$

Cociente: x^2 Resto: 7

65. Halla el valor de m para que la división $P(x) : A(x)$ tenga resto 0.

- a) $\begin{cases} P(x) = x^2 + mx + 3 \\ A(x) = x + 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} P(x) = x^3 + 2x^2 + mx + 2m \\ A(x) = x - 2 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} P(x) = x^3 + 4x^2 + mx - 6 \\ A(x) = x - 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} P(x) = x^4 + mx^2 - m - 1 \\ A(x) = x + 2 \end{cases}$

a)

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & m & 3 \\ -3 & & -3 & -3m+9 \\ \hline & 1 & m-3 & 0 \end{array}$$

$$-3m+9+3=0 \rightarrow m=4$$

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & m & -6 \\ 1 & & 1 & 5 & m+5 \\ \hline & 1 & 5 & m+5 & 0 \end{array}$$

$$m+5-6=0 \rightarrow m=1$$

c)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & m & 2m \\ 2 & & 2 & 8 & 2m+16 \\ \hline & 1 & 4 & m+8 & 0 \end{array}$$

$$4m+16=0 \rightarrow m=-4$$

d)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & m & 0 & -m-1 \\ -2 & & -2 & 4 & -2m-8 & 4m+16 \\ \hline & 1 & -2 & m+4 & -2m-8 & 0 \end{array}$$

$$-m-1+4m+16=0 \rightarrow m=-5$$

66. Calcula el valor de a para que se cumplan las igualdades.

a) $(ax^2 + 2) \cdot (x - a) = -3x^3 - 9x^2 + 2x + 6$

b) $(x^2 + ax - 4) \cdot (-3a + 1) = 4x^2 - 4x - 3$

c) $(x^4 - x^2 + a) \cdot \left(x + \frac{a}{2}\right) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2 + 2x + 2$

a) $ax^3 - a^2x^2 + 2x - 2a = -3x^3 - 9x^2 + 2x + 6 \rightarrow a = -3$

b) $-3ax^2 + x^2 - 3a^2x + ax + 12a - 4 = 4x^2 - 4x - 3 \rightarrow \begin{cases} -3a + 1 = 4 \rightarrow a = -1 \\ -3a^2 + a = -4 \rightarrow a = -1 \text{ o } a = \frac{4}{3} \\ 12a - 4 = -3 \rightarrow a = \frac{1}{12} \end{cases}$

Por tanto no existe ningún valor de a para el que se cumple la igualdad.

c) $x^5 + \frac{a}{2}x^4 - x^3 - \frac{a}{2}x^2 + ax + \frac{a^2}{2} = x^5 + x^4 - x^3 - x^2 + 2x + 2 \rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} = 1 \rightarrow a = 2 \\ a = 2 \\ \frac{a^2}{2} = 2 \rightarrow a = 2 \text{ o } a = -2 \end{cases}$

Por tanto, el valor de a que hace que se cumpla la igualdad es $a = 2$.

67. Extrae factor común.

a) $3x^2yz + 6xz - 9yz$

d) $4y^3z + 20yz - 26yz^2$

b) $15xy + 18xy^3z - 9xy$

e) $-2x^4y^3z + 2x^3yz - 6x^5y$

c) $2x^2 - 8xy^2 + 12xy$

f) $8x^2yz^4 + 16x^2yz^3 - 18x^3y^2z^2$

a) $3z \cdot (x^2y + 2x - 3y)$

d) $2yz \cdot (2y^2 + 10 - 13z)$

b) $3xy \cdot (5 + 6y^2z - 3)$

e) $-2x^3y \cdot (xy^2z - z + 3x^2)$

c) $2x \cdot (x - 4y^2 + 6y)$

f) $2x^2yz^2 \cdot (4z^2 + 8z - 9xy)$

68. Extrae factor común a estos polinomios.

a) $-15x^2y^5z^3 + 9xy^2 - 12x^3y^2 + 21x^4y^3$

b) $32a^2b^3 + 18a^4b^2 - 28a^3b^3 - 10a^2b^2c$

c) $-30x^4z^3 + 20x^2yz^3 - 40x^4z^2 + 50x^3y^2z^2$

d) $-11y^5z^3 + 33xy^2z - 66y^2z^3 + 44x^4y^3z^4$

a) $3xy^2 \cdot (-5xy^3z^3 + 3 - 4x^2 + 7x^3y)$

c) $10x^2z^2 \cdot (-3x^2z + 2yz - 4x^2 + 5xy^2)$

b) $2a^2b^2 \cdot (16b + 9a^2 - 14ab - 5c)$

d) $11y^2z \cdot (-y^3z^2 + 3x - 6z^2 + 4x^4yz^3)$

69. Desarrolla estos cuadrados.

a) $(6x + 5)^2$

c) $(2x - 7)^2$

e) $(3 - x)^2$

b) $(-3x + 2)^2$

d) $(-3 - 2x)^2$

f) $(-5 + 2x)^2$

- a) $36x^2 + 60x + 25$ d) $4x^2 + 12x + 9$
 b) $9x^2 - 12x + 4$ e) $x^2 - 6x + 9$
 c) $4x^2 - 28x + 49$ f) $4x^2 - 20x + 25$

70. Calcula.

- a) $(2x - 3) \cdot (2x + 3)$ c) $(x^2 - x) \cdot (x^2 + x)$
 b) $(4x + 5) \cdot (4x - 5)$ d) $(2x - 9) \cdot (2x + 9)$
- a) $4x^2 - 9$ c) $x^4 - x^2$
 b) $16x^2 - 25$ d) $4x^2 - 81$

71. Completa las siguientes igualdades en tu cuaderno.

- a) $(2x + 3)^2 = \square + 12x + \square$
 b) $(5 - 3x)^2 = 25 - \square + \square x^2$
 c) $(\square + \square)^2 = x^4 + 2x^3 + x^2$
- a) $(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$
 b) $(5 - 3x)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3x + (3x)^2 = 25 - 30x + 9x^2$
 c) $x^4 + 2x^3 + x^2 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot x + x^2 = (x^2 + x)^2$

72. Completa en tu cuaderno las siguientes igualdades.

- a) $(3x^2y + \square)^2 = \square + 12x^2y^4 + \square$
 b) $(\square - \square)^2 = 4x + 9y - \square$
 c) $(\square - \square)^2 = x^4 - 2x^3 + x^2$
- a) $(3x^2y + 2y^3)^2 = 9x^4y^2 + 12x^2y^4 + 4y^6$
 b) $(2\sqrt{x} - 3\sqrt{y})^2 = 4x + 9y - 12\sqrt{xy}$
 c) $(x^2 - x)^2 = x^4 - 2x^3 + x^2$

73. Realiza.

- a) $(2y - 5)^2 + (3 + y)^2$ c) $(y^2 - 5y)^2 + (1 - 3y)^2$
 b) $(3x + 2)^2 - (4 - x)^2$ d) $(x - 4x^2)^2 - (7x^2 + 2)^2$
- a) $4y^2 - 20y + 25 + 9 + 6y + y^2 = 5y^2 - 14y + 34$
 b) $9x^2 + 12x + 4 - (16 - 8x + x^2) = 8x^2 + 20x - 12$
 c) $y^4 - 10y^3 + 25y^2 + 1 - 6y + 9y^2 = y^4 - 10y^3 + 34y^2 - 6y + 1$
 d) $x^2 - 8x^3 + 16x^4 - (49x^4 + 28x^2 + 4) = -33x^4 - 8x^3 - 27x^2 - 4$

74. Expresa estos polinomios como el cuadrado de una suma o una diferencia.

a) $9x^2 + 18x + 9$ c) $x^2 + 16x + 64$

b) $16x^2 - 16x + 4$ d) $4x^2 + 4x + 1$

a) $3^2 \cdot x^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3x + 3^2 = (3x + 3)^2$

b) $4^2 \cdot x^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2x + 2^2 = (4x - 2)^2$

c) $1^2 \cdot x^2 + 2 \cdot 1 \cdot 8x + 8^2 = (x + 8)^2$

d) $2^2 \cdot x^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1x + 1^2 = (2x + 1)^2$

75. Expresa estos polinomios como el cuadrado de una suma o una diferencia.

a) $x^2 + 4xy + 4y^2$ c) $x^2 - 2x^2y + x^2y^2$

b) $9x^2 - 6x^3 + x^4$ d) $x^6 - 2x^3y + y^2$

a) $(x+2y)^2$ b) $(3x-x^2)^2$ c) $(x-xy)^2$ d) $(x^3-y)^2$

76. Indica cuáles de estos polinomios son divisores del polinomio $P(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

a) $x + 2$ c) $x + 1$ e) $x - 3$

b) $2x + 1$ d) $x - 2$ f) $x + 3$

a)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -10 & 0 & 9 \\ -2 & & -2 & 4 & 12 & -24 \\ \hline & 1 & -2 & -6 & 12 & -15 \end{array}$$

$x + 2$ no es divisor de $P(x)$.

b) $2x + 1$ no es divisor de $P(x)$ porque el resto de la división es $\frac{105}{16}$.

c)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -10 & 0 & 9 \\ -1 & & -1 & 1 & 9 & -9 \\ \hline & 1 & -1 & -9 & 9 & 0 \end{array}$$

$x + 1$ es divisor de $P(x)$.

d) $x - 2$ no es divisor de $P(x)$ ya que 2 no es divisor de 9.

e)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -10 & 0 & 9 \\ 3 & & 3 & 9 & -3 & -9 \\ \hline & 1 & 3 & -1 & -3 & 0 \end{array}$$

$x - 3$ es divisor de $P(x)$.

f)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -10 & 0 & 9 \\ -3 & & -3 & 9 & 3 & -9 \\ \hline & 1 & -3 & -1 & 3 & 0 \end{array}$$

$x + 3$ es divisor de $P(x)$.

77. Comprueba si $x + 3$ es divisor de estos polinomios y, en caso de que lo sea, encuentra el cociente.

- a) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 15$ c) $P(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$
 b) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$ d) $P(x) = x^3 - 7x + 6$

a)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -5 & -15 \\ -3 & & -3 & 0 & 15 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & 0 \end{array}$$

Es divisor. El cociente es $x^2 - 5$.

c)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & -3 & -18 \\ -3 & & -3 & -3 & 18 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Es divisor. El cociente es $x^2 + x - 6$.

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 2 & -6 \\ -3 & & -3 & 18 & -60 \\ \hline & 1 & -6 & 20 & -66 \end{array}$$

No es divisor.

d)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ -3 & & -3 & 9 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$$

Es divisor. El cociente es $x^2 - 3x + 2$.

78. Sin hacer cálculos, razona cuáles de estos polinomios tienen como divisor a x y cuáles a x^2 .

- a) $P(x) = x^3 + x^2 + 6x$ d) $P(x) = 2x^2 - x^3$
 b) $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 9x^2$ e) $P(x) = (x - x^2) \cdot (x - 5)$
 c) $P(x) = (x^3 - x^2) \cdot (x + 4)$ f) $P(x) = (x^2 - x)^3$

Los polinomios en los que se puede sacar factor común a x^2 tienen como divisores a x y a x^2 . En los que solo se puede sacar factor común x tienen como divisor solo a x .

Tienen como divisor a x y x^2 los polinomios de los apartados b), c), d) y f). El resto de polinomios solo tienen como divisor a x .

79. Factoriza estos polinomios.

- a) $x^2 - 3x$ c) $x - x^2$ e) $x^4 - 4x^2$ g) $x^3 - 2x^2 + x$
 b) $x^4 + 5x^3$ d) $x - x^3$ f) $x^2 - 25x$ h) $x^3 - 6x^2 + 9x$
 a) $x \cdot (x - 3)$ e) $x^2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$
 b) $x^3 \cdot (x + 5)$ f) $x \cdot (x - 25)$
 c) $x \cdot (1 - x)$ g) $x \cdot (x - 1)^2$
 d) $x \cdot (1 - x) \cdot (x + 1)$ h) $x \cdot (x - 3)^2$

80. Encuentra tres divisores de estos polinomios y escribe su descomposición factorial.

- a) $x^3 - x^2 - 10x - 8$ d) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
 b) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ e) $x^3 - 7x^2 + 14x - 8$
 c) $x^3 + 3x^2 - 6x - 8$ f) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
 a) $(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 4) \rightarrow$ Divisores: $x + 1, x + 2$ y $x - 4$
 b) $(x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) \rightarrow$ Divisores: $x + 1, x - 2$ y $x + 3$
 c) $(x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 4) \rightarrow$ Divisores: $x + 1, x - 2$ y $x + 4$

d) $(x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-3) \rightarrow$ Divisores: $x-1$, $x+2$ y $x-3$

e) $(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-4) \rightarrow$ Divisores: $x-1$, $x-2$ y $x-4$

f) $(x+1)^3 \rightarrow$ Divisores: $x+1$, $(x+1)^2$ y $(x+1)^3$

81. Obtén la descomposición factorial.

a) $x^4 - 13x^2 + 36$

d) $x^4 - 17x^2 + 16$

b) $x^4 - 20x^2 + 64$

e) $x^4 - 11x^2 + 18$

c) $x^4 - 25x^2 + 144$

f) $x^4 - 29x^2 + 100$

a) $(x+2) \cdot (x-2) \cdot (x+3) \cdot (x-3)$

d) $(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x+4) \cdot (x-4)$

b) $(x+2) \cdot (x-2) \cdot (x+4) \cdot (x-4)$

e) $(x+\sqrt{2}) \cdot (x-\sqrt{2}) \cdot (x+3) \cdot (x-3)$

c) $(x+3) \cdot (x-3) \cdot (x+4) \cdot (x-4)$

f) $(x+2) \cdot (x-2) \cdot (x+5) \cdot (x-5)$

82. Termina la descomposición factorial.

a) $(x-x^2) \cdot (x^2-25)$

d) $(4x^2-2x) \cdot (x^2+4x+4)$

b) $(x^3-x^2) \cdot (x^2-1)$

e) $(x^2-2x+1) \cdot (x^2-4x+4)$

c) $(x^2-4) \cdot (x^2-64)$

f) $(3x-9x^2) \cdot (3x^2+6x)$

a) $x \cdot (1-x) \cdot (x+5) \cdot (x-5)$

d) $2x \cdot (x+2)^2 \cdot (2x-1)$

b) $x^2 \cdot (x-1)^2 \cdot (x+1)$

e) $(x-1)^2 \cdot (x-2)^2$

c) $(x+2) \cdot (x-2) \cdot (x+8) \cdot (x-8)$

f) $9x^2 \cdot (x+2) \cdot (1-3x)$

83. Descompón factorialmente.

a) $-2x^3 + 3x^2 + 8x - 12$

d) $2x^3 + 9x^2 + 12x + 5$

b) $-8x^3 - 6x^2 + 29x - 15$

e) $6x^3 + 5x^2 - 6x$

c) $24x^3 + 46x^2 - 6x - 4$

f) $9x^3 - 3x^2 - 2x$

a) $(x+2) \cdot (x-2) \cdot (3-2x)$

d) $(x+1)^2 \cdot (2x+5)$

b) $(x-1) \cdot (3-4x) \cdot (5+2x)$

e) $x \cdot (2x+3) \cdot (3x-2)$

c) $2 \cdot (x+2) \cdot (3x-1) \cdot (4x+1)$

f) $x \cdot (3x+1) \cdot (3x-2)$

DEBES SABER HACER

1. Realiza las operaciones e indica el grado del monomio resultante.

- a) $2x^2 + 3x^2 - 7x^2 + 8x^2 - x^2$
 - b) $5xy^3 - 2xy^3 + 7xy^3 - 3xy^3 + 12xy^3$
 - c) $5xz - 3xz + 15xz - 11xz + 8xz - 3xz$
 - d) $(6ac^3) \cdot (-2a^2c^3) \cdot (-3ac) \cdot (-4a^3c^2)$
 - e) $(21x^2y^3) : (7xy^2)$
- a) $5x^2 \rightarrow$ Grado 2 d) $-144a^7c^9 \rightarrow$ Grado 16
 b) $19xy^3 \rightarrow$ Grado 4 e) $3xy \rightarrow$ Grado 2
 c) $11xz \rightarrow$ Grado 2

2. Halla el valor numérico del polinomio $P(x) = -x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 8x - 4$ para:

- a) $x = 0$ c) $x = -2$
 - b) $x = -\frac{1}{2}$ d) $x = -3$
- a) $P(0) = -4$ b) $P\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-167}{16}$ c) $P(-2) = -104$ d) $P(-3) = -307$

3. Calcula el resultado de las operaciones.

- a) $(2 - 3x) \cdot (2 + 3x) - (4 + 5x) \cdot (4 - 5x)$
 - b) $(x^2 - 1)^2 + (6x^2 + 1) \cdot (1 - 6x^2)$
- a) $4 - 9x^2 - (16 - 25x^2) = 16x^2 - 12$ b) $x^4 - 2x^2 + 1 + 1 - 36x^4 = -35x^4 - 2x^2 + 2$

4. Halla el cociente y el resto de estas divisiones.

- a) $(x^4 + x^3 - 8x^2 + 4) : (x - 1)$
- b) $(x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 6x - 15) : (x + 1)$

a)

1	1	-8	0	4	
1	1	2	-6	-6	
1	2	-6	-6	-2	

El cociente es $x^3 + 2x^2 - 6x - 6$ y el resto -2 .

b)

-1	1	-5	3	-6	-15
-1	-1	6	-9	15	
1	-6	9	-15	0	

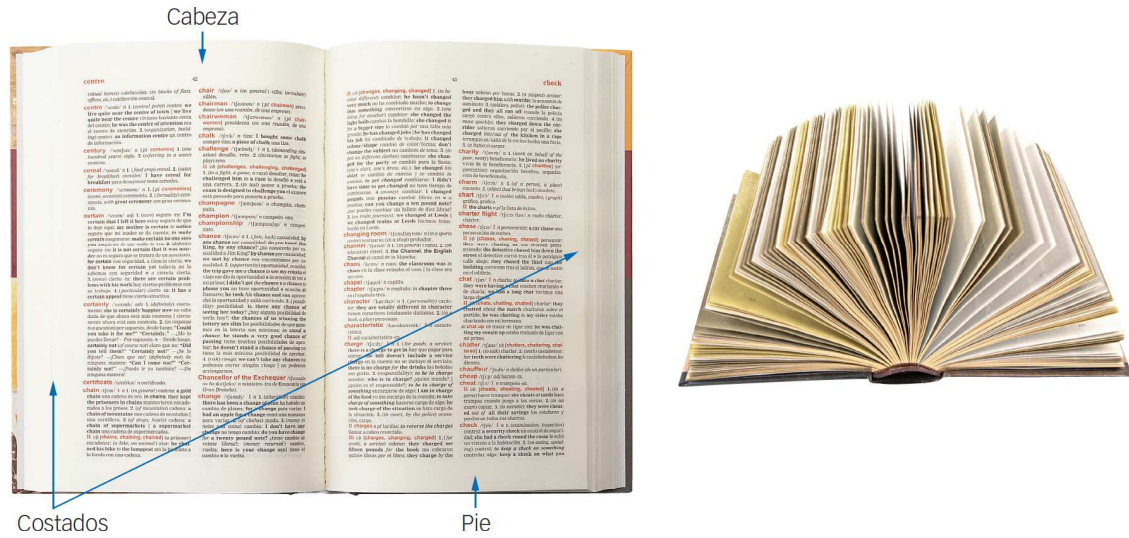
El cociente es $x^3 - 6x^2 + 9x - 15$ y el resto 0 .

5. Factoriza estos polinomios.

- a) $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$
 - b) $Q(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
 - c) $R(x) = 4x^5 - 8x^4 - 4x^3 + 8x^2$
- a) $P(x) = (x-1) \cdot (x+1)^2$ b) $Q(x) = (x-1)^2 \cdot (x+1)^2$ c) $R(x) = 4x^2 \cdot (x-2) \cdot (x+1) \cdot (x-1)$

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

84. El término *formato de un libro* se refiere a la forma y dimensiones de este.



Hoy en día, el formato de un libro se basa en intentar transmitir al lector una sensación de equilibrio en la página. Una de las proporciones más utilizadas es que el largo sea $\frac{3}{5}$ del ancho. Además, para dar una mayor sensación de claridad se dejan los márgenes, espacios en blanco que quedan a cada uno de los cuatro lados de la hoja impresa.

Este es el formato que ha diseñado una editorial para la nueva colección que lanzará al mercado.

- Largo: $\frac{3}{5}$ del ancho.
- Cabeza y pie: iguales, y tienen que ser $\frac{1}{10}$ del alto de la hoja.
- Costados: el derecho será de 2 cm, el izquierdo tiene que ser el doble que el derecho.

Si llamamos x al ancho de la hoja:

- ¿Cuál es la expresión del área de una página de este formato?
- ¿Cuál es la expresión del área de la zona impresa?

Ancho: x Largo: $\frac{3}{5}x$

Margen superior e inferior: $\frac{1}{10} \cdot x = \frac{x}{10}$ Margen derecho: 2 cm Margen izquierdo: 4 cm

a) Área = base \times altura = $x \cdot \frac{3}{5}x = \frac{3}{5}x^2$

b) Área = base \times altura = $\left(\frac{3}{5}x - 2 - 4\right) \cdot \left(x - 2 \cdot \frac{x}{10}\right) = \left(\frac{3}{5}x - 6\right) \cdot \frac{8x}{10} = \frac{12}{25}x^2 - \frac{24}{5}x$

FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

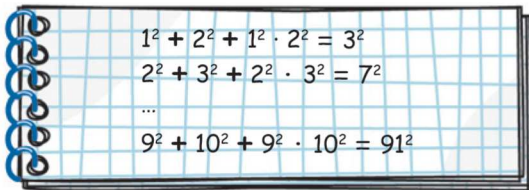
85. Escribe, en cada caso, un polinomio de grado 5 que tenga estos polinomios como divisores.

- a) $P(x, y) = x - y$ $Q(x, y) = 2x + 5y$
- b) $P(x, y) = xy + 2$ $Q(x, y) = x$ $R(x, y) = 2 - 7x^2$
- c) $P(x, y) = 3y - x$ $Q(x, y) = x^3 - 5$
- d) $P(x, y) = x$ $Q(x, y) = x^2y$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- a) $S(x, y) = (x - y)^4 \cdot (2x + 5y)$ $S(x, y) = (x - y)^3 \cdot (2x + 5y)^2$
 $S(x, y) = (x - y) \cdot (2x + 5y)^4$ $S(x, y) = (x - y)^2 \cdot (2x + 5y)^3$
- b) $S(x, y) = x(xy + 2) \cdot (2 - 7x^2)$
- c) $S(x, y) = (3y - x)^2 \cdot (x^3 - 5)$
- d) $S(x, y) = x^2 \cdot x^2y$

86. Estas sumas son cuadrados perfectos.



A la vista de los resultados, ¿sabrías determinar a qué cuadrado es igual la siguiente expresión?

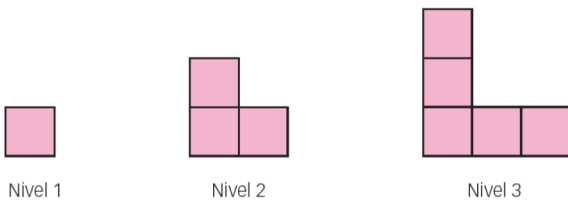
$$x^2 + (x + 1)^2 + x^2(x + 1)^2$$

$$\begin{aligned} x^2 + (x + 1)^2 + x^2(x + 1)^2 &= x^2 + (x + 1)^2 + [x(x + 1)]^2 = 2x^2 + 2x + 1 + [x(x + 1)]^2 = \\ &= 2x(x + 1) + 1 + [x(x + 1)]^2 = [x(x + 1)]^2 + 2x(x + 1) + 1 = [x(x + 1) + 1]^2 \end{aligned}$$

87. Calcula la descomposición factorial y las raíces de estos polinomios.

- a) $P(-x)$, siendo $P(x) = x^2 - x$ c) $P(x^2) - P(x^3)$, siendo $P(x) = x^2$
 - b) $P(-x^2)$, siendo $P(x) = (x + 9)^2$ d) $P(x + x^2)$, siendo $P(x) = 4x - 3$
- a) $P(-x) = x^2 + x = x \cdot (x + 1) \rightarrow$ Raíces: 0 y -1
 - b) $P(-x^2) = (-x^2 + 9)^2 = (3 + x)^2 \cdot (3 - x)^2 \rightarrow$ Raíces: 3 y -3
 - c) $P(x^2) - P(x^3) = (x^2)^2 - (x^3)^2 = x^4 - x^6 = x^4(1 + x) \cdot (1 - x) \rightarrow$ Raíces: 0, 1 y -1
 - d) $P(x + x^2) = 4(x + x^2) - 3 = 4x^2 + 4x - 3 = (2x - 1) \cdot (2x + 3) \rightarrow$ Raíces: $\frac{1}{2}$ y $-\frac{3}{2}$

88. Observa esta secuencia.



- a) ¿Cuántos cuadrados necesitas para construir el nivel 4?
- b) ¿Cuántos utilizarás para construir hasta el nivel 4?
- c) ¿Cuántos para construir el nivel n ? ¿Y hasta el nivel n ?

- a) 7 cuadrados.
- b) $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ cuadrados.
- c) Es una progresión aritmética de diferencia 2. Para construir el nivel n se necesitan $2n - 1$ cuadrados.

Para construir hasta el nivel n se necesitan $\frac{[1 + (2n - 1)] \cdot n}{2} = \frac{n + 2n^2 - n}{2} = n^2$ cuadrados.

PRUEBAS PISA

89. Una revista utiliza un sistema de puntuaciones para evaluar los nuevos modelos y concede un premio de *Mejor Coche del Año* al coche con mejor puntuación. Se están evaluando cinco coches nuevos.

Coche	Seguridad (S)	Ahorro de combustible (C)	Diseño exterior (D)	Habitáculo interior (H)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
XK	3	2	3	2



Las puntuaciones se interpretan de la siguiente manera:

3 = Excelente; 2 = Bueno; 1 = Aceptable

- Para calcular la puntuación total de un coche, la revista utiliza la siguiente regla, que da una suma ponderada de las puntuaciones individuales:

$$\text{Puntuación total} = (3 \times S) + C + D + H$$

- El fabricante del coche Ca pensó que la regla para obtener la puntuación no era justa. Escribe una regla, con las cuatro variables multiplicadas por números positivos, para que el Ca sea el ganador.

(Prueba PISA 2003)

La regla $4S + 3C + D + 5H$ da como ganador a Ca.

90. Como consecuencia del calentamiento global, algunos glaciares se están derritiendo. Doce años después de que el hielo haya desaparecido, empiezan a crecer líquenes en las rocas.



Los líquenes crecen, más o menos, en forma de círculo. La relación entre el diámetro de este círculo y la edad del líquen se puede expresar aproximadamente mediante la fórmula:

$$d = 7,0 \cdot \sqrt{t - 12} \quad \text{para } t \geq 12$$

siendo d el diámetro del líquen en milímetros, y t el número de años desde que el hielo ha desaparecido.

- Calcular el diámetro que tendrá un líquen 16 años después de que el hielo haya desaparecido.
- Ana midió el diámetro de un líquen y obtuvo 35 milímetros. ¿Cuántos años han transcurrido desde que el hielo desapareció de este lugar?

(Prueba PISA 2012)

- $d = 7,0 \cdot \sqrt{16 - 12} = 14$ mm
- $d = 35$ mm $= 7,0 \cdot \sqrt{t - 12} \rightarrow t = 37$ Es decir, han transcurrido 37 años.

