EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

FUNCIÓN EXPONENCIAL

Hasta ahora hemos estudiado potencias pertenecientes a distintos campos numéricos.

Potencias de exponente natural: $a^n = \underbrace{a\,.\,a\,.\,a\,....\,a}_{n \text{ veces}} \quad n \in \mathbb{N}$

Potencias de exponente nulo: $a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$

Potencias de exponente entero negativo: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \quad n \in \mathbb{N}\ ,\ (a \neq 0)$

Potencias de exponente fraccionario: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \quad m \in \mathbb{Z}\ ,\ n \in \mathbb{N}$

y conocemos sus propiedades básicas:

$$a^n\,.\,a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{n.m} \qquad n\,,\,m \in \mathbb{Q}$$

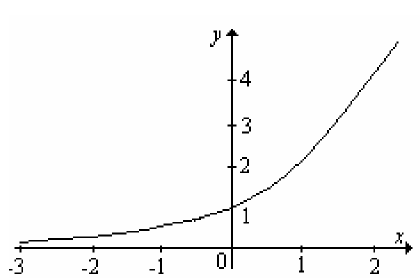
Es posible dar sentido a expresiones tales como 2^π , $3^{\sqrt{2}}$ y estimar su valor a partir de una aproximación del exponente irracional. Las propiedades antes mencionadas se extienden para el caso en que n y m son números reales cualesquiera.

Con esto, podemos definir la función exponencial.

Dado $a > 0$, llamamos ***función exponencial*** de base a a la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$.

Su comportamiento es muy distinto según sea $a > 1$, $a < 1$, $a = 1$.

Ejemplo: Analizar la gráfica de la función exponencial de acuerdo al valor de a.

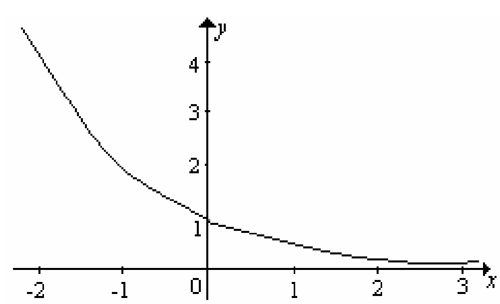


a) Si $a > 1$, por ejemplo $y = 2^x$

En este caso la función es creciente.

b) Si $0 < a < 1$, por ejemplo $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

Aquí la función es decreciente.



La siguiente tabla de valores nos permite hacer un estudio comparativo de estas dos funciones

x	2^x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x}$
0	1	1
1	2	$\frac{1}{2}$
2	4	$\frac{1}{4}$
3	8	$\frac{1}{8}$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	2
-2	$\frac{1}{4}$	4
-3	$\frac{1}{8}$	8
...	...	...

Ejercicio 1 : ¿Qué pasa cuando $a = 1$?

Ejercicio 2 : Graficar:

a) $y = 3^x$

b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

c) $y = 5^{-x}$

La función exponencial aparece con frecuencia en modelos matemáticos de diferentes procesos evolutivos.

***Ejemplo*:** Las amebas son seres unicelulares que se reproducen partiéndose en dos. Supongamos que las condiciones de un cultivo son tales que las amebas se duplican aproximadamente cada hora, y que inicialmente solo hay una ameba. Calcular el número de amebas que habrá según pasan las horas.

Tiempo (hs)	1	2	3	4	5	6	7	...
Nro. de amebas	2	4	8					...

El número total al cabo de x horas será

$$y = 2^x$$

Si al comienzo del proceso había k amebas, el número total sería:

$$y = k\, 2^x$$

Ejercicio 3 : Las sustancias radiactivas se desintegran emitiendo radiaciones y transformándose en otras sustancias.

Sustancia radiactiva → radiaciones + otra sustancia.

Este proceso se realiza con el paso del tiempo y a un ritmo que varía según el tipo de sustancia.
La rapidez con que se desintegra una sustancia radiactiva se mide mediante su "período de desintegración", que es el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de la masa inicial; algunos ejemplos son:

uranio:	2500	millones de años
radio:	1620	años
actinio:	28	años
talio:	3	minutos

Si tenemos una masa inicial de un gramo, averiguar qué cantidad de sustancia radiactiva queda al cabo de:

Tiempo (años)	1	2	3	4	5	6	7	...
grs. de sustancia								...

¿Cuál es la función que representa este proceso?. Graficar.

ECUACIONES EXPONENCIALES

A una ecuación en la que la incógnita aparece en un exponente se la llama ***ecuación exponencial***.

Ejemplos: Resolver

a) $5^{3-x} = 125$

Observemos que $5^{3-x} = 5^3$, entonces $3 - x = 3$, luego $x = 0$

b) $3^{1-x^2} = \dfrac{1}{27}$

$$3^{1-x^2} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$$

$$1 - x^2 = -3$$

$$x^2 = 4$$

$$|x| = 2 \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Ejercicio 4 : Encontrar el valor de x que verifica:

a) $\dfrac{4^{x+1}}{2^{x+2}} = 128$

b) $2^{3x} = 0{,}5^{3x+2}$

FUNCIÓN LOGARÍTMICA - LOGARITMOS

***Ejemplos*:** Resolver $10^{1-x} = 30$

$10^{1-x} = 3 \,.\, 2 \,.\, 5$

Observemos que no podemos expresar al segundo miembro como potencia de 10, lo que nos permitiría resolver la ecuación.

Nuestra pregunta es: ¿cómo podemos resolver ecuaciones del tipo $10^x = k$?, o en general ¿ $a^x = k$?.

Podemos hacerlo si conocemos la función inversa de $y = 10^x$. A esta nueva función se la llama ***función logarítmica en base 10*** y se denota $y = log_{10}\, x$.

Ahora, podemos decir que,

$$\text{si} \quad 10^x = k \quad \text{entonces} \quad x = log_{10}\, k$$

es decir, el logaritmo de un número en base 10 es el exponente al que hay que elevar la base 10 para obtener dicho número.

Generalizando:

Sea $a > 0$ y $a \neq 1$, e $y > 0$, llamaremos ***logaritmo en base a de y*** al único número x que verifica $a^x = y$. Es decir,

$$\boldsymbol{log_a\, y = x \;\Leftrightarrow\; a^x = y} \quad .$$

***Ejemplo*:** Para cada una de las siguientes igualdades exponenciales escribir la correspondiente igualdad logarítmica.

a) $2^7 = 128$

$2^7 = 128 \;\Leftrightarrow\; log_2\, 128 = 7$

b) $8^{1/3} = 2$

$8^{1/3} = 2 \;\Leftrightarrow\; log_8\, 2 = \dfrac{1}{3}$

Ejemplo: Calcular

a) $log_2\ 16$

$$log_2\ 16 = y \Leftrightarrow 2^y = 16 = 2^4 \Leftrightarrow y = 4$$

b) $log_2\ 32$

$$log_2\ 32 = y \Leftrightarrow 2^y = 32 = 2^5 \Leftrightarrow y = 5$$

Ejemplo: Resolver $10^{1-x} = 30$

$10^{1-x} = 30 \Leftrightarrow 1 - x = log_{10}\ 30 \approx 1{,}47712$
luego $x \approx -0{,}47712$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Recordemos algunas propiedades de los logaritmos:

1.- El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores

$$log_a\ (x\ .\ y) = log_a\ x + log_a\ y$$

2.- El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base

$$log_a\ (x^y) = y\ .\ log_a\ x$$

A partir de estas dos propiedades se pueden deducir las siguientes:

3.- El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$$log_a \left(\frac{x}{y} \right) = log_a\ x - log_a\ y$$

Observar que $log_a \left(\frac{x}{y} \right) = log_a \left(x\ .\frac{1}{y} \right)$

4.- El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz.

$$log_a \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y}\ log_a\ x = \frac{log_a\ x}{y}$$

Observar que $log_a \sqrt[y]{x} = log_a\ (x^{1/y})$

Observemos los siguientes hechos importantes:

1.- El logaritmo de la base es siempre 1

$$log_a\, a = 1 \quad \text{¿por qué?}$$

2.- El logaritmo de 1 es 0 en cualquier base

$$log_a\, 1 = 0 \quad \text{¿por qué?}$$

Ejemplos: Calcular:

a) $log_2\,(8\,.\,4)$

$$log_2\,(8\,.\,4) = log_2\, 8 + log_2\, 4 = 3 + 2 = 5$$

b) $log_4\,\dfrac{1}{64}$

$$log_4\,\frac{1}{64} = log_4\, 1 - log_4\, 64 = 0 - 3 = -3$$

<u>**Ejercicio 5**</u>**:** Calcular $\quad log_2\, 4^{81}$

<u>**Ejercicio 6**</u>**:** Calcular $\quad log_3\, \sqrt[15]{27}$

<u>**Ejercicio 7**</u>**:** Mostrar con un ejemplo que en general,

a) $log_a\,(x + y) \neq log_a\, x + log_a\, y$

b) $log_a\,(x - y) \neq log_a\, x - log_a\, y$

CAMBIO DE BASE

Las calculadoras científicas permiten solamente obtener logaritmos decimales y neperianos. Los ***logaritmos decimales*** son los logaritmos de base 10, y se acostumbra denotar $log_{10}\, x = log\, x$ omitiendo la base.

El ***logaritmo neperiano o natural*** es el logaritmo cuya base es el número $e \cong 2{,}7182$ y se denota $log_e\, x = ln\, x$.

Si queremos calcular logaritmos en otra base, es conveniente realizar un cambio de base.

Ejemplo: Calcular $log_2\, 3$

Llamemos $x = log_2\, 3$, entonces $2^x = 3$, aplicando logaritmo decimal a ambos miembros obtenemos $x\, log\; 2 = log\, 3$, finalmente, $x = \dfrac{log\, 3}{log\; 2} \cong 1{,}5849$.

El procedimiento general es:

$$\begin{aligned} y &= log_a\, x \\ a^y &= x \\ y\, log_b\, a &= log_b\, x \\ y &= \frac{log_b\, x}{log_b\, a} \end{aligned}$$

Ecuaciones Exponenciales y Ecuaciones Logaritmicas

Ya hemos resuelto ecuaciones exponenciales del tipo $5^{3\text{-}x} = 5^3$ y del tipo $10^{1\text{-}x} = 30$ utilizando logaritmos. Ahora resolveremos ecuaciones más complejas utilizando las propiedades del logaritmo y cambio de base.

Ejemplo: Hallar el valor de x en las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^x \,.\, 5^{2x} = 4$

Aplicando logaritmo decimal a ambos miembros de la igualdad, obtenemos:

$$\begin{aligned} log\;(\, 3^x \,.\, 5^{2x}\,) &= log\;\, 4 \\ log\, 3^x + log\, 5^{2x} &= log\;\, 4 \\ x \,.\, log\, 3 + 2\, x\;\, log\, 5 &= log\;\, 4 \\ x \,.\, 0{,}477 + 2\, x \,.\, 0{,}699 &\cong 0{,}602 \\ x \,.\, 0{,}477 + x \,.\, 1{,}398 &\cong 0{,}602 \\ x \,.\, (0{,}477 + 1{,}398) &\cong 0{,}602 \\ x \,.\, 1{,}875 &\cong 0{,}602 \\ x &\cong 0{,}321 \end{aligned}$$

b) $3^{x+1} + 3^{x\text{-}1} = 2431$

$$\begin{aligned} 3^{x+1} + 3^{x\text{-}1} &= 2431 \\ 3\,.3^x + 3^{\text{-}1} \,.\, 3^x &= 2431 \\ 3^x \left(3 + \frac{1}{3}\right) &= 2431 \\ 3^x \,.\, \frac{10}{3} &= 2431 \\ 3^x &= 729{,}3 \end{aligned}$$

$$x \ log\, 3 \ = \ log \ 729{,}3$$

$$x \ = \ \frac{log \ 729{,}3}{log \ 3}$$

$$x \ \cong \ 6{,}0003$$

c) $3^{2x} - 4 \,.\, 3^{x+1} = -27$

$$(3^x)^2 - 4 \,.\, 3 \,.\, 3^x + 27 = 0$$

Si $z = 3^x$ reemplazando en la ecuación, obtenemos

$$z^2 - 12\, z + 27 = 0$$

las raíces de esta ecuación son $z_1 = 9$, $z_2 = 3$.

Por lo tanto $3^x = 9 \ \Rightarrow \ x = 2$
y $3^x = 3 \ \Rightarrow \ x = 1$

d) $25^x + 5^x = 20$

$$25^x + 5^x = 20$$
$$(5^x)^2 + 5^x = 20$$

Si $z = 5^x$

$$z^2 + z - 20 = 0$$

Raíces de la ecuación cuadrática: $z_1 = 4$, $z_2 = -5$.

Luego $5^x = 4 \ \Rightarrow \ x\, log\, 5 = log\, 4 \ \Rightarrow \ x \cong 0{,}8613$

Si consideramos $5x = -5$, vemos que no hay valores de x que cumpla la ecuación, pues ninguna potencia de 5 puede ser negativa.

Ejemplo**:** Hallar el valor de x en las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $log_5\, 4\, x = 2$

$$log_5\, 4\, x = 2$$
$$4\, x = 5^2$$
$$x = \frac{25}{4}$$

b) $log_9\, (x + 1) + log_9\, 9\, (x + 1) = 2$

$$log_9\, (x + 1) + log_9\, 9\, (x + 1) = 2$$
$$log_9\, 9\, (x + 1)^2 = 2$$
$$9\, (x + 1)^2 = 9^2$$

$$(x+1)^2 = 9$$

$$|x+1| = 3$$

$$x + 1 = 3 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$x + 1 = -3 \Rightarrow x_2 = -4$$

Observemos que $log_9 (-3) = x \Leftrightarrow 9^x = -3$ igualdad que no se verifica para ningún valor de x.

c) $2 \, log_2^2 \, x - 10 \, log_2 \, x + 8 = 0$

Llamamos $z = log_2 x$, sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$2z^2 - 10z + 8 = 0$$

cuyas soluciones son $z_1 = 4$, $z_2 = 1$

$$log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 2^4 = 16$$

$$log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2^1 = 2$$

d) $3 \, log_2 x - 2 \, log_4 x = 2$

Necesitamos que todos los logaritmos involucrados en esta ecuación estén expresados en la misma base. Expresamos todos los logaritmos en base 2.

$$log_4 x = y \Leftrightarrow x = 4^y$$

$$log_2 x = y \, log_2 4$$

$$log_2 x = y \,.\, 2$$

$$y = \frac{1}{2} log_2 x$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$3 \, log_2 x - log_2 x = 2$$

$$2 \, log_2 x = 2$$

$$log_2 x = 1$$

$$x = 2$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Ejercicio 8: La población de una ciudad se triplica cada 50 años. En el tiempo $t = 0$, esta población es de 100000 habitantes. Dar una fórmula para la población $P(t)$ como función del tiempo t. ¿Cuál es la población después de

a) 100 años?
b) 150 años?
c) 200 años?

Ejercicio 9 : Las bacterias en una solución se duplican cada 3 minutos. Si hay 10^4 bacterias al comienzo, dar una fórmula para el número de bacterias en el tiempo t . ¿Cuántas bacterias hay después de

a) 3 minutos?

b) 27 minutos?

c) 1 hora?

Ejercicio 10 : Un elemento radiactivo que decae en su crecimiento $f(t)$ después de un tiempo t satisface la fórmula $f(t) = 60 \,.\, 2^{-0{,}02\,t}$.

a) ¿Cuál es la cantidad de este elemento al inicio del proceso?

b) ¿Qué cantidad queda después de 500 años?

c) ¿Qué cantidad queda después de 1000 años?

d) ¿Qué cantidad queda después de 2000 años?.

Ejercicio 11 : Graficar las siguientes funciones.

a) $y = 3 \,.\, 2^x$

b) $y = 3^x - 2$

c) $y = -\, 3^x$

d) $y = -\,\dfrac{1}{2} \,.\, 3^x$

Ejercicio 12 : Resolver aplicando la definición de logaritmo.

a) $log_5 25 + log_2 \dfrac{1}{4}$

b) $log\, 1000 - \dfrac{1}{3}\, log_{1/2}\, 1$

c) $log_7^2 49 - log_2 16$

d) $log_2 \sqrt{2} + log_3 \sqrt[3]{3^4} - log\, 0{,}001$

e) $log_3 27 + log_{1/2}\, 4 - 2\, log_{1/3} \dfrac{1}{9}$

Ejercicio 13 : Sabiendo que $log_2 5 \cong 2{,}3$, calcular aplicando las propiedades del logaritmo.

a) $log_2 10$

b) $log_2 2{,}5$

c) $log_2 \sqrt{5}$

d) $log_2 25$

Ejercicio 14 : Calcular realizando cambio de base

a) $log_2\ 10$

b) $log_5\ 2$

c) $log_{1/2}\ 20$

d) $log_4\ 0{,}1$

Ejercicio 15 : Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas

a) $log\ x = 3\ log\ 2$

b) $log\ x - log\ 3 = 2$

c) $5\ log\ x - log\ 32 = log\ \frac{x}{2}$

d) $2\ log\ x = log\ \frac{x}{2} - \frac{3}{5}$

e) $log\ 10 = 5 - 3\ log\ x$

f) $log\ \frac{21 - x^2}{3x + 210} = 2$

g) $10\ log_5 x - 5\ log_5 x + 5 = 0$

h) $log_3 x^2 + log_3 x - 6 = 0$

i) $ln\ x - ln\ x^3 = 8$

j) $log_2^2 x - 5\ log_2 x = 0$

Ejercicio 16 Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales

a) $4 \,.\, 3^x - 4 = 0$

b) $3 \,.\, 4^x + 6 = 0$

c) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

d) $2^x - 2^{2-x} = 0$

e) $3^{2x} + 9^x = 192$

f) $2^x + 4^x = 72$

g) $\frac{3^x + 3^{-x}}{3^{-x}} = 17 \,.\, 3^{x-1}$

h) $5^x + 5^{1-x} = 5$

i) $e^{2x} - 5\,(e^x - e) - e^{x+1} = 0$

j) $\sqrt[x]{3^{x+6}} - \sqrt[x-1]{3^x} = 0$

Ejercicio 17 : Una sustancia radiactiva se desintegra de acuerdo a la fórmula $r(t) = c\ e^{-7\,t}$ donde c es una constante. ¿En cuánto tiempo habrá exactamente un tercio de la cantidad inicial?.

Ejercicio 18 : Una población de bacterias crece de acuerdo a la fórmula $B(t) = c\, e^{kt}$ donde c y k son constantes y $B(t)$ representa el número de bacterias en función del tiempo. En el instante $t = 0$ hay 10^6 bacterias. ¿En cuánto tiempo habrá 10^7 bacterias, si en 12 minutos hay $2 \,.\, 10^6$ bacterias?.

Ejercicio 19 : En 1900 la población de una ciudad era de 50000 habitantes. En 1950 había 100000 habitantes. Asumamos que el número de habitantes en función del tiempo se ajusta a la fórmula $P(t) = c\, e^{kt}$ donde c y k son constantes. ¿Cuál fue la población en 1984?. ¿En qué año la población es de 200000 habitantes?.

Ejercicio 20 : La presión atmosférica como función de la altura está dada por la fórmula $P(h) = c\, e^{kh}$ donde c y k son constantes, h es la altura y $P(h)$ es la presión en función de la altura. Si en el barómetro se lee 30 al nivel del mar y 24 a los 6000 pies, hallar la lectura barométrica a los 10000 pies.

Ejercicio 21 : El azúcar se descompone en el agua según la fórmula $A(t) = c\, e^{-kt}$ donde c y k son constantes. Si 30 kilos de azúcar se reducen a 10 kilos en 4 horas, ¿cuánto tardará en descomponerse el 95% del azúcar?.

Ejercicio 22 : Una partícula se mueve con velocidad $S(t) = c\, e^{-kt}$ donde c y k son constantes. Si la velocidad inicial en $t = 0$ es de 16 unidades por minuto, y en 2 minutos se reduce a la mitad, hallar el valor de t cuando la velocidades de 10 unidades/minuto.

Ejercicio 23 : ¿Qué relación debe existir entre a y b para que se verifique que $\log a + \log b = 0$?.