Cuerpos geométricos

7

PUNTO DE PARTIDA

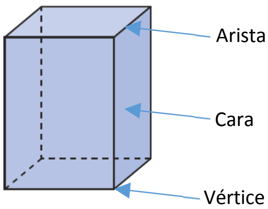
Alrededor de la Tierra orbitan aproximadamente 5 600 satélites artificiales. Nos ayudan a conocer los cambios climáticos y la previsión meteorológica. Gracias a ellos nos comunicamos y vemos la televisión. En la foto aparece uno de ellos. ¿Reconoces su forma? Además, la propia Tierra es un cuerpo geométrico casi perfecto. ¿Sabes qué nombre recibe?

El satélite de la fotografía tiene principalmente forma de cilindro, aunque sus extremos están formados por diversos troncos de cono y otros cilindros de diámetro menor.

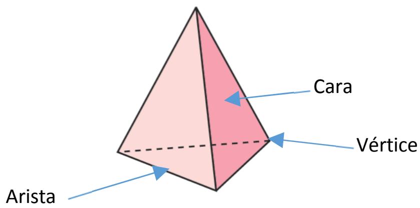
La Tierra es una esfera casi perfecta.

1. Copia estos poliedros e indica sus elementos.

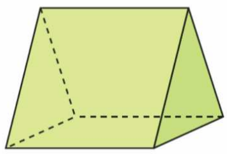
a)



b)

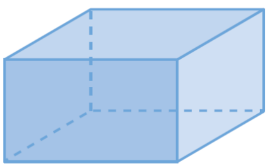


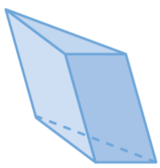
2. Cuenta el número de caras, vértices y aristas de estos poliedros. ¿Cumplen la Fórmula de Euler?



- Caras: 6 Vértices: 8 Aristas: 12 F. Euler: $C + V = A + 2 \rightarrow 6 + 8 = 12 + 2 = 14$
- Caras: 5 Vértices: 6 Aristas: 9 F. Euler: $C + V = A + 2 \rightarrow 5 + 6 = 9 + 2 = 11$

3. Dibuja un prisma recto de base rectangular y un prisma oblicuo de base triangular.





4. ¿Existe alguna pirámide que sea también poliedro regular?

Sí, es el tetraedro.

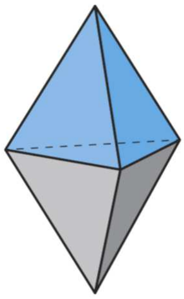
5. **¿Cuál es el mínimo número de aristas de un prisma? ¿Y de una pirámide?**

Los prismas y las pirámides que poseen el mínimo número de aristas son aquellos cuyas bases son triángulos.

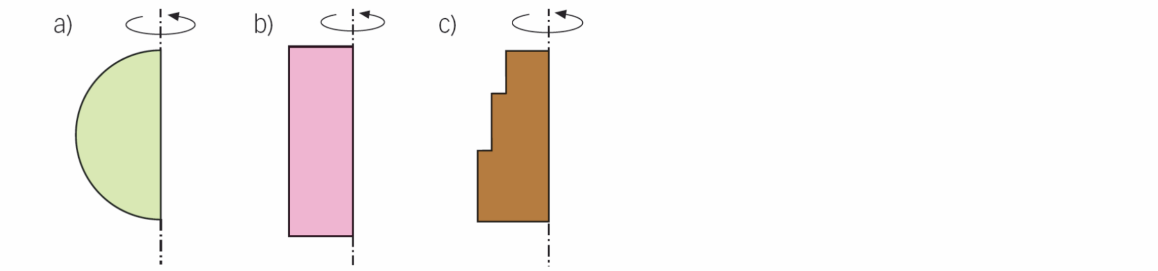
En el caso de los prismas, el número mínimo de aristas es 9; y, en el de las pirámides, 6.

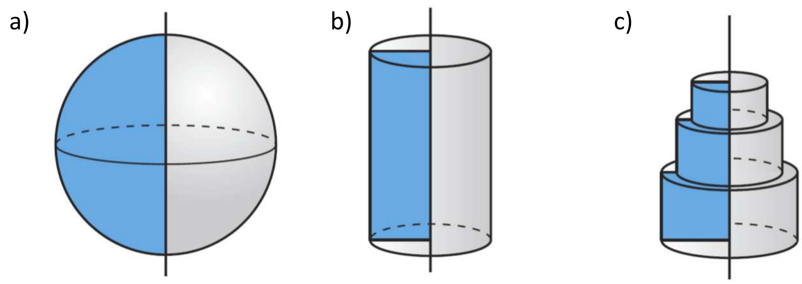
6. **Dibuja dos pirámides triangulares invertidas unidas por sus bases. ¿Es un poliedro regular?**

No es un poliedro regular.

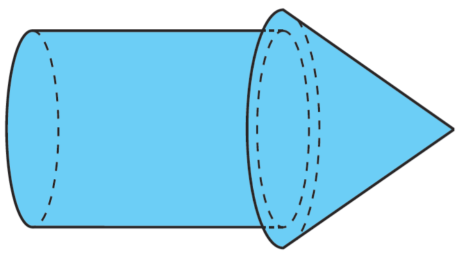


7. **Dibuja los cuerpos que se generan al girar las siguientes figuras en torno a los ejes indicados.**





8. **¿Qué polígonos han girado para generar esta figura que aparece a continuación?**



Han girado un rectángulo y un triángulo rectángulo para formar el cilindro y el cono, respectivamente.

9. **Halla el área de un ortoedro de 9 cm de altura que tiene una base que mide 2 × 3 cm.**

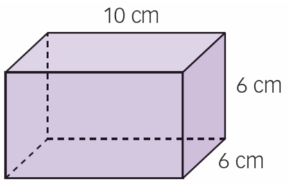
$A_{\text{Ortoedro}} = 2 \cdot (2 \cdot 3 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 9) = 102 \text{ cm}^2$

10. **Una pirámide octogonal regular tiene una base que mide 2 m de lado y 2,41 m de apotema. Indica cuál será el área de esta pirámide octogonal si sabemos que la medida de su apotema es de 6 m.**

$A_{\text{Octógono}} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{16 \cdot 2{,}41}{2} = 19{,}28 \text{ m}^2$ $\qquad A_{\text{Cara}} = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6 \text{ m}^2$

$A_{\text{Total}} = A_{\text{Octógono}} + 8 \cdot A_{\text{Cara}} = 67{,}28 \text{ m}^2$

11. **Loli pinta joyeros de madera. Hoy ha pintado dos como el de la figura. ¿Qué área ha pintado en total?**



$A_{\text{Joyero}} = 2 \cdot (6 \cdot 6 + 6 \cdot 10 + 6 \cdot 10) = 312 \text{ cm}^2$

$2 \cdot 312 = 624 \text{ cm}^2 \longrightarrow$ Loli ha pintado un área de 624 cm².

12. **Delia trabaja en una fábrica donde hacen latas cilíndricas de conservas para alimentación. Las latas de tomate tienen un área de 500 cm² y un radio de 5 cm. ¿Cuál es su altura?**

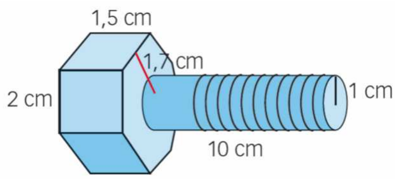
$A_{\text{Cilindro}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 500 \longrightarrow 50\pi + 10\pi h = 500 \longrightarrow h = \frac{500 - 50\pi}{10\pi} = 10{,}92 \text{ cm}$

13. **Un orfebre ha realizado un brazalete cilíndrico hueco que quiere cubrir de plata por la parte exterior. El radio del brazalete es de 3,5 cm, y su altura de 4 cm. ¿Qué área tiene que cubrir de plata?**

El área que tiene que cubrir de plata es el área lateral del cilindro, es decir:

$A_{\text{Plata}} = 2\pi rh \longrightarrow A_{\text{Plata}} = 28\pi = 87{,}96 \text{ cm}^2$

14. **¿Qué cantidad de recubrimiento antioxidante se necesita para cubrir uno de estos tornillos?**



Se obtienen las superficies de cada figura para sumarlas y obtener el área de recubrimiento total:

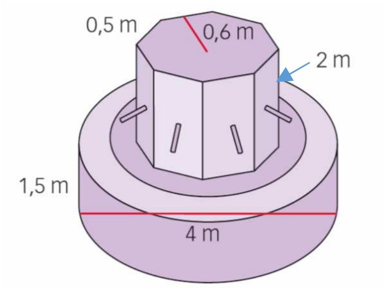
$A_{\text{Cilindro con una base}} = \pi r^2 + 2\pi rh = \pi + 20\pi = 21\pi = 65{,}97 \text{ cm}^2$

$A_{\text{Hexágono sin círculo interior}} = \frac{P \cdot a}{2} - \pi r^2 = \frac{2 \cdot 6 \cdot 1{,}7}{2} - \pi = 7{,}06 \text{ cm}^2$

$A_{\text{Rectángulos}} = 6 \cdot 2 \cdot 1{,}5 = 18 \text{ cm}^2$ $\qquad A_{\text{Hexágono}} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 1{,}7}{2} = 10{,}2 \text{ cm}^2$

$A_{\text{Total}} = 101{,}23 \text{ cm}^2$

15. **Se quiere pintar esta fuente con botes de pintura que sirven para cubrir 2 m² de superficie. ¿Cuántos botes se necesitan?**



Primero se obtiene el área de cada figura, y después se suman todas para calcular el área total que se va a pintar.

$A_{\text{Prisma octogonal}} = \dfrac{0{,}5 \cdot 8 \cdot 0{,}6}{2} + 8 \cdot 0{,}5 \cdot 2 = 9{,}2\ \text{m}^2$

$A_{\text{Lateral cilindro}} = 2\pi \cdot \dfrac{4}{2} \cdot 1{,}5 = 6\pi = 18{,}85\ \text{m}^2$

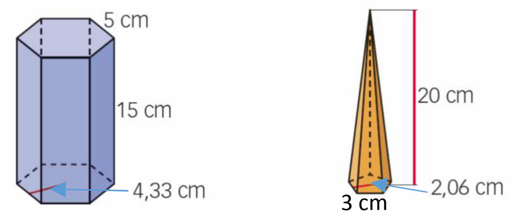
$A_{\text{Círculo sin octógono central}} = \pi \cdot 2^2 - \dfrac{0{,}5 \cdot 8 \cdot 0{,}6}{2} = 11{,}37\ \text{m}^2$

$A_{\text{Total}} = 39{,}42\ \text{m}^2$

Botes de pintura necesarios: $\dfrac{39{,}42}{2} = 19{,}71$

Se necesitan 20 botes.

16. **Gloria fabrica velas de cera. Hoy tiene un encargo de 5 velas con forma de pirámide y 7 con forma de prisma. ¿Cuánta cera necesita?**



El volumen de una vela con forma de prisma es $V_{\text{Prisma}} = \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 4{,}33}{2} \cdot 15 = 974{,}25\ \text{cm}^3$.

El volumen de una vela con forma piramidal es $V_{\text{Pirámide}} = \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 2{,}06}{2} \cdot \dfrac{20}{3} = 103\ \text{cm}^3$.

$V_{\text{Total}} = 5 \cdot 103 + 7 \cdot 974{,}25 = 7\,334{,}75\ \text{cm}^3$

17. **En una heladería se venden helados al corte con un grosor de 2 cm. Si la base de la barra de helado es un rectángulo de 5 × 8 cm, ¿qué volumen de helado tiene cada corte?**

El volumen de helado de un corte es $V = 5 \cdot 8 \cdot 2 = 80\ \text{cm}^3$.

18. **Halla el volumen de un cilindro de 0,7 m de alto y 0,4 m de radio.**

$V_{\text{Cilindro}} = 0{,}4^2\pi \cdot 0{,}7 = 0{,}35 \text{ m}^3$

19. **Calcula el volumen de un cono de altura 8 cm, cuyo radio mide 3 cm.**

$V_{\text{Cono}} = \dfrac{\pi \cdot 3^2 \cdot 8}{3} = 24\pi = 75{,}4 \text{ cm}^3$

20. **Una empresa tiene azúcar almacenado en un silo, que consta de un cilindro y un cono invertido acoplado a él. El cilindro mide 25 m de altura, y el cono, 3 m. El radio de ambos es de 2 m. ¿Qué volumen de azúcar cabe en el silo?**

$V_{\text{Cilindro}} = 2^2\pi \cdot 25 = 100\pi$

$V_{\text{Cono}} = \dfrac{\pi \cdot 2^2 \cdot 3}{3} = 4\pi$

$V_{\text{Silo}} = 100\pi + 4\pi = 104\pi = 326{,}73 \text{ m}^3$

21. **Localiza en un mapa en qué hemisferios están estos países.**

a) España. b) Uruguay. c) Vietnam.

a) España: hemisferio norte.

b) Uruguay: hemisferio sur.

c) Vietnam: hemisferio norte.

22. **Observa el mapa de los husos horarios del margen y determina la diferencia horaria entre Madrid y México.**

La hora en Madrid marca 7 horas más que en la zona noroeste de México; y 6 horas más, en la región sudeste.

23. **Busca en un mapa una ciudad que tenga latitud norte y longitud oeste, y otra con latitud sur y longitud este.**

Marrakech (Marruecos):

Latitud: 31° 38’ N Longitud: 8° O

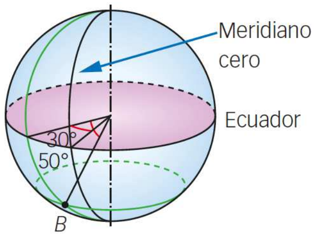
Wellington (Nueva Zelanda):

Latitud: 41° 17’ S Longitud: 174° 47’ E

24. **Realiza una búsqueda en Internet para conocer las coordenadas geográficas de la localidad en la que vives.**

Respuesta abierta. Por ejemplo, en Tres Cantos la latitud es 40° 36’ 24’’ N y la longitud es 3° 42’ 24’’ O.

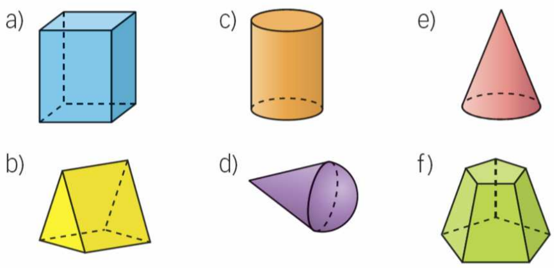
25. **Determina cuáles son las coordenadas geográficas del punto *B*.**



La latitud es 50° S y la longitud es 30° O.

ACTIVIDADES FINALES

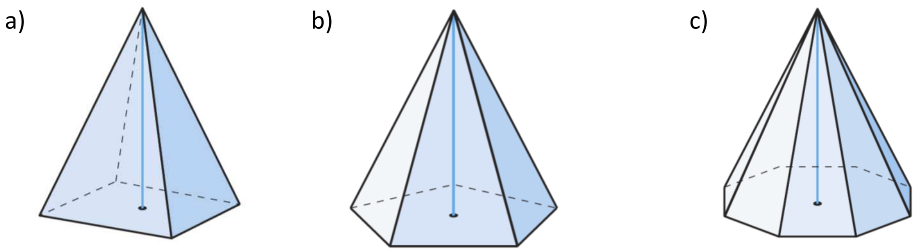
26. **Determina cuáles de estos cuerpos geométricos son poliedros.**



Son poliedros las figuras a), b), y f), porque son aquellas en las que sus caras son polígonos.

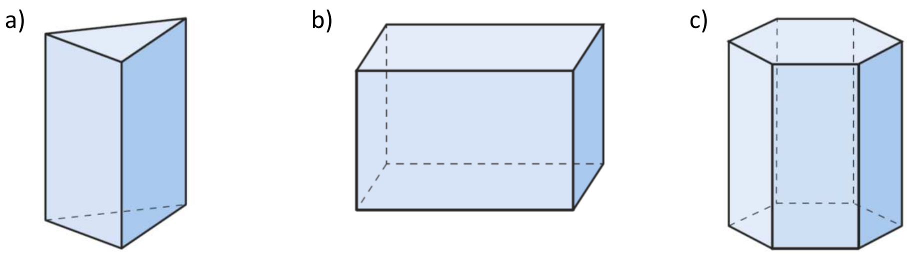
27. **Dibuja un poliedro que tenga una base que sea:**

a) Un cuadrado.
b) Un pentágono.
c) Un octógono.

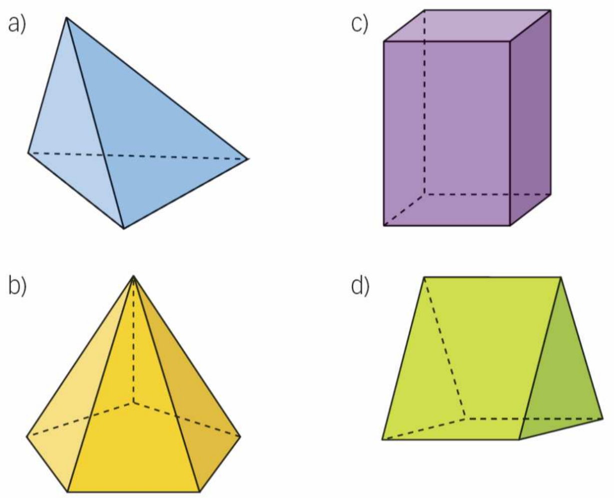


28. **Dibuja un poliedro que tenga dos bases que sean:**

a) Triángulos.
b) Rectángulos.
c) Hexágonos.



29. **Comprueba que se verifica la Fórmula de Euler para estos poliedros.**



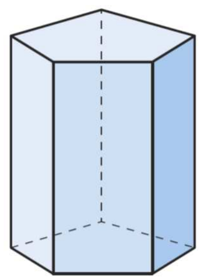
a) Caras: 4 Vértices: 4 Aristas: 6 F. Euler: $4 + 4 = 6 + 2 = 8 \rightarrow$ Sí

b) Caras: 6 Vértices: 6 Aristas: 10 F. Euler: $6 + 6 = 10 + 2 = 12 \rightarrow$ Sí

c) Caras: 6 Vértices: 8 Aristas: 12 F. Euler: $6 + 8 = 12 + 2 = 14 \rightarrow$ Sí

d) Caras: 5 Vértices: 6 Aristas: 9 F. Euler: $5 + 6 = 9 + 2 = 11 \rightarrow$ Sí

30. **Dibuja un poliedro con pentágonos y rectángulos. Después, cuenta sus caras, vértices y aristas. Comprueba que se cumple la Fórmula de Euler.**



Caras: 7 Vértices: 10 Aristas: 15 F. Euler: $7 + 10 = 15 + 2 = 17 \rightarrow$ Sí se cumple.

31. **Razona si lo siguiente es verdadero o falso.**

a) Un poliedro puede tener el mismo número de vértices y de aristas.

b) Un poliedro puede tener igual número de caras que de aristas.

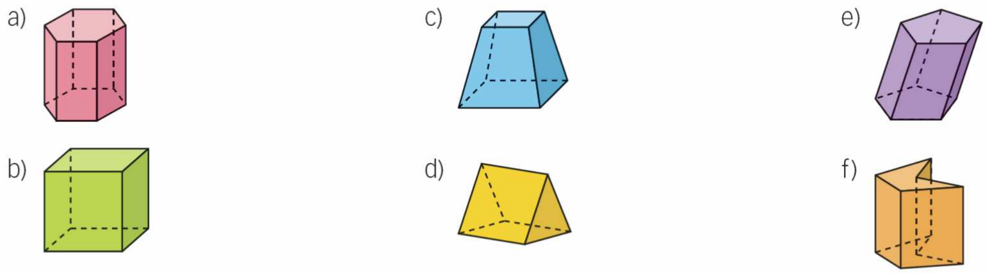
c) Un poliedro puede tener el mismo número de caras y de vértices.

a) Falso, pues si así fuese, se tendría un polígono, no una figura en el espacio.
Se demuestra con la fórmula de Euler: $C + V = A + 2 \rightarrow C + n = n + 2 \rightarrow C = 2 \rightarrow$ No existe ningún poliedro con 2 caras.

b) Falso:
$C + V = A + 2 \rightarrow n + V = n + 2 \rightarrow V = 2 \rightarrow$ Con dos vértices se tiene un segmento, no un poliedro.

c) Verdadero: por ejemplo, el tetraedro tiene 4 caras, 4 vértices y 6 aristas. En general, cualquier pirámide tiene el mismo número de caras que de vértices.

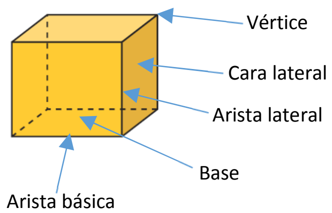
32. **Determina cuáles de estos poliedros son prismas.**



Son prismas las figuras a), b), d), e) y f), porque son aquellas en las que las bases son polígonos iguales paralelos que están unidas por paralelogramos.

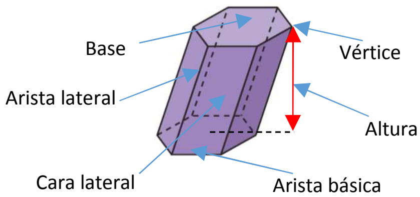
33. **Clasifica estos prismas y nombra sus principales elementos.**

a)



Es un prisma cuadrangular recto.

b)



Es un prisma hexagonal oblicuo.

34. **¿Qué polígono es la base de estos prismas?**

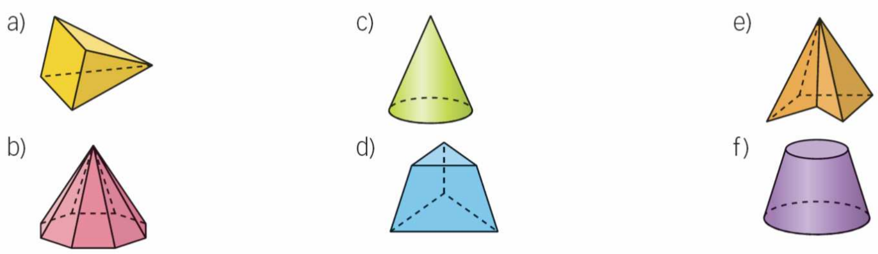
a) Prisma con nueve caras.
b) Prisma con diez vértices.
c) Prisma con dieciocho aristas.

a) Sea n el número de vértices de una de las bases. Entonces, por ser un prisma, el número de vértices es $2n$, y el número total de aristas es $3n$. Por tanto, utilizando la fórmula de Euler:
$C + V = A + 2 \rightarrow 9 + 2n = 3n + 2 \rightarrow n = 7 \rightarrow$ Las bases son dos heptágonos.

b) Sea n el número de vértices de una de las bases. Como el número de vértices es 10, por ser un prisma se tiene que $V = 2n \rightarrow 10 = 2n \rightarrow n = 5 \rightarrow$ Las bases son dos pentágonos.

c) Sea n el número de vértices de una de las bases. Entonces, por ser un prisma, el número total de vértices es $2n$, y el número de caras es $n + 2$. Por tanto, utilizando la fórmula de Euler:
$C + V = A + 2 \rightarrow n + 2 + 2n = 18 + 2 \rightarrow n = 6 \rightarrow$ Las bases son dos hexágonos.

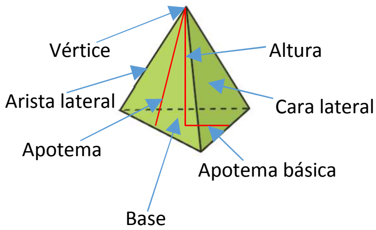
35. **Determina cuáles de estos poliedros son pirámides.**



Son pirámides las figuras a), b) y e), ya que tienen una única base y sus caras laterales son triángulos.

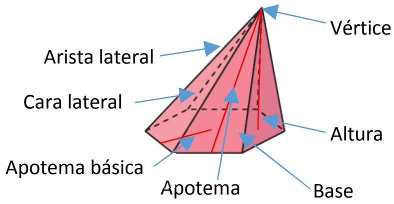
36. **Clasifica estas pirámides y nombra sus principales elementos.**

a)



Pirámide triangular recta.

b)



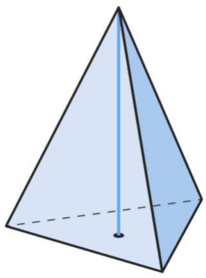
Pirámide hexagonal oblicua.

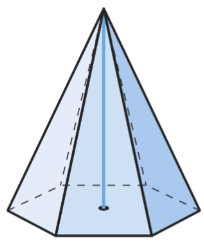
37. **Dibuja y determina cuántas caras, vértices y aristas tienen estas pirámides.**

a) Una pirámide triangular.

b) Una pirámide hexagonal.

a) Caras: 4 Vértices: 4 Aristas: 6 b) Caras: 7 Vértices: 7 Aristas: 12





38. **¿Qué polígono es la base de estas pirámides?**

a) Pirámide con siete vértices.

b) Pirámide con veinte aristas.

c) Pirámide con ocho caras.

a) La base de la pirámide tiene $7 - 1 = 6$ vértices $\rightarrow$ Es un hexágono.

b) Sea n el número de vértices de la base. Por ser una pirámide, el número total de vértices es igual al número total de caras, que es $n + 1$. Entonces, utilizando la fórmula de Euler:
$C + V = A + 2 \rightarrow n + 1 + n + 1 = 20 + 2 \rightarrow n = 10 \rightarrow$ La base de la pirámide es un decágono.

c) Sea n el número de vértices de la base. Por ser una pirámide, como el número de caras es igual que el de vértices, se tiene que $C = V = n + 1 = 8 \rightarrow n = 7 \rightarrow$ Por tanto, la base es un heptágono.

39. **Contesta razonadamente.**

a) ¿Cuál es el mínimo número de aristas de una pirámide?

b) ¿Cuál es el mínimo número de vértices de una pirámide?

c) ¿Cuál es el mínimo número de caras de una pirámide?

En una pirámide, $V = C = n + 1$, donde n es el número de vértices de la base. Entonces:

a) $C + V = A + 2 \rightarrow n + 1 + n + 1 = A + 2 \rightarrow A = 2n \rightarrow$ Como el número mínimo de vértices necesario para formar un polígono es $n = 3$, entonces $A = 6$.

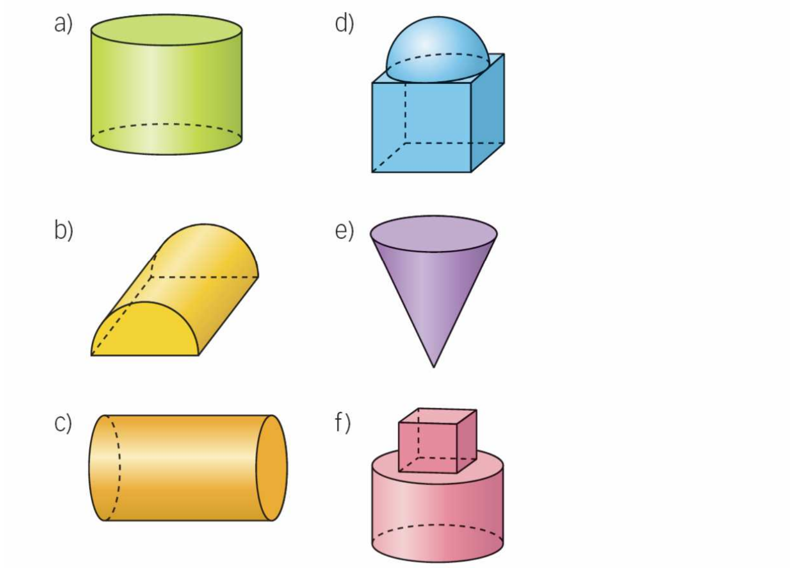
b) y c) Continuando con el razonamiento de la pregunta anterior, se observa que el mínimo número de vértices de una pirámide es $V = 4$, y por tanto $C = 4$.

Es decir, la pirámide que tiene el mínimo número de vértices, aristas y caras es la pirámide de base triangular.

40. **¿Existe alguna pirámide cuyas caras laterales sean todas triángulos rectángulos?**

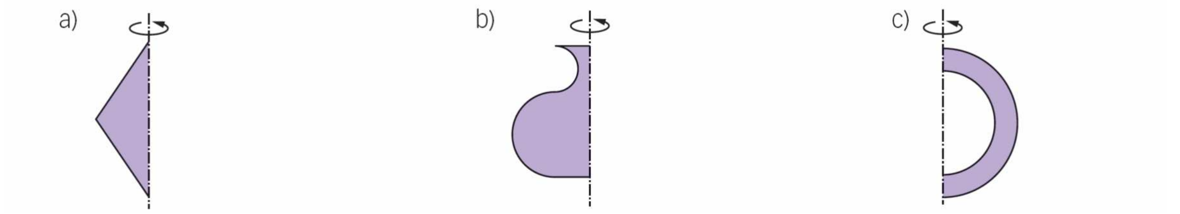
Sí existe. Una pirámide triangular con las caras laterales triángulos rectángulos e isósceles, colocando el ángulo recto en el vértice de la pirámide, y la base un triángulo equilátero.

41. **Determina cuáles de estas figuras son cuerpos de revolución.**

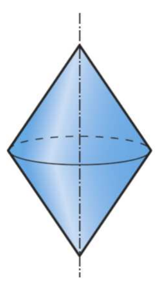


Son cuerpos de revolución las figuras a), b), c) y e), pues se generan al rotar una figura plana sobre un eje.

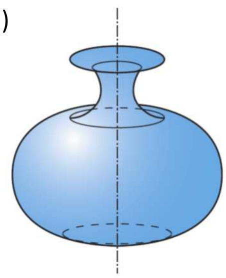
42. **Dibuja los cuerpos que se generan al girar las siguientes figuras en torno a los ejes indicados.**



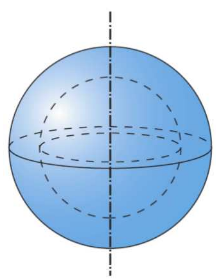
a)



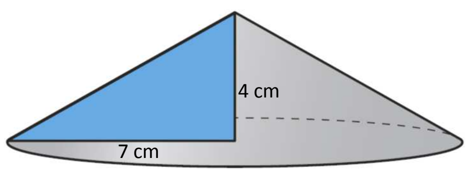
b)



c)



43. **Dibuja el cuerpo que se obtiene al girar un triángulo rectángulo de catetos 4 cm y 7 cm alrededor del cateto menor.**



44. **¿Qué cuerpo se obtiene al girar un rectángulo de 8 cm de largo y 6 cm de ancho alrededor de su lado más corto?**

Se obtiene un cilindro de radio 8 cm y altura 6 cm.

45. **Describe el cuerpo que se obtiene al girar un semicírculo alrededor de su diámetro de 4 cm.**

Se obtiene una esfera de radio 2 cm.

46. **Obtén el área de un cubo de 5 cm de arista.**

$A_{\text{Cubo}} = 6 \cdot 5 \cdot 5 = 150 \text{ cm}^2$

47. **Halla el área total de un prisma cuadrangular regular de arista básica 5 cm y altura 9 cm.**

$A_{\text{Prisma}} = 2 \cdot 5 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 9 = 230 \text{ cm}^2$

48. **Halla el área de un prisma regular de altura 12 cm y cuya base es:**

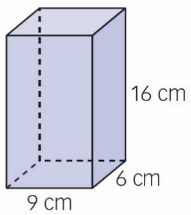
a) Un cuadrado de 4 cm de lado.

b) Un cuadrado de 18 cm de perímetro.

a) $A = 2 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 12 = 224 \text{ cm}^2$

b) $l = 18 : 4 = 4{,}5 \text{ cm}$ $\quad A = 2 \cdot 4{,}5 \cdot 4{,}5 + 4 \cdot 4{,}5 \cdot 12 = 256{,}5 \text{ cm}^2$

49. **Calcula el área del ortoedro.**



$A_{\text{Ortoedro}} = 2 \cdot (9 \cdot 6 + 9 \cdot 16 + 6 \cdot 16) = 588 \text{ cm}^2$

50. **Halla el área de un ortoedro cuyas aristas miden:**

a) 6 cm, 9 cm y 11 cm

b) 4 cm, 6 cm y 13 cm

c) 5 cm, 8 cm y 12 cm

a) $A = 2 \cdot (6 \cdot 9 + 6 \cdot 11 + 9 \cdot 11) = 438 \text{ cm}^2$

b) $A = 2 \cdot (4 \cdot 6 + 4 \cdot 13 + 6 \cdot 13) = 308 \text{ cm}^2$

c) $A = 2 \cdot (5 \cdot 8 + 5 \cdot 12 + 8 \cdot 12) = 392 \text{ cm}^2$

51. **Obtén el área de un ortoedro de altura 10 cm y cuya base es un rectángulo de 6 × 8 cm.**

$A_{\text{Ortoedro}} = 2 \cdot (6 \cdot 8 + 6 \cdot 10 + 8 \cdot 10) = 376 \text{ cm}^2$

52. **Calcula el área de un prisma octogonal regular cuya arista básica mide 2 cm, la apotema básica mide 2,41 cm y la altura mide 4 cm.**

$$A_{\text{Prisma}} = 2 \cdot A_{\text{Base}} + 8 \cdot A_{\text{Cara}} = 2 \cdot \frac{2 \cdot 8 \cdot 2{,}41}{2} + 8 \cdot 2 \cdot 4 = 102{,}56 \text{ cm}^2$$

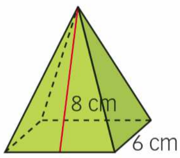
53. **Determina la altura de un prisma de base un cuadrado de lado 8 cm, sabiendo que su área mide 345 cm².**

Llamando h a la altura del prisma, se tiene que:

$$A_{\text{Prisma}} = 2 \cdot A_{\text{Base}} + 4 \cdot A_{\text{Cara}} = 2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 \cdot h = 345 \text{ cm}^2$$

$$128 + 32h = 345 \rightarrow 32h = 217 \rightarrow h = 6{,}78 \text{ cm}$$

54. **¿Cuál es el área de esta pirámide?**



$$A_{\text{Pirámide}} = A_{\text{Base}} + 4 \cdot A_{\text{Cara}} = 6^2 + 4 \cdot \frac{6 \cdot 8}{2} = 36 + 96 = 132 \text{ cm}^2$$

55. **Calcula el área total de la pirámide pentagonal regular cuya apotema mide 23,32 cm, la arista básica mide 18 cm y la apotema básica mide 12,39 cm.**

$$A_{\text{Pirámide}} = A_{\text{Base}} + 5 \cdot A_{\text{Cara}} = \frac{5 \cdot 18 \cdot 12{,}39}{2} + 5 \cdot \frac{18 \cdot 23{,}32}{2} = 557{,}55 + 1\,049{,}4 = 1\,606{,}95 \text{ cm}^2$$

56. **El área lateral de una pirámide recta de base cuadrada regular es 80 cm², y el perímetro de la base es 32 cm. Calcula la apotema de la pirámide.**

El lado de la base mide 32 : 4 = 8 cm. Entonces:

$$A_{\text{Lateral}} = 4 \cdot A_{\text{Cara}} = 80 \rightarrow A_{\text{Cara}} = 20 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Cara}} = \frac{8 \cdot a_p}{2} = 20 \rightarrow 4a_p = 20 \rightarrow a_p = 5 \text{ cm}$$

57. **Determina el área lateral de un prisma hexagonal regular de 14 cm de altura, 250 cm² de área de la base y apotema de la base 8,5 cm. ¿Cuál sería el área total del prisma si duplicásemos su altura?**

Es necesario obtener la longitud, l, del lado del hexágono:

$$A_{\text{Base}} = \frac{6l \cdot 8{,}5}{2} = 250 \rightarrow l = 9{,}8 \text{ cm}$$

Y con esta medida se calcula el área lateral:

$$A_{\text{Lateral}} = 6 \cdot 9{,}8 \cdot 14 = 823{,}2 \text{ cm}^2$$

La superficie total al duplicar la altura será:

$$A_{\text{Prisma}} = 2 \cdot A_{\text{Base}} + A_{\text{Lateral}} = 2 \cdot 250 + 2 \cdot 823{,}2 = 2\,146{,}4 \text{ cm}^2$$

58. Calcula el área de los cilindros con estas medidas.

a) Radio de la base 3 cm y altura 4 cm.

b) Generatriz 15 cm y diámetro de la base 8 cm.

c) Radio de la base 4 m y altura el triple del radio.

a) $A_{\text{Cilindro}} = 2\pi r\,(r + h) = 2\pi \cdot 3 \cdot (3 + 4) = 42\pi = 131{,}95\ \text{cm}^2$

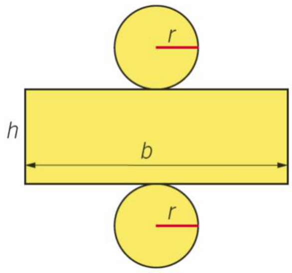
b) $r = \dfrac{8}{2} = 4\ \text{cm}$

$A_{\text{Cilindro}} = 2\pi \cdot 4 \cdot (4 + 15) = 152\pi = 477{,}52\ \text{cm}^2$

c) $h = 4 \cdot 3 = 12\ \text{m}$

$A_{\text{Cilindro}} = 2\pi \cdot 4 \cdot (4 + 12) = 128\pi = 402{,}12\ \text{m}^2$

59. Considera el desarrollo de este cilindro.



a) ¿Qué relación hay entre la longitud de la circunferencia de la base y el lado mayor del rectángulo?

b) Si el radio del círculo de la base es 5 cm, ¿cuánto mide el lado, *b*, del rectángulo?

a) La longitud de la circunferencia es igual que la longitud del lado mayor del rectángulo.

b) $b = 2\pi r = 2\pi \cdot 5 = 10\pi = 31{,}42\ \text{cm}$

60. Considera un rectángulo de 4 cm de ancho y 12 cm de largo. Halla el área del cilindro que se genera al girar el rectángulo alrededor de:

a) Su ancho.

b) Su largo.

a) $A = 2\pi r \cdot (r + h) = 2\pi \cdot 12 \cdot (12 + 4) = 384\pi = 1\,206{,}37\ \text{cm}^2$

b) $A = 2\pi r \cdot (r + h) = 2\pi \cdot 4 \cdot (4 + 12) = 128\pi = 402{,}12\ \text{cm}^2$

61. Averigua el radio de la base de un cilindro de 14 cm de altura sabiendo que su área lateral es 281,486 cm².

$A_{\text{Lateral}} = 2\pi rh = 28\pi r = 281{,}486 \rightarrow r = 3{,}2\ \text{cm}$

62. **Calcula el área de los conos con estas medidas.**

a) Altura 10 km y radio de la base 5 km.

b) Diámetro de la base 7 mm y altura 13 mm.

c) Altura 28 cm y la mitad de diámetro de la base.

a) $g = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11{,}18$ km

$A = \pi r \cdot (r + g) = 5\pi(5 + 11{,}18) = 254{,}15$ km^2

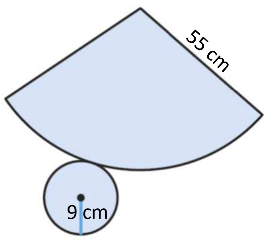
b) $r = 3{,}5$; $g = \sqrt{3{,}5^2 + 13^2} = 13{,}46$ mm

$A = \pi r \cdot (r + g) = 3{,}5\pi(3{,}5 + 13{,}46) = 186{,}48$ mm^2

c) $d = 14$; $r = 7$; $g = \sqrt{28^2 + 7^2} = 28{,}86$ cm

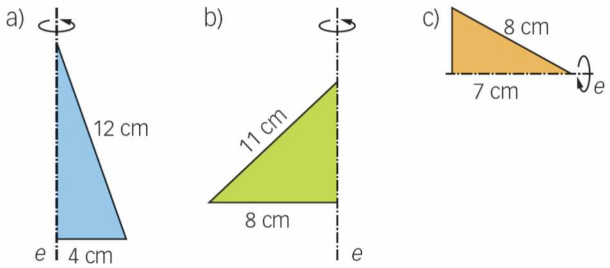
$A = \pi r \cdot (r + g) = 7\pi(7 + 28{,}86) = 788{,}6$ cm^2

63. **Dibuja el desarrollo plano de un cono con radio de la base 9 cm y generatriz 55 cm, y calcula su área.**



$A_{\text{Cono}} = \pi r \cdot (r + g) = 9\pi \cdot (9 + 55) = 1\,809{,}56$ cm^2

64. **Halla el área de los conos que se obtienen al girar estos triángulos rectángulos alrededor del eje *e*.**

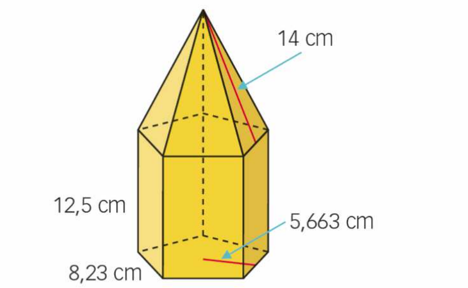


a) $A = \pi r \cdot (r + g) = 4\pi \cdot (4 + 12) = 64\pi = 201{,}06$ cm^2

b) $A = \pi r \cdot (r + g) = 8\pi \cdot (8 + 11) = 152\pi = 477{,}52$ cm^2

c) $r = \sqrt{8^2 - 7^2} = 3{,}87 \rightarrow A = \pi r \cdot (r + g) = 3{,}87\pi \cdot (3{,}87 + 8) = 144{,}32$ cm^2

65. Obtén el área total de este cuerpo.

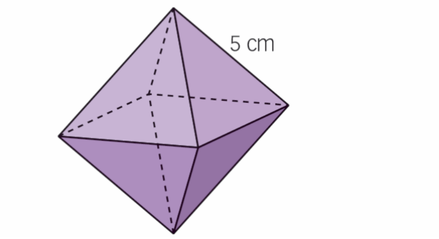


$$A_{\text{Pirámide}} = 5 \cdot A_{\text{Triángulo}} = 5 \cdot \frac{8{,}23 \cdot 14}{2} = 288{,}05 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Prisma}} = A_{\text{Base}} + 5 \cdot A_{\text{Rectángulo}} = \frac{5 \cdot 8{,}23 \cdot 5{,}663}{2} + 5 \cdot 8{,}23 \cdot 12{,}5 = 630{,}89 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Total}} = A_{\text{Pirámide}} + A_{\text{Prisma}} = 288{,}05 + 630{,}89 = 918{,}94 \text{ cm}^2$$

66. Calcula el área total de la figura.



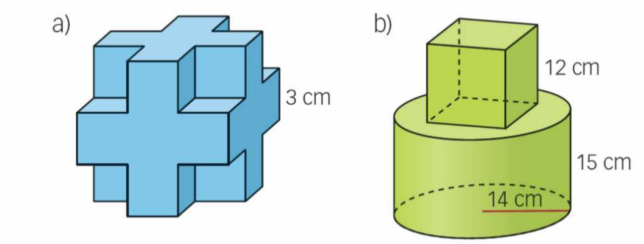
La figura es un octaedro y está compuesta por 8 triángulos equiláteros iguales.

Para poder calcular el área es necesario obtener la altura de cada uno de los triángulos.

$$5^2 = a_p^{\,2} + 2{,}5^2 \rightarrow a_p = \sqrt{25 - 6{,}25} = 4{,}33 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Octaedro}} = 8 \cdot A_{\text{Triángulo}} = 8 \cdot \frac{5 \cdot 4{,}33}{2} = 86{,}6 \text{ cm}^2$$

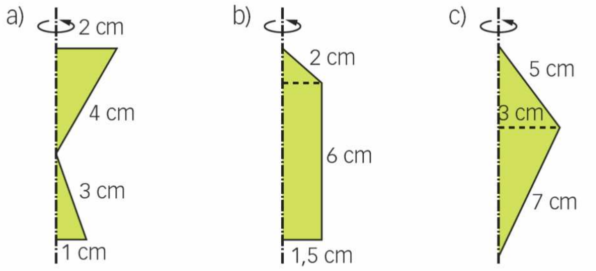
67. ¿Cuál es el área total de estas figuras?



a) La superficie de esta figura es equivalente a la de un cubo de lado $l = 9$ cm: $A = 6 \cdot 9^2 = 486 \text{ cm}^2$

b) $A_{\text{Figura}} = 5 \cdot A_{\text{Cuadrado}} + A_{\text{Cilindro}} - A_{\text{Cuadrado}} = 4 \cdot A_{\text{Cuadrado}} + A_{\text{Cilindro}} = 4 \cdot 12^2 + 2\pi \cdot 14 \cdot (14 + 15) = 3\,126{,}97 \text{ cm}^2$

68. **Halla el área total de los cuerpos de revolución que se obtienen al girar las siguientes figuras planas alrededor del eje que se indica.**



a) La figura se puede dividir en dos más simples. Así, cada triángulo genera un cono:

$A_{\text{Cono superior}} = \pi r \cdot (r + g) = 2\pi(2 + 4) = 12\pi = 37{,}70 \text{ cm}^2$

$A_{\text{Cono inferior}} = \pi r \cdot (r + g) = \pi(1 + 3) = 4\pi = 12{,}57 \text{ cm}^2$

$A_{\text{Total}} = 37{,}7 + 12{,}57 = 50{,}27 \text{ cm}^2$

b) La figura se puede dividir en un triángulo y un rectángulo, que generan un cono y un cilindro, respectivamente:

$A_{\text{Cono}} = \pi r \cdot (r + g) = 1{,}5\pi(1{,}5 + 2) = 16{,}49 \text{ cm}^2$

$A_{\text{Cilindro}} = 2\pi r \cdot (r + h) = 3\pi(1{,}5 + 6) = 22{,}5\pi = 70{,}69 \text{ cm}^2$

$A_{\text{Total}} = A_{\text{Cono}} + A_{\text{Cilindro}} - 2 \cdot A_{\text{Círculo}} = 16{,}49 + 70{,}69 - 2 \cdot 1{,}5^2\pi = 73{,}04 \text{ cm}^2$

c) La figura está formada por dos triángulos, que generan dos conos:

$A_{\text{Cono superior}} = \pi r \cdot (r + g) = 3\pi(3 + 5) = 24\pi = 75{,}4 \text{ cm}^2$

$A_{\text{Cono inferior}} = \pi r \cdot (r + g) = 3\pi(3 + 7) = 30\pi = 94{,}25 \text{ cm}^2$

$A_{\text{Total}} = A_{\text{Cono superior}} + A_{\text{Cono inferior}} - 2 \cdot A_{\text{Círculo}} = 75{,}4 + 94{,}25 - 18\pi = 113{,}10 \text{ cm}^2$

69. **Calcula el volumen de un cubo de 12 cm de arista.**

$V_{\text{Cubo}} = l^3 = 12^3 = 1\,728 \text{ cm}^3$

70. **Determina el volumen de un ortoedro de dimensiones 7, 9 y 13 cm.**

$V_{\text{Ortoedro}} = 7 \cdot 9 \cdot 13 = 819 \text{ cm}^3$

71. **¿Cuál es el volumen de un prisma pentagonal de 20 cm de altura, 10 cm de arista básica y 6,88 cm de apotema básica?**

$V_{\text{Prisma}} = A_{\text{Base}} \cdot h = \dfrac{5 \cdot 10 \cdot 6{,}88}{2} \cdot 20 = 3\,440 \text{ cm}^3$

72. **Halla el volumen de un prisma cuadrangular regular de 15 cm de altura y 7 cm de arista básica.**

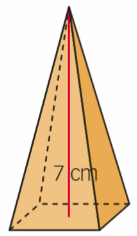
$V_{\text{Prisma}} = A_{\text{Base}} \cdot h = 7^2 \cdot 15 = 735 \text{ cm}^3$

73. **Calcula el volumen de un prisma pentagonal regular de 17 cm de altura, 9 cm de arista básica y 6,2 cm de apotema básica.**

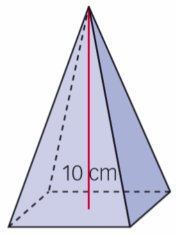
$V_{\text{Prisma}} = A_{\text{Base}} \cdot h = \dfrac{5 \cdot 9 \cdot 6{,}2}{2} \cdot 17 = 2\,371{,}5 \text{ cm}^3$

74. **Halla el volumen de estas pirámides.**

a)



b)



a) $V = \frac{A_{Base} \cdot h}{3} = \frac{3^2 \cdot 7}{3} = 21 \text{ cm}^3$

b) $V = \frac{A_{Base} \cdot h}{3} = \frac{6^2 \cdot 10}{3} = 120 \text{ cm}^3$

75. **Determina el volumen de una pirámide de altura 14 cm con un cuadrado de base de perímetro 36 cm.**

Con el perímetro se obtiene la longitud del lado del cuadrado, que es 36 : 4 = 9 cm. Entonces:

$V = \frac{A_{Base} \cdot h}{3} = \frac{9^2 \cdot 14}{3} = 378 \text{ cm}^3$

76. **Calcula el volumen de una pirámide pentagonal regular de arista básica 10,8 cm, apotema básica 7,43 cm y altura de la pirámide 8 cm.**

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{Base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 10{,}8 \cdot 7{,}43}{2} \cdot 8 = 534{,}96 \text{ cm}^3$

77. **Halla el volumen de una pirámide heptagonal regular de altura 17 cm, arista básica de 10 cm y apotema básica 10,38 cm.**

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{Base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{7 \cdot 10 \cdot 10{,}38}{2} \cdot 17 = 2\,058{,}7 \text{ cm}^3$

78. **¿Cuál es el volumen de un cubo de 600 cm² de área?**

Llamando l a la longitud del lado del cubo:

$A_{Cubo} = 6l^2 = 600 \text{ cm}^2 \rightarrow l^2 = 100 \rightarrow l = 10 \text{ cm}$

$V_{Cubo} = l^3 = 10^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$

79. **Calcula el volumen de los cilindros con las medidas siguientes.**

a) Altura 14 cm y radio de la base 5 cm.

b) Diámetro de la base 12 cm y altura 20 cm.

a) $V_{Cilindro} = A_{Base} \cdot h = \pi r^2 h = 25\pi \cdot 14 = 350\pi = 1\,099{,}56 \text{ cm}^3$

b) $V_{Cilindro} = A_{Base} \cdot h = \pi r^2 h = \pi \cdot \left(\frac{12}{2}\right)^2 \cdot 20 = 720\pi = 2\,261{,}95 \text{ cm}^3$

80. **Halla el volumen de los siguientes conos.**

a) Altura 18 cm y radio de la base 8 cm.

b) Longitud de la circunferencia de la base 44 cm y altura 9 cm.

a) $V_{\text{Cono}} = \frac{1}{3} A_{\text{Base}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 8^2 \cdot 18 = 384\pi = 1\,206{,}37 \text{ cm}^3$

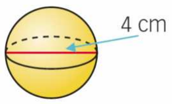
b) Se calcula la longitud del radio de la circunferencia: $L = 2\pi r = 44 \rightarrow r = 7$ cm

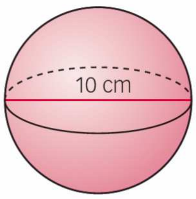
$V_{\text{Cono}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Base}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 7^2 \cdot 9 = 147\pi = 461{,}81 \text{ cm}^3$

81. **Obtén el volumen del cono que se obtiene al girar el triángulo rectángulo de catetos 6 cm y 13 cm alrededor del cateto mayor.**

$V_{\text{Cono}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Base}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 13 = 156\pi = 490{,}09 \text{ cm}^3$

82. **¿Cuál es el volumen de las esferas?**

a) 

b) 

a) $V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^3 = 33{,}51 \text{ cm}^3$

b) $V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{10}{2}\right)^3 = 523{,}60 \text{ cm}^3$

83. **Halla el volumen de estas esferas.**

a) De radio 6 cm.

b) De diámetro 20 cm.

a) $V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 6^3 = 904{,}78 \text{ cm}^3$

b) $V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{20}{2}\right)^3 = 4\,188{,}79 \text{ cm}^3$

84. **Calcula el volumen de las siguientes esferas.**

a) Esfera de radio 5,2 cm.

b) Esfera de diámetro 7,58 cm.

c) Esfera cuyo círculo máximo tiene un área de 78,54 cm².

a) $V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (5{,}2)^3 = 588{,}98 \text{ cm}^3$

b) $V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{7{,}58}{2}\right)^3 = 228{,}04 \text{ cm}^3$

c) $A_{\text{Círculo}} = \pi r^2 = 78{,}54 \rightarrow r = \sqrt{\frac{78{,}54}{\pi}} \rightarrow r = 5 \text{ cm}$

$V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = 523{,}60 \text{ cm}^3$

85. **Obtén el radio de una esfera de 73,62 cm³ de volumen.**

$$V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = 73{,}62 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 73{,}62}{4\pi}} \rightarrow r = 2{,}6 \text{ cm}$$

86. **Determina el volumen de un cilindro de 15 cm de altura y 433,54 cm² de área lateral.**

$$A_{\text{Lateral}} = 2\pi rh = 2\pi r\cdot 15 = 433{,}54 \rightarrow r = \frac{433{,}54}{30\pi} \rightarrow r = 4{,}6 \text{ cm}$$

$$V_{\text{Cilindro}} = \pi r^2 h = \pi\cdot 4{,}6^2\cdot 15 = 997{,}13 \text{ cm}^3$$

87. **Calcula el volumen de un cono de 37,7 cm de longitud de la circunferencia de la base y altura igual a dos tercios del radio de la base.**

$$L_{\text{Circunferencia}} = 2\pi r = 37{,}7 \rightarrow r = \frac{37{,}7}{2\pi} \rightarrow r = 6 \text{ cm}$$

$$h = \frac{2}{3}r = \frac{2}{3}\cdot 6 = 4 \text{ cm}$$

$$V_{\text{Cono}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\cdot 6^2\cdot 4 = 150{,}80 \text{ cm}^3$$

88. **El cartón de un rollo de papel higiénico tiene un diámetro de 4,6 cm y una altura de 9,7 cm. Calcula las dimensiones de su desarrollo plano.**

El desarrollo plano es el de un cilindro sin bases, es decir, es un rectángulo.

Sus dimensiones son:

Largo: $2\pi\cdot\frac{4{,}6}{2} = 14{,}45$ cm Ancho: 9,7 cm

89. **El rodillo de amasar de Laura tiene un radio de 1,8 cm y 24 cm de largo.**

a) ¿Qué área cubre en cada vuelta?

b) ¿Cuántas vueltas tiene que dar el rodillo para amasar una pieza circular de radio 9,5 cm?

c) ¿Cuántas vueltas ha dado Laura al rodillo si la superficie cubierta ha sido 5428,6 cm²?

a) En cada vuelta cubre un área igual al área lateral del cilindro, es decir:

$$A_{\text{Lateral}} = 2\pi rh = 2\pi\cdot 1{,}8\cdot 24 = 271{,}43 \text{ cm}^2$$

b) $A_{\text{Masa}} = \pi r^2 = 9{,}5^2\pi = 283{,}53 \text{ cm}^2$

Dividiendo, se obtiene el número de vueltas que ha dado el rodillo:

$\frac{283{,}53}{271{,}43} = 1{,}045 \rightarrow$ Tiene que dar 2 vueltas.

c) $\frac{5428{,}6}{271{,}43} = 20$ vueltas

90. **En cierta fábrica de conservas alimenticias utilizan latas con forma cilíndrica. Su proveedor le ofrece estas posibilidades, siendo 0,02 €/cm² el precio del material con que se elaboran las latas.**

Tipo de lata	Radio de la base	Altura
A	12	3
B	10	5
C	6	12

Razona cuál es el tipo de lata que debe emplear la fábrica si quiere envasar la máxima cantidad posible al menor precio.

Tipo de lata	Área $= 2\pi r(r+h)$ (en cm²)	Volumen $= \pi r^2 h$ (en cm³)	Precio = 0,02 · Área (en €)
A	$2\pi \cdot 12 \cdot (12+3) = 1\,130{,}97$	$\pi \cdot 12^2 \cdot 3 = 1\,357{,}17$	$0{,}02 \cdot 1\,130{,}97 = 22{,}62$
B	$2\pi \cdot 10 \cdot (10+5) = 942{,}48$	$\pi \cdot 10^2 \cdot 5 = 1\,570{,}8$	$0{,}02 \cdot 942{,}48 = 18{,}85$
C	$2\pi \cdot 6 \cdot (6+12) = 678{,}58$	$\pi \cdot 6^2 \cdot 12 = 1357{,}17$	$0{,}02 \cdot 678{,}58 = 13{,}57$

Dividiendo el volumen de la lata entre su precio y comparando:

$\frac{22{,}62}{1357{,}17} = 0{,}0166$ €/m³ $\qquad \frac{18{,}85}{1570{,}8} = 0{,}012$ €/m³ $\qquad \frac{13{,}57}{1357{,}17} = 0{,}0099$ €/m³

En la fábrica deben emplear las latas del tipo *C*, porque son las que tienen mejor relación cantidad-precio.

91. **Calcula el volumen total de una torre cúbica de 10 m de arista que tiene un tejado en forma piramidal de altura 12 m.**

$$V_{\text{Pirámide}} = \frac{10^2 \cdot 12}{3} = 400 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{Cubo}} = 10^3 = 1\,000 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{Total}} = 400 + 1\,000 = 1\,400 \text{ m}^3$$

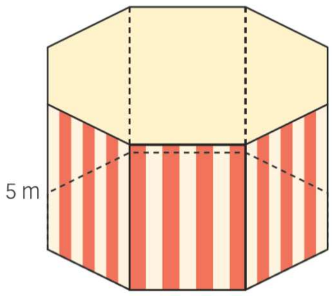
SABER HACER

Elaborar facturas

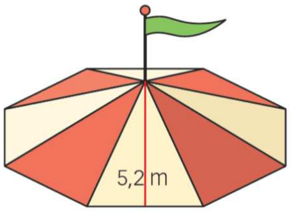
Raimundo tiene una tienda en la que se confeccionan toldos y toda clase de artículos que se elaboran con lona.

En los últimos días ha recibido un encargo que nunca antes había realizado. Se trata de confeccionar una carpa para un circo. Este es el diseño que le han dado.

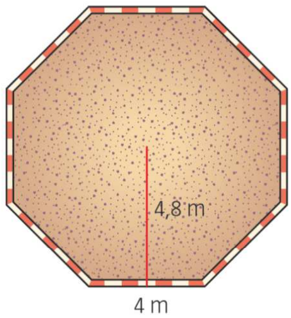
Paredes laterales



Techo



Suelo



LM Lonas Mundo, S.L.
X-23456789
Avd. de los Plásticos 3
Polígono Ind. Las Cosas
38083 - Aljameicide

Factura n.º	Fecha

Cliente	
NIF	
Dirección	

Cantidad	Descripción	Precio unidad	Precio total
m²	Lona	12 €/m²	
m²	Confección	11 €/m²	
		Base imponible	
		21 % IVA	
		TOTAL FACTURA	

a) ¿Qué forma tienen las paredes laterales de la carpa? ¿Cuáles son sus medidas?

b) ¿Qué forma tiene el techo? ¿Qué figuras son sus caras laterales? ¿Cuáles son sus medidas?

c) Sabiendo que el precio de la lona que se va a utilizar es de 12 €/m² y que la mano de obra para su confección cuesta 11 €/m², elabora una factura como esta en la que figure el coste total.

a) Cada pared lateral es un rectángulo de 4 m de ancho por 5 m de alto.

b) El techo es una pirámide de base octogonal, donde la arista básica mide 4 m.

Sus caras laterales tienen forma de triángulo isósceles, cuyo lado desigual mide 4 m y su apotema (altura del triángulo) tiene una longitud de 5,2 m.

c) Para realizar la factura, hay que calcular el área total de lona que se va a necesitar:

$A_{\text{Lateral}} = 8 \cdot A_{\text{Rectángulo}} = 8 \cdot 4 \cdot 5 = 160\ \text{m}^2$

$A_{\text{Techo}} = A_{\text{Lateral pirámide}} = 8 \cdot A_{\text{Triángulo}} = 8 \cdot \dfrac{4 \cdot 5{,}2}{2} = 83{,}2\ \text{m}^2$

$A_{\text{Total}} = 160 + 83{,}2 = 243{,}2\ \text{m}^2$

Precio total por el material: 243,2 · 12 = 2 918,40 €

Precio total por la mano de obra: 243,2 · 11 = 2 675,20 €

Base imponible: 2 918,4 + 2 675,2 = 5 593,60 €

IVA: 21 % de 5 593,6 = 1 174,66 €

Total factura: 5 593,6 + 1 174,66 = 6 768,26 €

LM

Lonas Mundo, S.L.
X-23456789
Avd. de los Plásticos 3
Polígono Ind. Las Cosas
38083 - Aljameicide

Factura n.º	Fecha
12354	30/03/2015

Cliente	Fulgencio Rodríguez
NIF	4584323-D
Dirección	Calle del Olmo, 2. 7364 - Catacena

Cantidad		Descripción	Precio unidad	Precio total
243,2	m^2	Lona	12 €/m^2	2 918,40 €
243,2	m^2	Confección	11 €/m^2	2 675,20 €

Base imponible	5 593,60 €
21 % IVA	1 174,66 €
TOTAL FACTURA	6 768,26 €