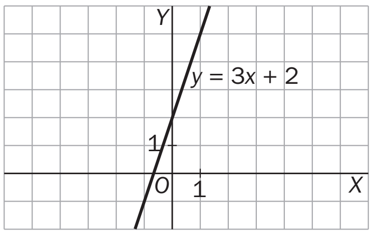
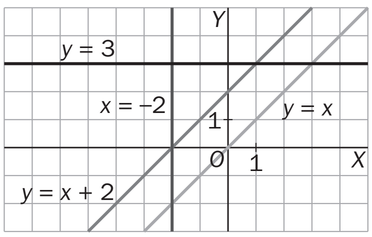
PARA EMPEZAR

1 **Elabora una tabla de valores y representa gráficamente la recta $y = 3x + 2$.**

x	y
-1	-1
0	2
1	5
2	8



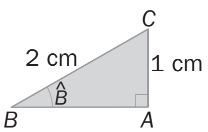
2 **Dibuja las siguientes rectas: $y = x$, $y = x + 2$, $y = 3$, $x = -2$.**
a) ¿Cuál es la posición relativa de las dos primeras?
b) ¿Cuál es el punto de intersección de las rectas $y = x + 2$ e $y = 3$?



a) Las dos primeras rectas, $y = x$, $y = x + 2$, son paralelas.

b) Se resuelve el sistema de ecuaciones: $x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1$, $y = 3$.

3 **En el triángulo de la figura:**



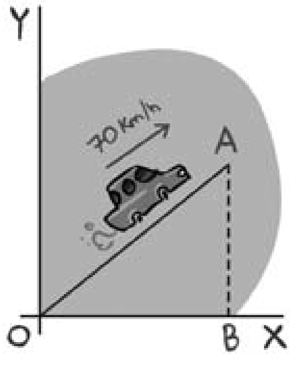
a) ¿Cuánto mide el cateto BA?
b) Calcula la tangente del ángulo $\widehat{B}$.
c) ¿Cuánto mide el ángulo $\widehat{B}$?

a) Por el teorema de Pitágoras: $2^2 = 1^2 + BA^2 \Rightarrow BA^2 = 3 \Rightarrow BA = \sqrt{3}$ ud.

b) $\text{tg}\ \widehat{B} = \dfrac{AC}{BA} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\widehat{B} = 30°$

4 **Situamos un sistema de ejes de coordenadas en la carretera por la que circula el automóvil de la ilustración, tal como muestra la figura.**
a) Halla la distancia OA recorrida en una hora y media.
b) Si OB mide 72 kilómetros, halla la distancia AB y las coordenadas del punto A.



a) Si va a 70 km/h, en 1 hora y media habrá recorrido 105 km, luego $OA = 105$ km.

b) Por el teorema de Pitágoras: $OA^2 = OB^2 + AB^2$

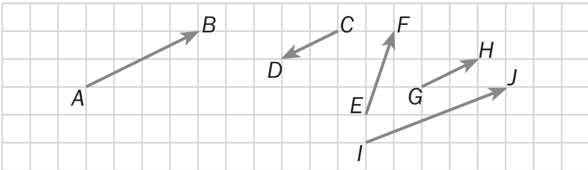
$105^2 = 72^2 + AB^2 \Rightarrow AB^2 = 11\,025 - 5184 = 5841 \Rightarrow AB = 76{,}4$ km

Las coordenadas del punto A son: $A\,(72; 76{,}4)$.

Vectores en el plano

PARA PRACTICAR

9.1 ¿Cuáles de los siguientes vectores tienen el mismo módulo? ¿Cuáles tienen la misma dirección?



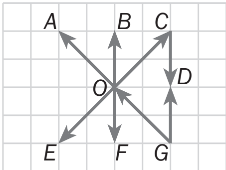
Los vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{IJ}$ tienen el mismo módulo.

Los vectores $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{GH}$ tienen el mismo módulo.

Los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{GH}$ e $\overrightarrow{IJ}$ tienen la misma dirección.

El módulo y la dirección del vector $\overrightarrow{EF}$ son distintos del módulo y la dirección de los demás vectores.

9.2 ¿Qué vectores de la figura son representantes del mismo vector libre?



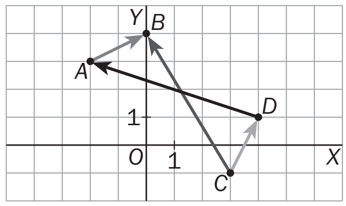
Los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{GO}$ tienen el mismo módulo, dirección y sentido, luego representan un mismo vector libre.

Los vectores $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{GD}$ tienen el mismo módulo, dirección y sentido, luego también representan un mismo vector libre.

Los vectores $\overrightarrow{OF}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen el mismo módulo, dirección y sentido, luego asimismo representan un mismo vector libre.

9.3 Dados los puntos $A(-2, 3)$, $B(0, 4)$, $C(3, -1)$ y $D(4, 1)$, dibuja y halla las coordenadas de los siguientes vectores.

$\overrightarrow{AB}$ $\quad$ $\overrightarrow{CB}$ $\quad$ $\overrightarrow{CD}$ $\quad$ $\overrightarrow{DA}$



$\overrightarrow{AB} = (0 + 2, 4 - 3) = (2, 1)$

$\overrightarrow{CB} = (0 - 3, 4 + 1) = (-3, 5)$

$\overrightarrow{CD} = (4 - 3, 1 + 1) = (1, 2)$

$\overrightarrow{DA} = (-2 - 4, 3 - 1) = (-6, 2)$

9.4 Las coordenadas de un vector son $(3, -5)$, y las de su extremo, $(-2, 0)$. Halla las coordenadas del origen del vector.

Si las coordenadas de A son: $A(a, a')$, como $\overrightarrow{AB} = (3, -5)$ y $B(-2, 0)$, entonces:

$$(3, -5) = (-2, 0) - (a, a') = (-2 - a, -a') \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3 = -2 - a \\ -5 = -a' \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a = -5 \\ a' = 5 \end{array}\right\}$$

Las coordenadas del origen del vector son: $A(-5, 5)$.

9.5 El vector de posición de un punto es aquel que tiene por origen el origen de coordenadas, y por extremo, el punto.

Si las coordenadas del punto A son (a_1, a_2), ¿cuáles son las coordenadas de su vector de posición $\overrightarrow{OA}$?

$\overrightarrow{OA} = (a_1 - 0, a_2 - 0) = (a_1, a_2)$

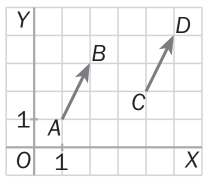
Las coordenadas del vector de posición de A, $\overrightarrow{OA}$, son las mismas que las de A.

Ejercicio resuelto

9.6 Dados los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$:

a) ¿Son equipolentes?

b) ¿Existe alguna relación entre las coordenadas de ambos?



a) Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes porque tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

b) $\overrightarrow{AB} = (2 - 1, 3 - 1) = (1, 2)$ $\qquad$ $\overrightarrow{CD} = (5 - 4, 4 - 2) = (1, 2)$

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen las mismas coordenadas, y lo mismo ocurrirá con todos los vectores equipolentes a ellos.

9.7 Dados los puntos $A(3, m)$ y $B(m, n)$, halla los valores de m y n sabiendo que el vector $\overrightarrow{AB}$ es un representante del vector libre $\vec{v} = (-1, 4)$.

$\overrightarrow{AB} = (m, n) - (3, m) = (m - 3, n - m)$.

$\overrightarrow{AB}$ y v deben tener las mismas coordenadas, luego: $\left.\begin{array}{r} m - 3 = -1 \\ n - m = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} m = 2 \\ n - 2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} m = 2 \\ n = 6 \end{array}\right\}$

9.8 Dados los puntos $A(1, 2)$ y $B(4, 3)$, halla el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(4-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$ ud. $\qquad |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$ ud.

$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(1-4)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10}$ ud. $\qquad |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = 5$ ud.

9.9 Si $A(2, k)$, $B(3, -1)$, halla los valores que debe tomar k para que la distancia de A a B sea $\sqrt{2}$.

$d(A, B) = \sqrt{(3-2)^2 + (-1-k)^2} = \sqrt{1 + 1 + 2k + k^2} = \sqrt{k^2 + 2k + 2}$

Como $d(A, B) = \sqrt{2} \Rightarrow k^2 + 2k + 2 = 2 \Rightarrow k(k+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = -2 \end{cases}$

PARA APLICAR

9.10 Para pasar de O a P se sigue el camino señalado en el dibujo.

a) Halla las coordenadas de los vectores que aparecen en el dibujo.

b) ¿Cuáles de dichos vectores son equipolentes?

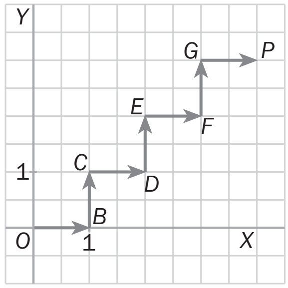
a) $\overrightarrow{OB} = (1, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (1, 1) - (1, 0) = (0, 1)$, $\overrightarrow{CD} = (2, 1) - (1, 1) = (1, 0)$,

$\overrightarrow{DE} = (2, 2) - (2, 1) = (0, 1)$, $\overrightarrow{EF} = (3, 2) - (2, 2) = (1, 0)$,

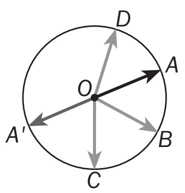
$\overrightarrow{FG} = (3, 3) - (3, 2) = (0, 1)$, $\overrightarrow{GP} = (4, 3) - (3, 3) = (1, 0)$

b) Son equipolentes los vectores $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{GP}$.

También son equipolentes los vectores $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DE}$ y $\overrightarrow{FG}$.



9.11 Considera un vector $\overrightarrow{OA}$ cuyo origen es el centro de una circunferencia, y su extremo, un punto de la misma. ¿Existe algún vector con origen O y extremo otro punto de la circunferencia que tenga el mismo módulo? ¿Y que tenga la misma dirección?

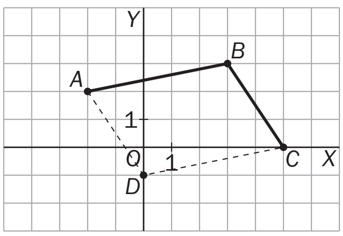


Todos los vectores con origen O y extremo un punto de la circunferencia: $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OD}$, ... tienen el mismo módulo, pues es el radio de la circunferencia.

Hay un solo vector que tenga su misma dirección (aunque distinto sentido), que es el vector $\overrightarrow{OA'}$, obtenido prolongando el segmento $\overrightarrow{OA}$; esto es, A y A' son los extremos del diámetro $A'A$.

9.12 Las coordenadas de los vértices de un cuadrilátero son $A(-2, 2)$, $B(3, 3)$, $C(5, 0)$ y $D(m, n)$.

Halla qué valores deben tomar m y n para que el cuadrilátero sea un paralelogramo.



En un paralelogramo, los lados opuestos deben ser iguales y paralelos, luego los vectores correspondientes a ellos deben ser equipolentes y, por tanto, tener las mismas coordenadas:

$\overrightarrow{AB} = (3, 3) - (2, 2) = (5, 1)$; $\overrightarrow{DC} = (5, 0) - (m, n) = (5 - m, -n)$

luego: $\left.\begin{array}{r} 5 = 5 - m \\ 1 = -n \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} m = 0 \\ n = -1 \end{array}\right\}$

Las coordenadas de D son: $D(0, -1)$.

Problema resuelto

9.13 Averigua de qué tipo es el triángulo que tiene por vértices los puntos $A(2, 4)$, $B(4, 3)$ y $C(1, 2)$.

Se hallan las longitudes de los lados:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(4-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{5}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(1-4)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10}$

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(2-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5}$

Como $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CA}|$, el triángulo es isósceles. Se comprueba si se cumple el teorema de Pitágoras: $\left(\sqrt{10}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2$

El triángulo también es rectángulo.

9.14 En un triángulo *ABC* las coordenadas de sus vértices son: *A*(2, 10), *B*(3, 2), *C*(6, 4). Averigua de qué tipo de triángulo se trata y halla su área.

Se hallan las longitudes de los lados:

$AB = \sqrt{(3 - 2)^2 + (2 - 10)^2} = \sqrt{65}$ ud.

$BC = \sqrt{(6 - 3)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{13}$ ud.

$CA = \sqrt{(2 - 6)^2 + (10 - 4)^2} = \sqrt{52}$ ud.

Como $CA^2 + BC^2 = AB^2$, el triángulo es rectángulo: *AB* es la hipotenusa, y *CA* y *BC* son los catetos. Por ser un triángulo rectángulo, se pueden tomar los catetos como base y altura.

$\text{Área} = \dfrac{CA \cdot BC}{2} = \dfrac{\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}}{2} = 13 \text{ ud}^2$.

9.15 ¿Qué puntos de abscisa −3 distan 5 unidades del punto *A*(1, 2)?

Si el punto es $P(-3, x)$, entonces:

$d(P, A) = \sqrt{(1 + 3)^2 + (2 - x)^2} = \sqrt{16 + 4 - 4x + x^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 20}$

Como $\sqrt{x^2 - 4x + 20} = 5 \Rightarrow x^2 - 4x + 20 = 25 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$

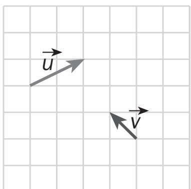
$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \dfrac{4 \pm 6}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases}$ Hay dos puntos que lo verifican: $P(-3, 5)$ y $Q(-3, 1)$.

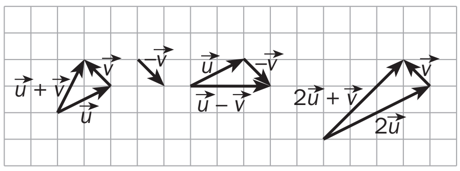
Operaciones con vectores

PARA PRACTICAR

9.16 Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dibuja los siguientes:

$\vec{u} + \vec{v}$ **$-\vec{v}$** **$\vec{u} - \vec{v}$** **$2\vec{u} + \vec{v}$**





9.17 Dados los vectores $\vec{u} = (-1, 2)$, $\vec{v} = (3, 1)$, $\vec{w} = (-2, -3)$, halla las coordenadas de los siguientes vectores.

a) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ **b) $\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w}$** **c) $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$** **d) $2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w}$**

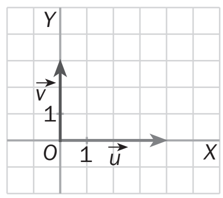
a) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (-1, 2) + (3, 1) + (-2, -3) = (-1 + 3 - 2, 2 + 1 - 3) = (0, 0)$

b) $\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} = (-1, 2) + 2 \cdot (3, 1) + (-2, -3) = (-1 + 2 \cdot 3 - 2, 2 + 2 \cdot 1 - 3) = (3, 1)$

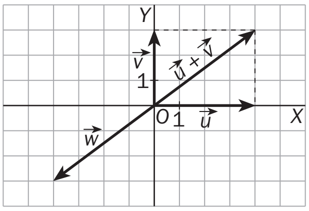
c) $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = (-1, 2) - (3, 1) + (-2, -3) = (-1 - 3 - 2, 2 - 1 - 3) = (-6, -2)$

d) $2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w} = 2 \cdot (-1, 2) + 3 \cdot (3, 1) - (-2, -3) = (-2 + 9 + 2, 4 + 3 + 3) = (9, 10)$

9.18 Dibuja y halla las coordenadas del vector $\vec{w}$ que verifique que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0$.



Geométricamente, $\vec{w}$ será el opuesto de $\vec{u} + \vec{v}$:



Si $\vec{w} = (w, w')$, como $\vec{u} = (4, 0)$, $\vec{v} = (0, 3)$

$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (4 + 0 + w, 0 + 3 + w') = (4 + w, 3 + w')$

$0 = (0, 0)$. Luego: $\left.\begin{array}{r} 4 + w = 0 \\ 3 + w' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow w = -4,\ w' = -3$

El vector $\vec{w}$ es: $\vec{w} = (-4, -3)$

9.19 Si $\vec{u} = (1, -1)$, $\vec{v} = (-1, 2)$, halla las coordenadas del vector $\vec{w}$ que verifique la siguiente relación: $\vec{u} - 2\vec{w} = \vec{v}$.

Si $\vec{w} = (w, w')$, entonces:

$\left.\begin{array}{l} u - 2w = (1, -1) - 2 \cdot (w, w') = (1 - 2w, -1 - 2w') \\ v = (-1, 2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 1 - 2w = -1 \\ -1 - 2w' = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow w = 1,\ w' = -\dfrac{3}{2}$

Las coordenadas del vector $\vec{w}$ son: $\vec{w} = \left(1, -\dfrac{3}{2}\right)$.

9.20 Averigua cuáles de los siguientes vectores tienen la misma dirección.

$\vec{u} = (4, -2)$ $\qquad\qquad$ $\vec{v} = (4, 2)$ $\qquad\qquad$ $\vec{w} = (-2, 1)$

Para que tengan la misma dirección deben ser proporcionales:

$\frac{4}{-2} \neq \frac{4}{2}$, luego $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no tienen la misma dirección.

$\frac{4}{2} \neq \frac{-2}{1}$, luego $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no tienen la misma dirección.

$\frac{4}{-2} = \frac{-2}{1}$, luego $\vec{u}$ y $\vec{w}$ tienen la misma dirección.

Ejercicio resuelto

9.21 Descompón el vector $\vec{u} = (9, 8)$ en dos sumandos, uno con la dirección de $\vec{v} = (3, 1)$ y otro con la de $\vec{w} = (1, 2)$.

Los vectores proporcionales tienen la misma dirección; por tanto, los sumandos buscados son vectores proporcionales a $\vec{v}$ y $\vec{w}$: $a\vec{v}$ y $b\vec{w}$.

$u = a\vec{u} + b\vec{w}$

Se expresa esta relación en coordenadas y operamos:

$(9, 8) = a(3, 1) + b(1, 2) = (3a + b, a + 2b)$

$$\left.\begin{array}{r} 3a + b = 9 \\ a + 2b = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} b = 9 - 3a \\ a + 2(9 - 3a) = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 2,\ b = 3$$

Por tanto, la descomposición es: $\vec{u} = 2\vec{v} + 3\vec{w}$.

9.22 Dados los vectores $\vec{u} = (3, 5)$, $\vec{v} = (1, k)$, halla el valor de k para que:

a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tengan la misma dirección.

b) $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ tengan la misma dirección.

a) Las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ deben ser proporcionales: $\frac{3}{5} = \frac{1}{k} \Rightarrow k = \frac{5}{3}$.

b) Las coordenadas de $\vec{u} + \vec{v} = (4, 5 + k)$ y $\vec{u} - \vec{v} = (2, 5 - k)$ deben ser proporcionales:

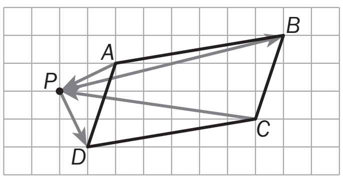
$$\frac{4}{2} = \frac{5 + k}{5 - k} \Rightarrow 2 = \frac{5 + k}{5 - k} \Rightarrow 5 + k = 10 - 2k \Rightarrow 3k = 5 \Rightarrow k = \frac{5}{3}.$$

PARA APLICAR

9.23 Sea *ABCD* un paralelogramo y *P* un punto exterior a él.

a) Halla $\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{BP}$ y $\overrightarrow{CP} - \overrightarrow{DP}$.

b) ¿Cómo son entre sí los vectores resultantes?



a) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AB}$, y como $\overrightarrow{PB} = -\overrightarrow{BP} \Rightarrow \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{DC}$, y como $\overrightarrow{PD} = -\overrightarrow{DP} \Rightarrow \overrightarrow{CP} - \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DC}$

b) Como *ABCD* es un paralelogramo, los vectores resultantes de las restas anteriores, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$, son equipolentes.

Problema resuelto

9.24 Calcula las coordenadas del punto medio *M* del segmento *AB* si $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$.

Debe cumplirse: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Si $M(x, y)$: $\overrightarrow{AM} = (x - a_1, y - a_2)$, $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

Por tanto: $(x - a_1, y - a_2) = \left(\frac{b_1 - a_1}{2}, \frac{b_2 - a_2}{2}\right) \Rightarrow x = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2}$, $y = a_2 + \frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{a_2 + b_2}{2}$

Las coordenadas del punto medio son: $M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$

9.25 Los vértices de un cuadrilátero son los puntos:

$A(-5, -3)$ $\quad$ $B(-3, 3)$ $\quad$ $C(3, 5)$ $\quad$ $D(3, -1)$

a) Halla las coordenadas de los puntos medios de cada lado.

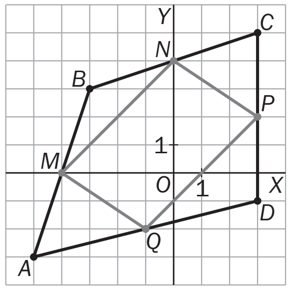
b) Une los puntos medios de los lados consecutivos y prueba que la figura resultante es un paralelogramo.

a) AB: $M\left(\dfrac{-5-3}{2}, \dfrac{-3+3}{2}\right) \Rightarrow M(-4, 0)$

BC: $N\left(\dfrac{-3+3}{2}, \dfrac{3+5}{2}\right) \Rightarrow N(0, 4)$

CD: $P\left(\dfrac{3+3}{2}, \dfrac{5-1}{2}\right) \Rightarrow P(3, 2)$

DA: $Q\left(\dfrac{3-5}{2}, \dfrac{-1-3}{2}\right) \Rightarrow Q(-1, -2)$



b) $\overrightarrow{MN} = (0, 4) - (-4, 0) = (4, 4)$, $\overrightarrow{QP} = (3, 2) - (-1, -2) = (4, 4)$,

luego los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{QP}$ son equipolentes; esto es, los lados MN y QP son iguales y paralelos.

También, $\overrightarrow{MQ} = (3, -2)$ y $\overrightarrow{NP} = (3, 2)$, luego $\overrightarrow{MQ}$ y $\overrightarrow{NP}$ son equipolentes, y los lados MQ y NP son iguales y paralelos.

En consecuencia, el cuadrilátero $MNPQ$ es un paralelogramo.

9.26 Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos $A(1, 2)$ y $B(7, -6)$. Halla las coordenadas del centro de la circunferencia y la longitud del radio.

El centro, C, es el punto medio de diámetro AB: $C\left(\dfrac{1+7}{2} \cdot \dfrac{2-6}{2}\right) \Rightarrow C(4, -2)$.

El radio, r, es la distancia del centro a un extremo del diámetro:

$r = d(C, A) = \sqrt{(1-4)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$ ud.

9.27 En un triángulo ABC, las coordenadas de los vértices son:

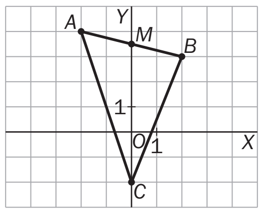
$A(-2, 4)$ $\quad$ $B(2, 3)$ $\quad$ $C(0, -2)$

Halla la longitud de la mediana correspondiente al vértice C.

La mediana correspondiente a C pasa por C y por M, punto medio de AB:

$M\left(\dfrac{-2+2}{0}, \dfrac{4+3}{2}\right) \Rightarrow M\left(0, \dfrac{7}{2}\right) \qquad d(C, M) = \sqrt{(0-0)^2 + \left(\dfrac{7}{2} + 2\right)^2} = \dfrac{11}{2}$

La longitud de la mediana es $\dfrac{11}{2}$ ud.



9.28 En el triángulo ABC, sea $M(2, 3)$ el punto medio del lado AB y $N(-1, 1)$ el punto medio del lado BC. Si las coordenadas del vértice A son (3, 1), halla las coordenadas de los otros dos.

Sean $B(b_1, b_2)$ y $C(c_1, c_2)$.

Por ser M el punto medio del lado AB:

$$\left.\begin{array}{l} 2 = \dfrac{3+b_1}{2} \\ 3 = \dfrac{1+b_2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 = 3 + b_1 \\ 6 = 1 + b_2 \end{array}\right\} \Rightarrow b_1 = 1,\ b_2 = 5$$

Las coordenadas de B son: $B(1, 5)$.

Por ser N el punto medio del lado BC:

$$\left.\begin{array}{l} -1 = \dfrac{1+c_1}{2} \\ 1 = \dfrac{5+c_2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2 = 1 + c_1 \\ 2 = 5 + c_2 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = -3,\ c_2 = -3$$

Las coordenadas de C son: $C(-3, -3)$.

Ecuaciones de la recta: vectorial, paramétricas y continua

PARA PRACTICAR

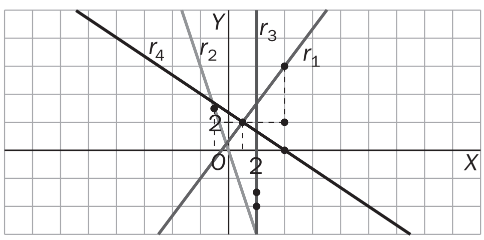
9.29 Dibuja las rectas dadas por las siguientes ecuaciones.

r_1: $(x, y) = (1, 2) + t(3, 4)$

r_2: $(x, y) = t(-1, 3)$

r_3: $(x, y) = (2, -3) + t(0, -1)$

r_4: $(x, y) = (4 - 3t, 2t)$



9.30 Indica el vector director y tres puntos de cada una de las siguientes rectas.

$r: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$

Recta r:

Vector director: $\vec{u} = (1, 0)$

Tres puntos: $P_1(0, 0)$, $P_2(1, 0)$, $P_3(2, 0)$

Recta s:

Vector director: $\vec{v} = (0, 1)$

Tres puntos: $Q_1(0, 1)$, $Q_2(0, 2)$, $Q_3(0, 3)$

9.31 Halla las ecuaciones paramétricas de la recta: $\frac{x+3}{-2} = \frac{y-1}{4}$.

Se iguala a t: $\frac{x+3}{-2} = \frac{y-1}{4} = t$ y se despejan x e y: $\left.\begin{matrix} x = -3 - 2t \\ y = 1 + 4t \end{matrix}\right\}$ ecuaciones paramétricas.

9.32 Dada la recta de ecuación: $x = (2, -1) + t(-7, 4)$
Halla dos puntos que pertenezcan a la misma, uno cuya abscisa sea -5 y otro cuya ordenada sea -1.

Se escribe la recta en forma paramétrica: $\left.\begin{matrix} x = 2 - 7t \\ y = -1 + 4t \end{matrix}\right\}$ y luego en continua, eliminando t: $\frac{x-2}{-7} = \frac{y+1}{4}$.

Si la abscisa es $x = -5 \Rightarrow \frac{-5-2}{-7} = \frac{y+1}{4} \Rightarrow 1 = \frac{y+1}{4} \Rightarrow 5 = y + 1 \Rightarrow y = 4$. El punto es el $A(-5, 4)$.

Si la ordenada es $y = -1$: $\frac{x-2}{-7} = \frac{-1+1}{4} = 0 \Rightarrow \frac{x-2}{-7} = 0 \Rightarrow x = 2$. El punto es el $B(2, -1)$.

9.33 Estudia si el punto $A(-8, 5)$ pertenece a las rectas dadas por las siguientes ecuaciones.

a) $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 3 - t \end{cases}$ **b)** $\frac{x-4}{4} = \frac{y+4}{3}$

a) $\left.\begin{matrix} -8 = 2 + 5t \\ 5 = 3 - t \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -10 = 5t \\ 2 = -t \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t = -2 \\ t = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ El punto pertenece a la recta.

b) $\frac{-8-4}{4} = -3$, $\frac{-5+4}{3} = -\frac{1}{3}$ Como , $\frac{-8-4}{4} \neq \frac{-5+4}{3}$, el punto no pertenece a la recta.

Ejercicio resuelto

9.34 Estudia si las siguientes rectas son secantes, paralelas, o si se trata en realidad de la misma recta.

$r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + t \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 - t \end{cases}$

Se obtienen los vectores directores, que son:

$r: \vec{u} = (-1, 1)$ $s: \vec{v} = (1, -1)$

Como son proporcionales, ya que $\vec{v} = -\vec{u}$, ambas rectas tienen la misma dirección; por tanto, o bien son rectas paralelas o bien se trata de la misma recta.

Si se trata de la misma recta, cualquier punto de ella cumplirá ambas ecuaciones.

Veamos, por ejemplo, si el punto $A(4, 1)$ de la recta s pertenece a la recta r:

$\left.\begin{matrix} 4 = 2 - t \\ 1 = 3 + t \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t = -2 \\ t = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A$ pertenece a r.

Por tanto, estas ecuaciones determinan la misma recta.

9.35 Estudia la posición relativa de las siguientes rectas.

r_1: $(x, y) = (1, 2) + t(2, 3)$ **r_2: $(x, y) = (7, 11) + t(-4, -6)$** **$r_3$: $(x, y) = (1, 2) + t(-2,3)$**

Un vector director de la primera recta es $\vec{u}_1 = (2, 3)$, un vector director de la segunda es $\vec{u}_2 = (-4, -6)$, y uno de la tercera es $\vec{u}_3 = (-2, 3)$. Como $\vec{u}_3$ no es proporcional ni igual a $\vec{u}_1$ ni a $\vec{u}_2$, r_3 corta a r_1 y a r_2.

Como $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son proporcionales, r_1 y r_2 son paralelas o coincidentes.

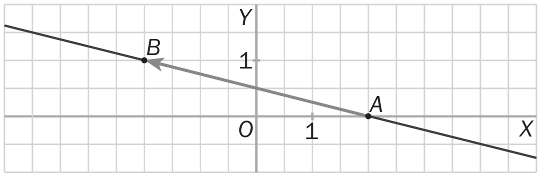
Para que las rectas r_1 y r_2 fueran coincidentes bastaría con que tuvieran un punto común. Veamos, por ejemplo, si el punto $A(7, 11)$ de r_2 es o no un punto de r_1:

$(7, 11) = (1, 2) + t(2, 3) \Rightarrow \left.\begin{matrix} 7 = 1 + 2t \Rightarrow t = 3 \\ 11 = 2 + 3t \Rightarrow t = 3 \end{matrix}\right\}$ Por tanto, A pertenece también a r_1.

En consecuencia, las dos primeras rectas son coincidentes y la tercera corta a r_1 y r_2.

Problema resuelto

9.36 Halla la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos $A(2, 0)$ y $B(-2, 1)$.
¿Cuál es la ecuación de una recta que pasa por dos puntos cualesquiera $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$?



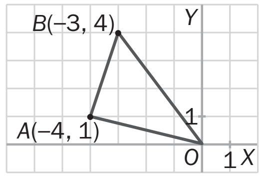
Es la recta que pasa por $A(2, 0)$ y tiene como vector director $\overrightarrow{AB} = (-2 - 2, 1 - 0) = (-4, 1)$. Por tanto, la ecuación continua es:

$$\frac{x - 2}{-4} = \frac{y}{1}$$

En el caso de una recta que pasa por $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$, el vector es $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$, y la ecuación es:

$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2}$$

9.37 Halla las ecuaciones paramétricas y continua de la mediana correspondiente al lado *AB* del triángulo de la figura.



Hay que calcular la recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto medio del segmento *AB*, que es: $M\left(\frac{-4 - 3}{2}, \frac{1 + 4}{2}\right) \Rightarrow M\left(-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

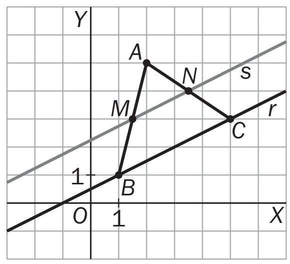
El vector director de la mediana es: $\overrightarrow{OM} = \left(-\frac{7}{2} - 0, \frac{5}{2} - 0\right) = \left(-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = -\frac{7}{2}\,t \\ y = -\frac{5}{2}\,t \end{cases}$ y la ecuación continua es: $\dfrac{x}{\frac{-7}{2}} = \dfrac{y}{\frac{5}{2}}$

9.38 Los vértices de un triángulo son los puntos:
$A(2, 5)$ $B(1, 1)$ $C(5, 3)$
a) Halla la ecuación continua del lado *BC*.
b) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos medios de *AB* y *AC*.
c) ¿Cómo son entre sí las rectas anteriores?

a) La recta *BC* pasa por *B* y su vector director es $\overrightarrow{BC} = (5 - 1, 3 - 1) = (4, 2)$. Ecuación continua: $\frac{x - 1}{4} = \frac{y - 1}{2}$

b) Punto medio de *AB*: $M\left(\frac{2 + 1}{2}, \frac{5 + 1}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}, 3\right)$



Punto medio de *AC*: $N\left(\frac{2 + 5}{2}, \frac{5 + 3}{2}\right) \Rightarrow N\left(\frac{7}{2}, 4\right)$

La recta pedida es la que pasa por *M* y *N*: $\dfrac{x - \frac{3}{2}}{\frac{7}{2} - \frac{3}{2}} = \dfrac{y - 3}{4 - 3} \Rightarrow \dfrac{x - \frac{3}{2}}{2} = \dfrac{y - 3}{1}$

c) Como los vectores directores de las rectas: $\overrightarrow{BC} = (4, 2)$, y $\overrightarrow{MN} = (2, 1)$, son proporcionales, tienen la misma dirección, luego las rectas son paralelas.

9.39 Calcula valores de k para que los puntos $A(2, 3)$, $B(4, 1)$ y $C(k, 9)$ estén alineados.

Que estén alineados significa que *C*, por ejemplo, pertenezca a la recta determinada por *A* y *B*.

Recta determinada por *A* y *B*: $\frac{x - 2}{4 - 2} = \frac{y - 3}{1 - 3} \Rightarrow \frac{x - 2}{2} = \frac{y - 3}{-2}$

Si *C* pertenece a ella: $\frac{k - 2}{2} = \frac{9 - 3}{-2} \Rightarrow \frac{k - 2}{2} = -3 \Rightarrow k = -4$.

Por tanto, para que *A*, *B* y *C* estén alineados, debe ser $k = -4$.

9.40 Las coordenadas de dos vértices contiguos de un paralelogramo son (3, 6) y (4, 1). Cada uno de los otros vértices se encuentra en uno de los ejes de coordenadas.

Halla las ecuaciones continuas de los lados del paralelogramo.

1) Si C está en el eje OX y D en el OY, serán $C(a, 0)$, $D(0, b)$.

El punto medio de la diagonal AC es $\left(\frac{3 + a}{2}, 3\right)$ y el de la diagonal BD, $\left(2, \frac{1 + b}{2}\right)$.

Como en un paralelogramo las diagonales se cortan en el punto medio:

$\frac{3 + a}{2} = 2 \Rightarrow a = 1$ $\qquad$ $\frac{1 + b}{2} = 3 \Rightarrow b = 5$

Por tanto: $C(1, 0)$, $D(0, 5)$

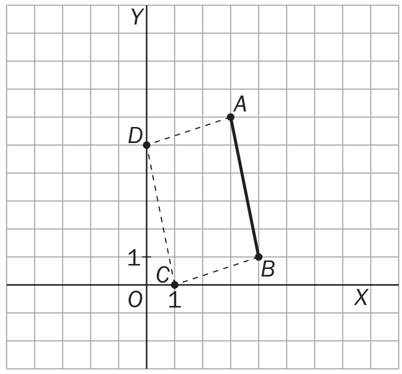
Ecuación continua de los lados:

Lado AB: $\frac{x - 4}{4 - 3} = \frac{y - 6}{1 - 6} \Rightarrow \frac{x - 3}{1} = \frac{y - 6}{-5}$

Lado BC: $\frac{x - 4}{1 - 4} = \frac{y - 1}{0 - 1} \Rightarrow \frac{x - 4}{-3} = \frac{y - 1}{-1}$

Lado CD: $\frac{x - 1}{0 - 1} = \frac{y - 0}{5 - 0} \Rightarrow \frac{x - 1}{-1} = \frac{y}{5}$

Lado DA: $\frac{x - 0}{3 - 0} = \frac{y - 5}{6 - 5} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y - 5}{1}$



2) Si C está en el eje OY y D en el OX: $C(0, c)$, $D(d, 0)$.

Punto medio de la diagonal AC: $\left(\frac{3}{2}, \frac{6 + c}{2}\right)$; punto medio de la diagonal BD: $\left(\frac{4 + d}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Luego: $\frac{3}{2} = \frac{4 + d}{2} \Rightarrow d = -1$, $\frac{6 + c}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = -5$

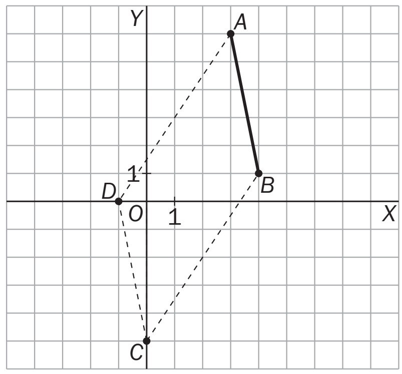
Por tanto: $C(0, -5)$, $D(-1, 0)$

Lado AB: $\frac{x - 3}{1} = \frac{y - 6}{-5}$

Lado BC: $\frac{x - 4}{0 - 4} = \frac{y - 1}{-5 - 1} \Rightarrow \frac{x - 4}{2} = \frac{y - 1}{3}$

Lado CD: $\frac{x - 0}{-1 - 0} = \frac{y + 5}{0 + 5} \Rightarrow \frac{x}{-1} = \frac{y + 5}{5}$

Lado DA: $\frac{x + 1}{3 + 1} = \frac{y - 0}{6 - 0} \Rightarrow \frac{x + 1}{2} = \frac{y}{3}$



Ecuaciones de la recta: general, punto-pendiente y explícita

PARA PRACTICAR

9.41 Halla la ecuación general de las siguientes rectas.

a) Recta que pasa por el punto $P(-2, 3)$ y tiene vector director $\vec{v} = (1, -5)$.

b) Recta que pasa por los puntos $A(1, -2)$ y $B(7, 4)$.

a) Forma continua: $\frac{x + 2}{1} = \frac{y - 3}{-5}$

Se quitan denominadores y se ordena para obtener la ecuación general: $-5x - 10 = y - 3 \Rightarrow 5x + y + 7 = 0$

b) Pasa por $A(1, -2)$ y tiene como vector director $\overrightarrow{AB} = (7 - 1, 4 + 2) = (6, 6)$

Forma continua: $\frac{x - 1}{6} = \frac{y + 2}{6}$

$(x - 1) = (y + 2) \Rightarrow x - y - 3 = 0$: ecuación general

9.42 Halla las ecuaciones paramétricas de la recta cuya ecuación general es: $3x - 4y - 6 = 0$.

Un vector director es $\vec{v} = (4, 3)$. Haciendo, por ejemplo, $y = 0 \Rightarrow x = 2$, luego un punto suyo es $A(2, 0)$.

Las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 3t \end{cases}$

9.43 **Escribe las ecuaciones punto-pendiente y explícita de la recta *r*. *r*: $\frac{x - 1}{3} = \frac{y + 2}{5}$**

Ecuación punto-pendiente. Se despeja $y + 2$: $y + 2 = \frac{5}{3}(x - 1)$.

Ecuación explícita. Se despeja y: $y = \frac{5}{3}x - \frac{5}{3} - 2 \Rightarrow y = \frac{5}{3}x - \frac{11}{3}$.

9.44 **Halla el valor de k para que la recta que tiene por vector director al vector $\vec{v} = (k, k + 1)$ tenga pendiente -2.**

La pendiente es $m = \frac{k + 1}{k}$, luego $\frac{k + 1}{k} = -2 \Rightarrow k + 1 = -2k \Rightarrow k = \frac{1}{3}$.

9.45 **Halla la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(1, -2)$ y forma 60° con el eje positivo de abscisas.**

La pendiente es $m = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$. Ecuación punto-pendiente: $y + 2 = \sqrt{3}(x - 1)$.

Se opera y se ordena para obtener la ecuación general: $y + 2 = \sqrt{3}\,x - \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}\,x - y - 2 - \sqrt{3} = 0$.

9.46 **Halla la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(2, 3)$ y cuya ordenada en el origen es -1.**

Por pasar por $A(2, 3)$, su ecuación punto-pendiente es: $y - 3 = m(x - 2) \Rightarrow y = mx + 3 - 2m$.

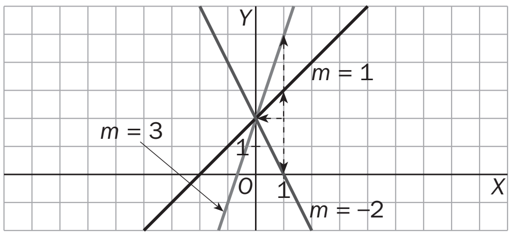
Se sustituye la ordenada en el origen $(0, -1)$: $3 - 2m = -1 \Rightarrow m = 2$.

Por tanto: $y - 3 = 2(x - 2)$

La ecuación general de la recta es: $2x - y - 1 = 0$.

9.47 **Representa en unos mismos ejes tres rectas cuya ordenada en el origen sea $n = 2$, y sus pendientes sean las siguientes.**

a) $m = 1$ **b) $m = 3$** **c) $m = -2$**



Ejercicio resuelto

9.48 **Escribe las ecuaciones paramétricas, explícita y punto-pendiente de la recta cuya ecuación general es: $3x - 2y + 6 = 0$.**

Se halla un punto de la recta dando un valor a una de las coordenadas y sustituyendo en la ecuación para obtener la otra.

$y = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow$ Un punto de la recta es $P(-2, 0)$. Se obtiene el vector: $\vec{v} = (-B, A) = (2, 3)$.

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta son: $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 0 + 3t \end{cases}$

Se despeja y se obtiene la ecuación explícita: $y = \frac{3}{2}x + 3$.

Se extrae como factor común la pendiente, para escribir la ecuación en forma punto-pendiente: $y = \frac{3}{2}(x + 2)$.

9.49 **Halla las ecuaciones general, explícita y en forma punto-pendiente de la siguiente recta.**

$$r: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$$

Se elimina el parámetro t:

$\left.\begin{aligned} 3x &= -3 + 3y \\ y &= 2 - 3t \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ Ecuación general: $3x + y + 1 = 0$

Se despeja la y para obtener la ecuación explícita: $y = -3x - 1$.

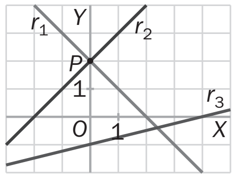
Ecuación punto-pendiente: $y + 1 = -3x$.

Problema resuelto

9.50 Halla la ecuación punto-pendiente de la recta s que pasa por el punto de intersección de las rectas: $\begin{cases} r_1 = x + y - 2 = 0 \\ r_2 = x - y + 2 = 0 \end{cases}$ y es paralela a la recta r_3: $x - 4y - 4 = 0$.

El punto de intersección P cumple las ecuaciones de las dos rectas, y se halla resolviendo el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 2 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0,\ y = 2 \Rightarrow P(0, 2)$$



Como s es paralela a r_3, tiene la misma pendiente: $\vec{v} = (4, 1) \Rightarrow m = \frac{1}{4}$

Como s pasa por $P(0, 2)$, su ecuación punto-pendiente es: $y - 2 = \frac{1}{4}x$.

9.51 Halla la ecuación general de la recta paralela al eje de abscisas y que pasa por el punto de intersección de las siguientes:

***r*: $x - y - 3 = 0$** ***s*: $-2x - y + 3 = 0$**

Para hallar el punto de intersección de las dos rectas se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x - y - 3 = 0 \\ -2x - y + 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2. \text{ Sustituyendo: } 2 - y - 3 = 0 \Rightarrow y = -1.$$

El punto de intersección es: $P(2, -1)$.

Como la recta pedida es paralela al eje de abscisas: $y = 0$, tiene la misma pendiente: $m = 0$.

Por tanto, la ecuación de la recta es: $y + 1 = 0 \cdot (x - 2) \Rightarrow y + 1 = 0$.

9.52 El punto $A(3, 7)$ es el vértice de un paralelogramo. Los lados que no pasan por A son:

***r*: $x - 3y + 4 = 0$** ***s*: $2x + 3y - 1 = 0$**

Halla la ecuación explícita de los otros dos lados.

Los otros dos lados son paralelos a cada una de las dos rectas dadas y pasan por A.

Un vector director de la recta r es: $\vec{u} = (3, 1)$; un vector director de la recta s es: $\vec{v} = (-3, 2)$.

Recta que pasa por A y es paralela a $x - 3y + 4 = 0$:

$$\frac{x - 3}{3} = \frac{y - 7}{1} \Rightarrow x - 3 = 3y - 21 \Rightarrow 3y = x + 18 \Rightarrow y = \frac{x}{3} + 6$$

Recta que pasa por A y es paralela a $2x + 3y - 1 = 0$:

$$\frac{x - 3}{-3} = \frac{y - 7}{2} \Rightarrow 2x - 6 = -3y + 21 \Rightarrow 3y = -2x + 27 \Rightarrow y = -\frac{2x}{3} + 9$$

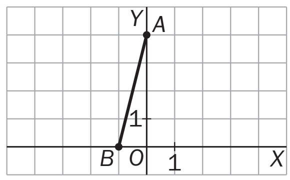
9.53 Una recta corta los ejes de coordenadas en los puntos $A(0, 4)$ y $B(-1, 0)$.

a) Halla la ecuación explícita de dicha recta.

b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B y el origen de coordenadas.

a) Sea la recta $y = mx + n$.
Por pasar por A: $4 = n$. Por pasar por B: $0 = -m + 4 \Rightarrow m = 4$.
La ecuación de la recta es: $y = 4x + 4$.

b) El área del triángulo es: Área $= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 2u^2$



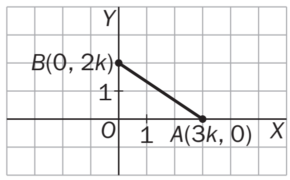
9.54 Uno de los vértices de un triángulo es el origen de coordenadas, y los otros dos, los puntos $A(3k, 0)$ y $B(0, 2k)$. Halla el valor de k y la ecuación general de la recta correspondiente al lado AB, sabiendo que el área del triángulo es 3 unidades de superficie.

El triángulo es rectángulo, y su área es: $\frac{1}{2} \cdot 3k \cdot 2k = 3 \Rightarrow 3k^2 = 3 \Rightarrow k = 1$ ó $k = -1$.

Los puntos son: $A(3, 0)$, $B(0, 2)$ o $A(-3, 0)$, $B(0, -2)$.

La ecuación de la recta AB es: $\frac{x - 3}{-3} = \frac{y}{2}$ o bien $\frac{x + 3}{3} = \frac{y}{-2}$.

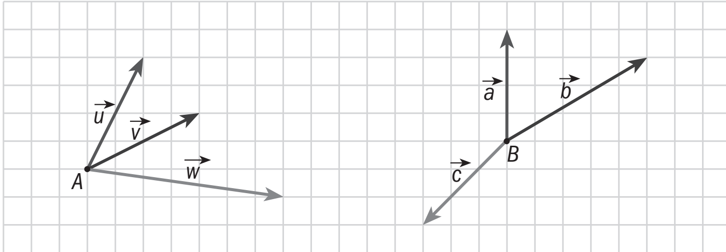
Quitando denominadores y ordenando, se tiene que la ecuación general de la recta AB es:
$2x + 3y - 6 = 0$ o bien $2x + 3y + 6 = 0$.

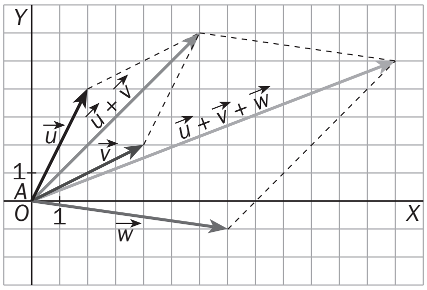


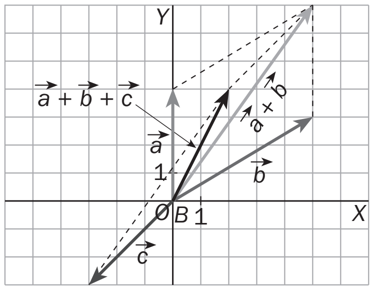
Matemáticas aplicadas

P A R A   A P L I C A R

9.55 **Copia en papel cuadriculado el siguiente sistema de coordenadas, en el que se representa la situación de varios barcos remolcadores y las fuerzas que ejercen. Dibuja en cada caso la fuerza resultante y la dirección en la que avanza el barco remolcado.**



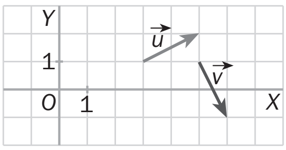




Actividades finales

P A R A   P R A C T I C A R   Y   A P L I C A R

9.56 **Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la figura:**

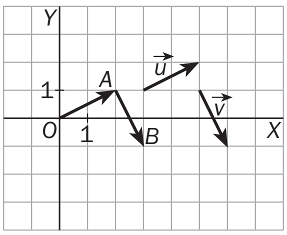


a) Dibuja los vectores $\overrightarrow{OA}$, representante de $\vec{u}$, y $\overrightarrow{AB}$, representante de $\vec{v}$.

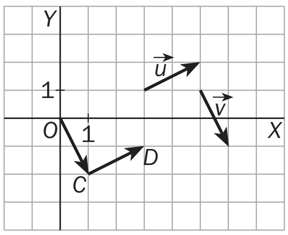
b) Dibuja los vectores $\overrightarrow{OC}$, representante de $\vec{v}$, y $\overrightarrow{CD}$, representante de $\vec{u}$.

c) ¿Por qué coinciden los puntos *B* y *D*?

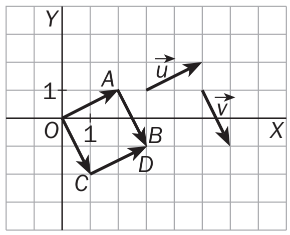
a)



b)



c)



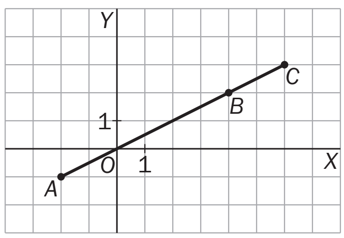
Los puntos *B* y *D* coinciden porque la adición de vectores tiene la propiedad conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

9.57 **Sean los puntos de coordenadas:**

$A(-2, -1)$ $B(4, 2)$ $C(6, 3)$

Compara las distancias entre los puntos *A* y *B*, entre *A* y *C* y entre *B* y *C*.

¿Están alineados los puntos?



$d(A,B) = \sqrt{(4+2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} = \text{ud}$

$d(A,C) = \sqrt{(6+2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}\ \text{ud}$

$d(B,C) = \sqrt{(6-4)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5}\ \text{ud}$

Como $3\sqrt{5} + \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$; esto es, $d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$

Significa que *B* está entre *A* y *C*, y, por tanto, *A*, *B* y *C* están alineados.

9.58 Sean los puntos de coordenadas:

$A(m, 2)$ $\qquad$ $B(-1, 3 - m)$ $\qquad$ $C(0, -n)$ $\qquad$ $D(1 + 2n, -2)$

Halla m y n para que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean representantes de un mismo vector libre $\vec{v}$.

$\overrightarrow{AB} = (-1, 3 - m) - (m, 2) = (-1 - m, 3 - m - 2) = (-1 - m, 1 - m)$

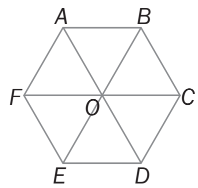
$\overrightarrow{CD} = (1 + 2n, -2) - (0, -n) = (1 + 2n, -2 + n)$

Para que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean representantes de un mismo vector libre, deben ser equipolentes y, por tanto, tener las mismas coordenadas:

$$\left.\begin{array}{l} -1 - m = 1 + 2n \\ 1 - m = -2 + n \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -m - 2n = 2 \\ -m - n = -3 \end{array}\right\} -n = 5 \Rightarrow n = -5$$

Sustituyendo: $-m + 5 = -3 \Rightarrow m = 8$

9.59 En el hexágono regular de la figura compara en cada caso el módulo, la dirección y el sentido de los vectores:



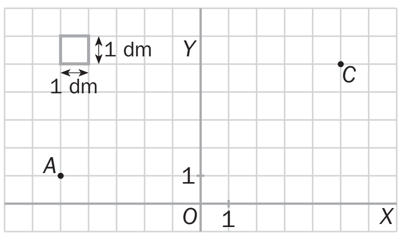
a) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FC}$ y $\overrightarrow{DE}$.

b) $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{OE}$ y $\overrightarrow{EB}$.

a) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FC}$ y $\overrightarrow{EB}$ tienen la misma dirección.
$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{FC}$ tienen el mismo sentido, y $\overrightarrow{DE}$ tiene sentido contrario de los anteriores.
$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DE}$ tienen el mismo módulo. El módulo de $\overrightarrow{FC}$ es el doble que el módulo de los anteriores.

b) Los cuatro vectores tienen la misma dirección.
$\overrightarrow{AF}$ y $\overrightarrow{OE}$ tienen el mismo sentido.
$\overrightarrow{DC}$ y $\overrightarrow{EB}$ tienen el mismo sentido, que es el sentido contrario de los anteriores.
$\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{DC}$ y $\overrightarrow{OE}$ tienen el mismo módulo. El módulo de $\overrightarrow{EB}$ es el doble que el módulo de los anteriores.

9.60 Sonia va a construir un espejo cuadrado del que *A* y *C* son dos vértices opuestos. ¿Cuál es el área del espejo?



AC es una diagonal del cuadrado.

Como $A(-5, 1)$ y $C(5, 5)$,

$d(A, C)\ )\ \sqrt{(5 + 5)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{10^2 + 4^2} = 10{,}77$ dm

Para hallar el lado l del cuadrado se aplica el teorema de Pitágoras:

$l^2 + l^2 = 10{,}77^2 \Rightarrow 2l^2 = 10{,}77^2$

El área del espejo es: Área $= l^2 = \dfrac{10{,}77^2}{2} = 58$ dm^2

9.61 Dados los puntos $A(1, 1)$ y $B(7, 5)$, halla las coordenadas del punto *C*, perteneciente al segmento *AB*, que verifica: $CB = 2AC$.

Si las coordenadas de *C* son: $C(c, c')$: $\overrightarrow{CB} = (7-c, 5-c')$, $2\overrightarrow{AC} = 2(c-1, c'-1) = (2c-2, 2c'-2)$.

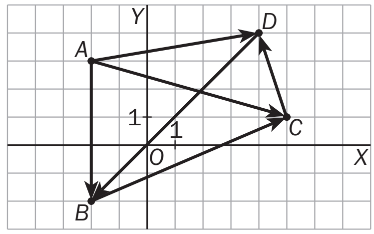
Por tanto: $7 - c = 2c - 2 \Rightarrow 9 = 3c \Rightarrow c = 3$ y $5 - c' = 2c' - 2 \Rightarrow 7 = 3c' \Rightarrow c' = \dfrac{7}{3}$

Las coordenadas de *C* son: $C\left(3, \dfrac{7}{3}\right)$.

9.62 Los vértices de un cuadrilátero *ABCD* son:

***A*(−2, 3)** **B(−2, −2)** **C(5, 1)** **D(4, 4)**

Dibuja el vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$ y halla las coordenadas.



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} =$

$= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$

En coordenadas: $\overrightarrow{AB} = (-2,-2) - (-2, 3) = (0,-5)$

$\overrightarrow{BC} = (5, 1) - (-2,-2) = (7, 3)$

$\overrightarrow{CD} = (4, 4) - (5, 1) = (-1,3)$

$\overrightarrow{DB} = (-2,-2) - (4,4) = (-6,-6)$

Luego $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = (0,-5) + (7, 3) + (-1, 3) + (-6,-6) =$

$= (0 + 7 - 1 - 6, - 5 + 3 + 3 - 6) = (0,-5) = \overrightarrow{AB}$

9.63 Dados los vectores $\vec{u} = (2, k)$ y $\vec{v} = (k - 1, 3)$, halla los valores que debe tomar k para que los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - 3\vec{v}$ sean vectores directores de la misma recta.

$\vec{u} + \vec{v} = (2 + k - 1, k + 3) = (1 + k, k + 3),$

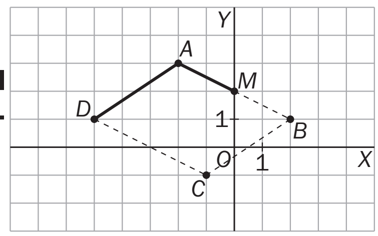
$\vec{u} - 3\vec{v} = (2, k) - (3k - 3, 9) = (2 - 3k + 3, k - 9) = (5 - 3k, k - 9)$

$u + v$ y $u - 3v$ deben ser proporcionales: $\dfrac{1 + k}{k + 3} = \dfrac{5 - 3k}{k - 9}$

$k - 9 + k^2 - 9k = 5k - 3k^2 + 15 - 9k,\ k^2 - 8k - 9 = -3k^2 - 4k + 15,\ 4k^2 - 4k - 24 = 0 \Rightarrow k^2 - k - 6 = 0$

$k = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$

9.64 De un paralelogramo *ABCD* se sabe que *A*(−2, 3) y *D*(−5, 1), y que el punto medio del lado *AB* es *M*(0, 2). Halla las coordenadas de *B* y de *C*.



Si $B(b, b')$, entonces:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{-2 + b}{2} \\ 2 &= \frac{3 + b'}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} b &= 2 \\ b' &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow B(2, 1)$$

El vértice C se obtiene como intersección de la recta que pasa por B y es paralela a AD con la recta que pasa por D y es paralela a AB:

$\overrightarrow{AD} = (-5, 1) - (-2, 3) = (-3,-2);$

Recta que pasa por B y es paralela a AD: $\dfrac{x - 2}{-3} = \dfrac{y - 1}{-2} \Rightarrow -2x + 4 = -3y + 3 \Rightarrow 2x - 3y - 1 = 0$

$\overrightarrow{AB} = (2,1) - (-2,3) = (4,-2);$

Recta que pasa por D y es paralela a AB: $\dfrac{x + 5}{4} = \dfrac{y - 1}{-2} \Rightarrow -2x - 10 = 4y - 4 \Rightarrow 2x + 4y + 6 = 0 \Rightarrow x + 2y + 3 = 0$

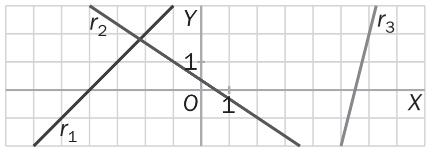
Se halla la intersección de las dos rectas resolviendo el sistema: $\begin{cases} 2x - 3y - 1 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$

Se despeja x de la segunda y se sustituye en la primera: $x = -2y - 3 \Rightarrow 2(-2y - 3) - 3y - 1 = 0,$

$-4y - 6 - 3y - 1 = 0,\ -7y - 7 = 0,\ y = -1,\ x = -2 \cdot (-1) - 3 = 1$

Las coordenadas de C son: $C(-1, -1)$.

9.65 Halla las ecuaciones paramétricas y continua de las rectas r_1, r_2 y r_3 de la figura.



	Punto	Vector director	Ecuaciones paramétricas	Ecuación continua
r_1	$A(-4, 0)$	$\vec{u} = (1, 1)$	$\begin{cases} x = -4 + t \\ y = 0 + t \end{cases}$	$\dfrac{x+4}{1} = \dfrac{y}{1}$
r_2	$B(-1, 1)$	$\vec{v} = (3, -2)$	$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$	$\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{-2}$
r_3	$C(6, 2)$	$\vec{w} = (-1, -4)$	$\begin{cases} x = 6 - t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$	$\dfrac{x-6}{-1} = \dfrac{y-2}{-4}$

9.66 Considera el triángulo rectángulo de vértices los puntos $A(0, 0)$, $B(0, 3)$ y $C(4, 0)$.

a) Halla las ecuaciones paramétricas de la hipotenusa.

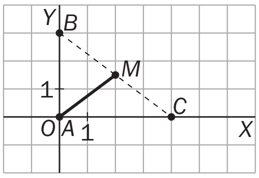
b) Halla la ecuación continua de la mediana correspondiente a la hipotenusa.

c) ¿Cómo son entre sí las longitudes de la hipotenusa y de su mediana correspondiente?

a) La hipotenusa BC es la recta que pasa por $B(0,3)$ y tiene como vector director $\overrightarrow{BC} = (4,0) - (0,3) = (4,-3)$.

Ecuaciones paramétricas: $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y-3}{-3}$

b)



Si M es el punto medio de BC: $M\left(\dfrac{0+4}{2}, \dfrac{3+0}{2}\right) \Rightarrow M\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$

Mediana: $\dfrac{x-0}{2-0} = \dfrac{y-0}{\frac{3}{2}-0} \Rightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{\frac{3}{2}}$

c) $d(B,C) = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2} = 5$ ud, $d(A,M) = \sqrt{(2-0)^2 + \left(\dfrac{3}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{5}{2}$ ud

La longitud de la hipotenusa es el doble de la longitud de la mediana correspondiente.

9.67 Halla la ecuación de la recta $2x + 5y - 10 = 0$ que se indica en cada apartado.

a) Continua **b) Punto-pendiente** **c) Explícita**

Vector director: $\vec{u} = (-5, 2)$ Punto: $x = 0 \Rightarrow y = 2$, $A(0, 2)$

a) Ecuación continua: $\dfrac{x}{-5} = \dfrac{y-2}{2}$

b) Ecuación punto-pendiente: $-5(y-2) = 2x$, $y - 2 = -\dfrac{2}{5}x$

c) Ecuación explícita: $y = -\dfrac{2}{5}x + 2$

9.68 Sin representarlos, averigua en cada caso si los siguientes puntos determinan un triángulo.

a) $A(0, 2)$ $B(4, 4)$ $C(5, 1)$

b) $A(-3, -1)$ $B(1, 1)$ $C(3, 2)$

Hay que comprobar si están alineados o no. Si no lo están, forman un triángulo.

a) Recta AB: $\dfrac{x-0}{4-0} = \dfrac{y-2}{4-2} \Rightarrow \dfrac{x}{4} = \dfrac{y-2}{2}$

Se sustituye C: $\dfrac{5}{4} \neq \dfrac{1-2}{2}$, luego C no pertenece a la recta AB y los puntos determinan un triángulo.

b) Recta AB: $\dfrac{x+3}{1+3} = \dfrac{y+1}{1+1} \Rightarrow \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y+1}{2}$

$C(3, 2)$: $\dfrac{3+3}{4} = \dfrac{2+1}{2}$, luego C pertenece a la recta AB. Los puntos A, B y C están alineados: no determinan un triángulo.

9.69 Halla el valor de k para que la recta: $\dfrac{x-3}{k+1} = \dfrac{y+1}{-4}$

a) Pase por el punto $P(1, -5)$.

b) Tenga pendiente -2.

c) Tenga ordenada en el origen 1.

a) Se sustituye: $x = 1$, $y = -5$.

$$\frac{1-3}{k+1} = \frac{-5+1}{-4} \Rightarrow \frac{-2}{k+1} = \frac{-4}{-4} \Rightarrow -\frac{2}{k+1} = 1 \Rightarrow -2 = k+1 \Rightarrow k = -3$$

b) Vector director: $\vec{u} = (k+1, -4)$, pendiente: $m = \dfrac{-4}{k+1}$.

Luego $\dfrac{-4}{k+1} = -2 \Rightarrow -4 = -2k - 2 \Rightarrow k = 1$

c) $-4(x-3) = (k+1)(y+1) \Rightarrow -4x + 12 = (k+1)y + k + 1 \Rightarrow (k+1)y = -4x + 12 - k - 1 \Rightarrow y = \dfrac{-4}{k+1}x + \dfrac{11-k}{k+1}$

Luego $\dfrac{11-k}{k+1} = 1 \Rightarrow 11 - k = k + 1 \Rightarrow 10 = 2k \Rightarrow k = 5$

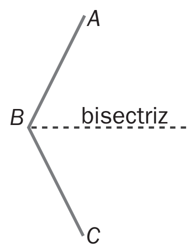
9.70 Halla las coordenadas del punto perteneciente a la recta r: $y = 3x + 5$ cuya abscisa sea una unidad menor que su ordenada.

Si el punto es $P(a-1, a)$, entonces: $a = 3(a-1) + 5 \Rightarrow a = 3a + 2 \Rightarrow a = -1$.

El punto es $P(-2, -1)$.

9.71 La bisectriz del ángulo ABC de la figura es una recta horizontal.

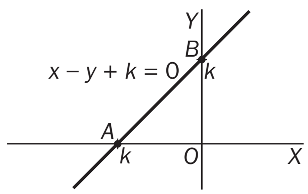
Si la ecuación de la recta a la que pertenece el lado AB es $y = 2x + 1$, escribe la ecuación correspondiente al lado BC.



La bisectriz divide el ángulo ABC en dos ángulos iguales. Como la pendiente de la recta correspondiente al lado AB es 2, y la bisectriz es una recta horizontal, la pendiente de la recta BC es -2. La ordenada en el origen de ambas rectas es 1; por tanto, la ecuación del lado BC es: $y = -2x + 1$.

9.72 El centro de un cuadrado es el origen de coordenadas, y uno de sus lados está sobre la recta de ecuación: $x - y + k = 0$.

Halla k y las coordenadas de los vértices, sabiendo que su área es 8 unidades de superficie.



Hallamos los puntos en que la recta corta los ejes:

$x = 0 \Rightarrow y = k$

$y = 0 \Rightarrow x = -k$

Son los puntos $A(-k, 0)$ y $B(0, k)$.

Como el centro del cuadrado es O, los otros dos vértices son $C(k, 0)$ y $D(0, -k)$.

El triángulo rectángulo AOB es isósceles y cada cateto es igual a k.

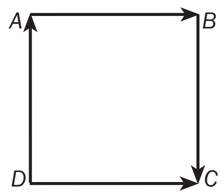
Si l es la longitud del lado: $l^2 = k^2 + k^2 = 2k^2$.

Como el área del cuadrado es 8: $8 = l^2 = 2k^2 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$.

Los vértices son entonces: $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$ y $(0, -2)$.

PARA REFORZAR

9.73 En un cuadrado $ABCD$, considera los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$ y $\overrightarrow{DA}$.



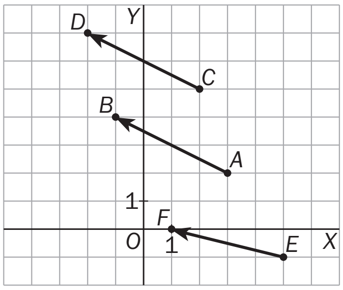
a) ¿Cuáles de ellos tienen el mismo módulo?

b) ¿Cuáles tienen la misma dirección y el mismo sentido?

a) Los cuatro vectores tienen el mismo módulo.

b) $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ tienen la misma dirección y el mismo sentido. $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{DA}$ tienen la misma dirección, pero distinto sentido.

9.74 Sean los puntos de coordenadas $A(3, 2)$, $B(-1, 4)$, $C(2, 5)$, $D(-2, 7)$, $E(5, -1)$ y $F(1, 0)$. ¿Son equipolentes los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$?



$\overrightarrow{AB} = (-1,4) - (3,2) = (-4,2)$

$\overrightarrow{CD} = (-2,7) - (2,5) = (-4,2)$

$\overrightarrow{EF} = (1,0) - (5,-1) = (-4,1)$

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes, pero el vector $\overrightarrow{EF}$ no es equipolente a ellos.

9.75 Averigua en cada caso si el triángulo ABC es isósceles.

a) $A(1, -1)$, $B(4, 1)$ y $C(2, 3)$ **b) $A(3, 4)$, $B(7, 0)$ y $C(2, -1)$**

a) $d(A,B) = \sqrt{(4-1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{29}$ ud.

$d(B,C) = \sqrt{(2-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ud.

$d(C,A) = \sqrt{(1-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{17}$ ud.

El triángulo *ABC* no es isósceles porque no tiene dos lados iguales.

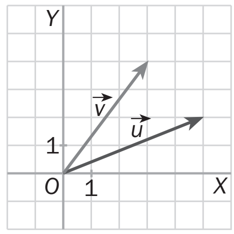
b) $d(A,B) = \sqrt{(7-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ ud.

$d(B,C) = \sqrt{(2-7)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{26}$ ud.

$d(C,A) = \sqrt{(3-2)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{26}$ ud.

Como los lados *BC* y *CA* son iguales, el triángulo *ABC* es isósceles.

9.76 Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, dibuja y halla las coordenadas de los siguientes vectores.



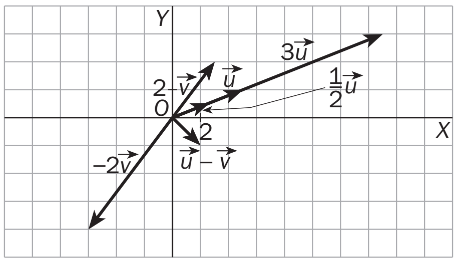
a) $3\vec{u}$ **b) $\vec{u} - \vec{v}$** **c) $\frac{1}{2}\vec{u}$** **d) $-2\vec{v}$**

a) $3(5, 2) = (15, 6)$

b) $(5, 2) - (3, 4) = (2, -2)$

c) $\frac{1}{2}(5, 2) = \left(\frac{5}{2}, 1\right)$

d) $-2\,(3, 4) = (-6, -8)$



9.77 Dados los siguientes vectores:

$\vec{u} = (4, 9)$ **$\vec{v} = (2, 3)$** **$\vec{w} = (0, -3)$**

Halla los números m y n que verifican: $\vec{u} = m\vec{v} + n\vec{w}$.

$(4, 9) = m(2, 3) + n(0, -3) = (2m, 3m) + (0, -3n) = (2m, 3m-3n)$

$$\left.\begin{array}{l} 2m = 4 \\ 3m - 3n = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m = 2 \\ 6 - 3n = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m = 2 \\ n = -1 \end{array}\right\}$$

9.78 Halla las coordenadas de un punto y de un vector director de las siguientes rectas.

a) $x = (2 + t, -3)$ **b) $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = 2t \end{cases}$** **c) $2x - 5y + 4 = 0$** **d) $y = 3x - 7$**

a) $x = (2,-3) + t(1, 0)$. Punto $A(2,-3)$. Vector director: $\vec{v} = (1, 0)$.

b) Punto: $A(5, 0)$. Vector director: $\vec{v} = (-1, 2)$.

c) Punto: se da valor a x o a y; por ejemplo: $y = 0 \Rightarrow 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$. Punto: $A(-2, 0)$. Vector director: $\vec{v} = (5, 2)$.

d) Punto: $x = 0 \Rightarrow y = -7 \Rightarrow A(0,-7)$. Como la pendiente es $m = 3$, un vector director es $\vec{v} = (1, 3)$.

9.79 Sea la recta que pasa por $A(-1, 4)$ y $B(2, -6)$.

a) Escribe sus ecuaciones vectorial, continua y paramétricas.

b) Halla qué valor debe tomar k para que $C(6, k)$ esté alineado con A y B.

a) Un vector director es $\overrightarrow{AB} = (2 + 1, -6 - 4) = (3, -10)$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (-1, 4) + t(3, -10)$

Ecuación continua: $\dfrac{x + 1}{2 + 1} = \dfrac{y - 4}{-6 - 4} \Rightarrow \dfrac{x + 1}{3} = \dfrac{y - 4}{-10}$ Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 4 - 10t \end{cases}$

b) Para que C esté alineado con A y B, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación de la recta:

$$\frac{6 + 1}{3} = \frac{k - 4}{-10} \Rightarrow \frac{7}{3} = \frac{k - 4}{-10} \Rightarrow -70 = 3k - 12 \Rightarrow -58 = 3k \Rightarrow k = -\frac{58}{3}$$

9.80 Sean las rectas: r: $y = -3x + 5$ s: $x - y + 6 = 0$

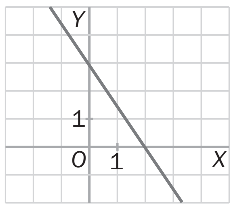
Halla la ecuación punto-pendiente de la recta paralela a r que pasa por el punto en el que s corta al eje de abscisas.

Para hallar el punto en que la recta $y = x + 6$ corta al eje de abscisas, se hace $y = 0 \Rightarrow 0 = x + 6 \Rightarrow x = -6$; luego la recta pedida pasa por el punto $A(-6, 0)$.

Por ser paralela a $y = -3x + 5$, tendrá su misma pendiente: $m = -3$.

La ecuación punto-pendiente de la recta pedida es: $y = -3(x + 6)$.

9.81 Halla todas las ecuaciones de la recta de la figura.



Los puntos en que corta los ejes de coordenadas son: $A(2, 0)$ y $B(0, 3)$.

Vector director: $\vec{v} = (0-2, 3-0) = (-2, 3)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3t \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x - 2}{-2} = \dfrac{y - 0}{3}$

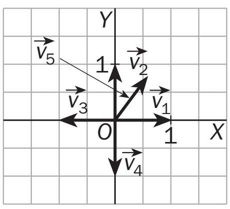
Quitando denominadores se tiene la ecuación general: $3x + 2y - 6 = 0$.

Despejando y se obtiene la ecuación explícita: $y = -\dfrac{3}{2}x + 3$.

Ecuación punto-pendiente: $y - 3 = -\dfrac{3}{2}(x - 0)$

P A R A A M P L I A R

9.82 Halla las coordenadas de cinco vectores cuyo módulo sea 1.



Cuatro vectores cuyo módulo es 1 son los siguientes:

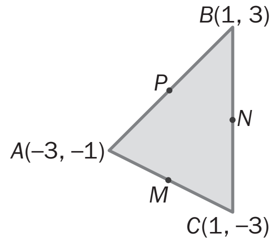
$\vec{v}_1 = (1,0)$, $\vec{v}_2 = (0,1)$, $\vec{v}_3 = (-1,0)$, $\vec{v}_4 = (0,-1)$.

Para hallar el quinto, basta con tomar un vector cualquiera $\vec{v}$ y dividirlo por su módulo,

pues $\left|\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right| = \left|\dfrac{1}{|\vec{v}|}\right| |\vec{v}| = \dfrac{1}{|\vec{v}|} |\vec{v}| = 1$.

Por ejemplo, si $\vec{v} = (3, 4)$, $|\vec{v}| \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. El quinto vector de módulo 1 es: $\vec{v}_5 = \dfrac{1}{5}(3, 4) = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$.

9.83 Se considera el triángulo *ABC* de la figura.



Determina las coordenadas de:

a) Los puntos *M*, *N* y *P*.

b) El punto *Q*, situado en la mediana *AN*, que verifica: $\overrightarrow{QA} = 2\overrightarrow{NQ}$.

c) El punto *Q'*, sobre la mediana *BM* que verifica: $\overrightarrow{QB} = 2\overrightarrow{MQ'}$.

d) El punto *Q''*, sobre la mediana *CP* que verifica: $\overrightarrow{Q''C} = 2\overrightarrow{PQ''}$.

e) El baricentro del triángulo.

a) Como $A(-3,-1)$, $B(1, 3)$, $C(1, -3)$:

$$M\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{-1-3}{2}\right) \Rightarrow M(-1,1), \quad N\left(\frac{1+1}{2}, \frac{-3+3}{2}\right) \Rightarrow N(1,0), \quad P\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) \Rightarrow P(-1, 1)$$

b) Si $Q(q_1, q_2)$, entonces: $(-3, -1) - (q_1, q_2) = 2[(q_1, q_2) - (1, 0)] \Rightarrow \begin{cases} -3-q_1 = 2q_1 - 2 \\ -1-q_2 = 2q_2 \end{cases} \Rightarrow q_1 = -\frac{1}{3}, q_2 = -\frac{1}{3}$

Luego las coordenadas de *Q* son: $Q\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

c) Si $Q'(q'_1\ q'_2)$, entonces: $(1, 3) - (q'_1, q'_2) = 2[(q'_1, q'_2) - (-1,-2)] \Rightarrow \begin{cases} 1 - q'_1 = 2q'_1 + 2 \\ 3 - q'_2 = 2q'_2 + 4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow q'_1 = -\frac{1}{3}, q'_2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow Q'\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

d) Si $Q''(q''_1, q''_2)$, entonces: $(1, -3) - (q''_1, q''_2) = 2[(q''_1, q''_2) - (-1,1)] \Rightarrow \begin{cases} 1-q''_1 = 2q''_1 + 2 \\ -3 - q''_2 = 2q''_2 - 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow q''_1 = -\frac{1}{3}; q''_2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow Q''\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

e) Resulta, por tanto, que $Q = Q' = Q''$. Como el punto que cumple las condiciones del problema es el baricentro del triángulo, se tiene: $G\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

9.84 Observa la relación existente en el problema anterior entre las coordenadas de los vértices del triángulo y las coordenadas de su baricentro.

a) ¿Cuáles son las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ y $C(c_1, c_2)$?

b) Halla las coordenadas del baricentro del triángulo *ABC* de vértices $A(1, -5)$, $B(3, 4)$ y $C(-1, 1)$.

a) En el problema anterior, los vértices eran los puntos: $A(-3,-1)$, $B(1, 3)$, $C(1, -3)$, y las coordenadas del baricentro: $G\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Se observa que $\begin{cases} -\frac{1}{3} = \frac{-3+1+1}{3} \\ -\frac{1}{3} = \frac{-1+3-3}{3} \end{cases}$

Así, el baricentro del triángulo de vértices los puntos $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$, $C(c_1,c_2)$ es el punto $G(g_1,g_2)$, de coordenadas:

$$g_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \quad g_2 = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}$$

b) $g_1 = \frac{1+3-1}{3} = 1$, $g_2 = \frac{-5+4+1}{3} = 0$

Las coordenadas del baricentro *G* de este triángulo *ABC* son: $G(1,0)$.

9.85 Determina las coordenadas de los puntos de la recta $y = 3x$ que distan 5 unidades del punto $A(4,-1)$.

Sea $P(k, 3k)$ un punto cualquiera de la recta: $d(A, P) = \sqrt{(k-4)^2 + (3k+1)^2} = 5$

Se eleva al cuadrado: $(k-4)^2 + (3k+1)^2 = 25 \Rightarrow k^2 - 8k + 16 + 9k^2 + 6k + 1 = 25 \Rightarrow 5k^2 - k - 4 = 0$

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{10} = \frac{1 \pm 9}{10} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Hay dos puntos que lo verifican: $P(1, 3)$ y $P'\left(-\frac{4}{5}, \frac{-12}{5}\right)$

9.86 Una recta pasa por el punto $A(3, 2)$ y su pendiente es $\frac{3}{4}$.

Halla la ecuación de dicha recta y las coordenadas de los dos puntos de la misma que distan 5 unidades de A.

La ecuación punto-pendiente de la recta es: $y - 2 = \frac{3}{4}(x - 3)$.

Despejamos y: $4y - 8 = 3x - 9 \Rightarrow y = \frac{3x - 1}{4}$.

Un punto cualquiera de la recta es: $P\left(k, \frac{3k - 1}{4}\right)$.

$$d(A, P) = \sqrt{(k - 3)^2 + \left(\frac{3k - 1}{4} - 2\right)^2} = 5$$

Se eleva al cuadrado:

$$(k - 3)^2 + \left(\frac{3k - 9}{4}\right)^2 = 25 \Rightarrow k^2 - 6k + 9 + \frac{9k^2 - 54k + 81}{16} = 25 \Rightarrow 16k^2 - 96k + 144 + 9k^2 - 54k + 81 = 400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25k^2 - 150k - 175 = 0 \Rightarrow k^2 - 6k - 7 = 0$$

$$k = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2} = \begin{cases} 7 \\ -1 \end{cases}$$

$$\text{Si } x = k = \begin{cases} 7 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{3x - 1}{4} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$$

Hay dos puntos que lo verifican: $P(7,5)$ y $P'(-1,-1)$.

9.87 Halla la ecuación de la recta que forma con los ejes de coordenadas un triángulo de área 2 unidades de superficie, y que cumpla en cada caso la condición que se indica.

a) Su pendiente es 1.

b) Pasa por el punto $P(1, 1)$.

a) La ecuación explícita de todas las rectas de pendiente 1 es: $y = x + n$.

Puntos de corte: $\left.\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = n \\ y = 0 \Rightarrow x = -n \end{array}\right\}$

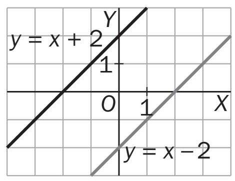
Los segmentos en que la recta corta los ejes miden n ud.; o sea, cada cateto mide n ud.

El área es: $A = \frac{1}{2} n \cdot n = \frac{n^2}{2} = 2 \Rightarrow n = \pm 2$.

Hay dos soluciones:

$y = x + 2$

$y = x - 2$



b) La ecuación punto-pendiente de todas las rectas que pasan por P es: $y - 1 = m(x - 1)$.

Puntos de corte: $x = 0 \Rightarrow y = 1 - m$

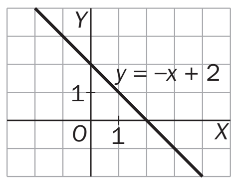
$y = 0 \Rightarrow -1 = m(x - 1) \Rightarrow x = 1 - \frac{1}{m}$

El área del triángulo es:

$$A = \frac{1}{2}(1 - m)\left(1 - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 - m)(m - 1)}{m} = \frac{-m^2 + 2m - 1}{2m} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2 + 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1 \text{ (raíz doble).}$$

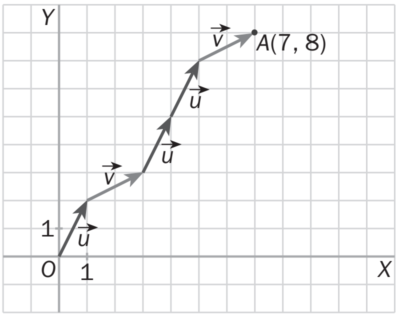
La ecuación de la recta es: $y - 1 = -(x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$



9.88 Solo dos vectores

Supón que para trasladarse del origen de coordenadas a otro punto del plano solo puedes utilizar los vectores $\vec{u} = (1, 2)$ y $\vec{v} = (2, 1)$.

Así, por ejemplo, para trasladarse del origen de coordenadas al punto $A(7, 8)$ se puede utilizar la secuencia: $\vec{u} \to \vec{v} \to \vec{u} \to \vec{u} \to \vec{v}$.



a) Indica otra secuencia diferente que conduzca también al punto *A*. ¿Qué propiedad verifican todas las secuencias que conducen a *A*?

b) ¿Se puede alcanzar cualquier punto del primer cuadrante con coordenadas enteras mediante este tipo de secuencias?

c) Escribe, si existen, secuencias para los siguientes puntos.

$B(2, 8)$ $\quad$ $C(10, 8)$ $\quad$ $D(6, 4)$

a) Sí. Por ejemplo, la $\vec{u} \to \vec{u} \to \vec{u} \to \vec{v} \to \vec{v}$

Todas las secuencias compuestas por tres $\vec{u}$ y dos $\vec{v}$ conducen al punto *A*.

b) No. Solo aquellos puntos comprendidos entre las rectas $y = 2x$ e $y = \frac{1}{2}x$ y tales que sus coordenadas sumen un múltiplo de tres.

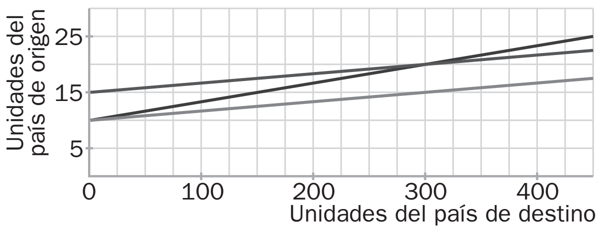
(No se pide tanta precisión en la respuesta. Sería suficiente con que el alumno diera algún contraejemplo.)

c) *B* y *D* no se pueden alcanzar. $C: \vec{u} \to \vec{u} \to \vec{v} \to \vec{v} \to \vec{v}$.

9.89 Cambio de divisas

Un grupo de amigos va a realizar un viaje. Para cambiar las divisas acuden a tres bancos diferentes y solicitan información sobre el cambio que aplican.

En los tres casos, el coste de x unidades monetarias del país de destino (en unidades monetarias del país de origen) viene dado por una recta del tipo $y = Ax + B$, siendo A el precio de una unidad monetaria del país extranjero y B una comisión fija e independiente de la cantidad solicitada.



a) Calcula los valores de *A* y *B* para cada banco.

b) Las rectas de color gris y verde son paralelas. ¿Cómo interpretas esta peculiaridad geométrica? ¿Cuál será el mejor banco de los dos para realizar el cambio?

c) Las rectas naranja y verde se cortan en un punto. ¿Qué interpretación puedes dar? ¿Cuál será el mejor banco de los dos para realizar el cambio?

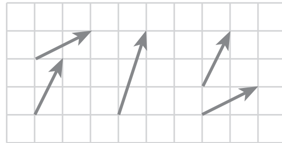
a)

Primer banco (recta gris)	Segundo banco (recta naranja)	Tercer banco (recta verde)
$y = \frac{1}{60}x + 10$	$y = \frac{1}{30}x + 10$	$y = \frac{1}{60}x + 15$

b) Aunque la cantidad que cobran por cada unidad monetaria es la misma, la comisión del banco gris es menor que la del banco verde. Siempre será mejor realizar el cambio en el banco gris.

c) Si se quieren comprar 300 unidades monetarias del país de destino, da lo mismo hacerlo en el banco naranja o en el verde. Si se quiere menos de 300 es mejor el naranja, y si se quieren más es mejor el verde, aunque, en cualquier caso, siempre es mejor el gris.

9.A1 **¿Cuántos vectores libres diferentes encuentras en la figura? Dibuja uno diferente.**



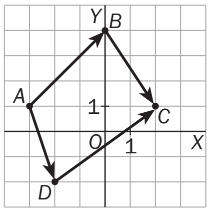
Hay tres vectores libres diferentes. El cuarto es igual que el segundo y el quinto es igual que el primero.

Un vector diferente es, por ejemplo:

9.A2 **Estudia si es un paralelogramo el cuadrilátero de vértices:**

$A(-3, 1)$ **$B(0, 4)$** **$C(2, 1)$** **$D(-2, -2)$**

Para que sea un paralelogramo, los vectores determinados por lados opuestos deben ser equipolentes:



$\overrightarrow{AB}$ debe ser equipolente a $\overrightarrow{DC}$

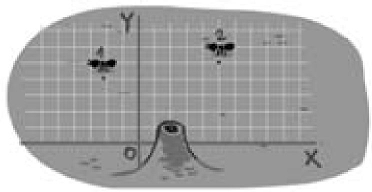
$\overrightarrow{AD}$ debe ser equipolente a $\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB} = (0,4) - (-3,1) = (3,3)$

$\overrightarrow{DC} = (2,1) - (-2,-2) = (4,3)$

Como $\overrightarrow{AB}$ no es equipolente a $\overrightarrow{DC}$, *ABCD* no es un paralelogramo.

9.A3 **¿Cuál de las dos hormigas está más cerca del hormiguero?**



La hormiga 1 está en el punto $A(-2, 4)$; la hormiga 2, en el $B(5, 5)$, y el hormiguero, en $C(2, 1)$.

$d(A,C) = \sqrt{(2+2)^2 + (1-4)^2} = 5$ ud.

$d(B,C) = \sqrt{(2-5)^2 + (1-5)^2} = 5$ ud.

Las dos hormigas están a la misma distancia del hormiguero.

9.A4 **Sean los vectores: $\vec{u}(1, 1)$, $\vec{v} = (0, -2)$ y $\vec{w} = (3, 1)$.**
Expresa cada uno de ellos como suma de dos vectores de la misma dirección de los otros.

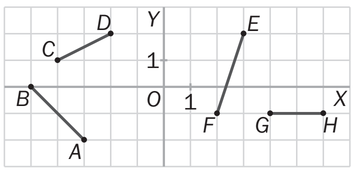
$\vec{u} = r\vec{v} + s\vec{w}$: $(1, 1) = r(0,-2) + s(3, 1)$:

$$\left.\begin{matrix} 1 = 3s \\ 1 = -2r + s \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} s = \dfrac{1}{3} \\ 2r = \dfrac{1}{3} - 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} s = \dfrac{1}{3} \\ r = -\dfrac{1}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{u} = -\frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}$$

De esta expresión podemos despejar $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en función de los otros dos vectores:

$$3\vec{u} = -\vec{v} + \vec{w} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v} = -3\vec{u} + \vec{w} \\ \vec{w} = 3\vec{u} + \vec{v} \end{cases}$$

9.A5 **Halla las ecuaciones vectorial y paramétricas de las rectas que contienen a los segmentos de la figura.**



AB: Pasa por el punto $A(-3, -2)$ y tiene como vector director $\vec{v}_1 = (-2, 2)$.

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$

CD: Pasa por el punto $C(-4, 1)$ y tiene como vector director $\vec{v}_2 = (2, 1)$.

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$

EF: Pasa por el punto $F(2, -1)$ y tiene como vector director $\vec{v}_3 = (1, 3)$.

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$

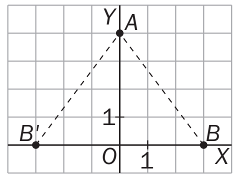
GH: Pasa por el punto $G(4, -1)$ y tiene como vector director $\vec{v}_4 = (2, 0)$.

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -1 \end{cases}$

9.A6 **El área de un triángulo *OAB*, rectángulo en *O*, es 6 unidades de superficie. Si *A*(0, 4), halla la ecuación continua del lado *AB*.**

Por ser rectángulo en *O*, los catetos son *OA* y *OB*; por tanto, *B* debe estar en el eje de abscisas.

Si $OA = 4$ ud es la altura, y si la base es *b*, entonces: Área $= \dfrac{4 \cdot b}{2} = 6 \Rightarrow b = 3$.



Hay dos posibilidades para *B*: $B(3,0)$ o $B'(-3,0)$. El vector de la recta *AB* es entonces:

$AB = (3,0) - (0,4) = (3,-4)$ o $\overrightarrow{AB}' = (-3,0) - (0,4) = (-3,-4)$.

La ecuación continua de la recta *AB* es:

Si $B(3,0)$: $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-4}{-4}$, si $B'(-3,0)$: $\dfrac{x}{-3} = \dfrac{y-4}{-4}$

9.A7 **Escribe las ecuaciones de la recta $2x - 5y + 8 = 0$:**

a) En forma continua.

b) En forma explícita.

c) En forma punto-pendiente.

a) Vector director: $\vec{u} = (5, 2)$. Punto: $x = -4 \Rightarrow y = 0$: $A(-4, 0)$

Forma continua: $\dfrac{x+4}{5} = \dfrac{y}{2}$

b) Se despeja *y*: $5y = 2x + 8 \Rightarrow y = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{8}{5}$: forma explícita.

c) Un punto es $A(-4, 0)$, y la pendiente es $m = \dfrac{2}{5}$. Forma punto-pendiente: $y = \dfrac{2}{5}(x + 4)$.

9.A8 **Las coordenadas de los vértices de un triángulo son: *A*(1, 3), *B*(−5, −1) y *C*(−2, −3).**

a) Halla la ecuación general de sus tres medianas.

b) Comprueba que las tres medianas se cortan en un mismo punto y halla sus coordenadas.

a) *M*: punto medio de *BC*: $M\left(\dfrac{-5-2}{2}, \dfrac{-1-3}{2}\right) \Rightarrow M\left(-\dfrac{7}{2}, -2\right)$

Mediana *AM*: $\dfrac{x-1}{-\dfrac{7}{2}-1} = \dfrac{y-3}{-2-3} \Rightarrow \dfrac{x-1}{\dfrac{-9}{2}} = \dfrac{y-3}{-5} \Rightarrow -5x + 5 = -\dfrac{9}{2}y + \dfrac{27}{2} \Rightarrow 5x - \dfrac{9}{2}y + \dfrac{17}{2} = 0$

Ecuación general: $10x - 9y + 17 = 0$

N: punto medio de *AC*: $N\left(\dfrac{1-2}{2}, \dfrac{3-3}{2}\right) \Rightarrow N\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$

Mediana *BN*: $\dfrac{x+5}{-\dfrac{1}{2}+5} = \dfrac{y+1}{0+1} \Rightarrow \dfrac{x+5}{\dfrac{9}{2}} = y + 1 \Rightarrow x + 5 = \dfrac{9}{2}y + \dfrac{9}{2} \Rightarrow x - \dfrac{9}{2}y + \dfrac{1}{2} = 0$

Ecuación general: $2x - 9y + 1 = 0$

P: punto medio de *AB*: $P\left(\dfrac{1-5}{2}, \dfrac{3-1}{2}\right) \Rightarrow P(-2, 1)$

Mediana *CP*: $\dfrac{x+2}{-2+2} = \dfrac{y+3}{1+3} \Rightarrow \dfrac{x+2}{0} = \dfrac{y+3}{4}$

Ecuación general: $x + 2 = 0$

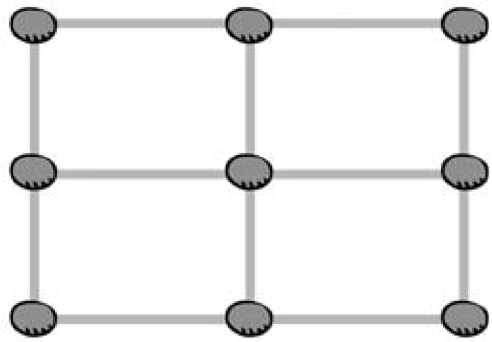
b) Las tres medianas son:
$$10x - 9y + 17 = 0$$
$$2x - 9y + 1 = 0$$
$$x + 2 = 0$$

Resolvemos el sistema formado por las dos últimas ecuaciones: $x = -2 \Rightarrow -4 - 9y + 1 = 0 \Rightarrow -3 = 9y \Rightarrow$ $y = -\dfrac{1}{3}$; y sustituimos $x = -2$, $y = -\dfrac{1}{3}$ en la primera: $10 \cdot (-2) - 9 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) + 17 = 0$.

Por tanto, la tercera recta pasa por el punto de las dos primeras; esto es, las tres medianas se cortan en un punto: $G\left(-2, -\dfrac{1}{3}\right)$, que es el baricentro del triángulo.

Los nueve puntos

Fíjate en la figura, y sitúa nueve puntos en los vértices de una cuadrícula de 2 x 2.



Se trata de unir los 9 puntos mediante 4 segmentos rectilíneos consecutivos sin levantar el lápiz del papel ni recorrer dos veces parte del mismo camino. ¿Cómo lo consigues?

El bloqueo que surge a la hora de resolver este problema es porque damos por hecho que no podemos salirnos del cuadrado limitado por los nueve puntos. El lector se impone limitaciones innecesarias que le impiden considerar otras posibilidades entre las que se encuentra el camino hacia la solución.