

9 Cuerpos geométricos

INTRODUCCIÓN

Los cuerpos geométricos están presentes en múltiples contextos de la vida real, de ahí la importancia de estudiarlos. Es interesante construir distintos cuerpos geométricos a partir de su desarrollo en papel o cartón y, de esta forma, facilitar el posterior aprendizaje y razonamiento del proceso de obtención de áreas y volúmenes, sin necesidad de aprender las fórmulas de memoria.

En los poliedros regulares se prestará especial atención al estudio de los prismas y las pirámides, caracterizando sus elementos y señalando las similitudes y diferencias.

Se estudiarán también los cuerpos que se obtienen al girar una figura alrededor de un eje, los cuerpos de revolución: cilindro, cono y esfera.

La aplicación del teorema de Pitágoras en el espacio es uno de los contenidos de la unidad que puede presentar mayores dificultades; por ello se explica, paso a paso, en diversos ejercicios en los que se guía al alumno para que los complete.

RESUMEN DE LA UNIDAD

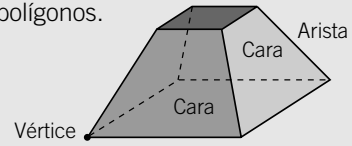
- Un *poliedro* es un cuerpo geométrico limitado por cuatro o más polígonos, denominados *caras* del poliedro. Los lados y vértices de las caras son las *aristas* y *vértices* del poliedro.
- En todo polígono convexo se cumple la *fórmula de Euler*: $C + V = A + 2$.
- Un *poliedro* es *regular* si sus caras son polígonos regulares iguales: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro.
- Para *calcular longitudes en el espacio*, y siempre que se formen triángulos rectángulos, se puede aplicar el *teorema de Pitágoras*.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Clasificar poliedros.	<ul style="list-style-type: none"> • Caras, aristas y vértices. • Poliedros cóncavos, convexos y regulares. • Fórmula de Euler. 	<ul style="list-style-type: none"> • Distinción de los poliedros y sus tipos. • Comprobación de si los poliedros cumplen la fórmula de Euler.
2. Diferenciar los elementos y tipos de prismas y pirámides.	<ul style="list-style-type: none"> • Prismas: elementos y tipos. • Pirámides: elementos y tipos. 	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocimiento de los distintos tipos de prismas y pirámides y sus elementos principales.
3. Conocer y aplicar el teorema de Pitágoras en el espacio.	<ul style="list-style-type: none"> • Cálculo de la diagonal de un ortoedro. • Cálculo de la altura de una pirámide. 	<ul style="list-style-type: none"> • Aplicación del teorema de Pitágoras en el espacio para hallar longitudes.
4. Calcular el área de prismas y pirámides.	<ul style="list-style-type: none"> • Área lateral y área total de un prisma recto. • Área lateral y área total de una pirámide recta. 	<ul style="list-style-type: none"> • Utilización de las fórmulas de las áreas de prismas y pirámides para resolver problemas geométricos.
5. Calcular el área de cuerpos redondos.	<ul style="list-style-type: none"> • Área lateral y área total: cilindro y cono. • Área de una esfera. 	<ul style="list-style-type: none"> • Utilización de las fórmulas de las áreas de cilindros, conos y esferas para resolver problemas geométricos.
6. Calcular el volumen de cuerpos geométricos.	<ul style="list-style-type: none"> • Volumen del ortoedro, del prisma y del cilindro. • Volumen del cono y de la pirámide. • Volumen de la esfera. 	<ul style="list-style-type: none"> • Utilización de las fórmulas de los volúmenes de cuerpos geométricos para resolver problemas.

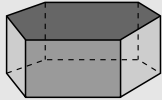
9 OBJETIVO 1 CLASIFICAR POLIEDROS

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

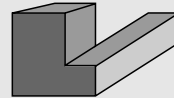
- Un **poliedro** es un cuerpo geométrico que está limitado por cuatro o más polígonos. Los polígonos que limitan al poliedro se llaman **caras**. Los lados de las caras se denominan **aristas**. Los vértices de las caras se denominan **vértices**.



- **Poliedro convexo:** al prolongarse sus caras no cortan al poliedro.

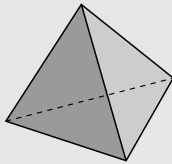


- **Poliedro cóncavo:** al prolongarse sus caras, alguna de ellas corta al poliedro.

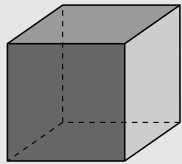


- **Poliedros regulares:** todas las caras son polígonos regulares iguales y en cada vértice se une el mismo número de caras.

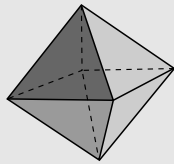
Solo existen cinco poliedros regulares:



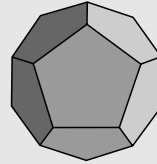
Tetraedro



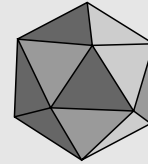
Cubo



Octaedro



Dodecaedro



Icosaedro

FÓRMULA DE EULER

En todo **poliedro convexo** se cumple siempre una relación, conocida con el nombre de fórmula de Euler, que relaciona el número de caras (C), el número de aristas (A) y el número de vértices (V):

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{C} & + & \mathbf{V} & = & \mathbf{A} & + & \mathbf{2} \\ \text{N.º de caras} & & \text{N.º de vértices} & & \text{N.º de aristas} & & \end{array}$$

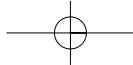
EJEMPLO

Comprueba que se cumple la fórmula de Euler para el tetraedro.

$$\begin{array}{l} \text{N.º de caras} = 4 \qquad \text{N.º de vértices} = 4 \qquad \text{N.º de aristas} = 6 \\ C + V = A + 2 \rightarrow 4 + 4 = 6 + 2 \rightarrow 8 = 8 \end{array}$$

- 1 Comprueba que el resto de poliedros regulares verifican la fórmula de Euler.

POLIEDRO	CARAS	VÉRTICES	ARISTAS	FÓRMULA DE EULER: $C + V = A + 2$
Cubo				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				



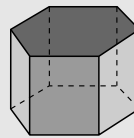
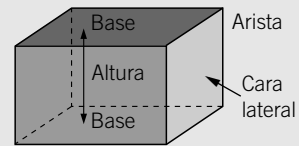
OBJETIVO 2

DIFERENCIAR LOS ELEMENTOS Y TIPOS DE PRISMAS Y PIRÁMIDES**9**

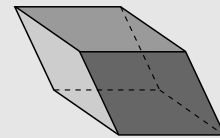
NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

PRISMAS

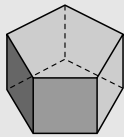
- Un **prisma** es un poliedro que tiene dos caras, que son polígonos iguales y paralelos entre sí, llamadas **bases**; sus otras **caras laterales** son paralelogramos.
- La **altura de un prisma** es la distancia entre las bases.
- **Prisma recto**: las caras laterales son todas rectángulos y, por tanto, perpendiculares a las bases.
- **Prisma oblicuo**: las caras laterales no son todas rectángulos.
- **Según la forma de la base**, los prismas se clasifican en triangulares, cuadrangulares, pentagonales...
- **Prisma regular**: es un prisma recto cuyas bases son polígonos regulares.



Prisma recto

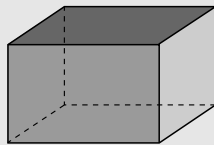


Prisma oblicuo

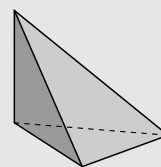
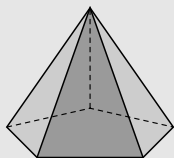
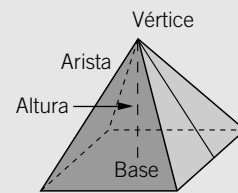


Prisma pentagonal regular

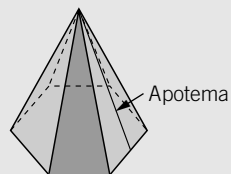
- **Paralelepípedos**: son los prismas cuyas bases son paralelogramos.
- **Ortoedro**: es un paralelepípedo recto.

**PIRÁMIDES**

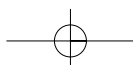
- Una **pirámide** es un poliedro cuya base es un polígono y sus caras laterales son triángulos que concurren en un vértice común, llamado **vértice de la pirámide**.
- La **altura de una pirámide** es la distancia de su vértice a la base.
- **Pirámide recta**: las caras laterales son todas triángulos isósceles.
- **Pirámide oblicua**: las caras laterales no son todas triángulos isósceles.



- **Según la forma de la base**, las pirámides se clasifican en triangulares, cuadrangulares, pentagonales...
- **Pirámide regular**: es una pirámide cuya base es un polígono regular.
- **Apotema**: es la altura de cualquiera de las caras laterales de una pirámide regular.



ADAPTACIÓN CURRICULAR

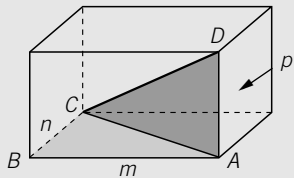


9 OBJETIVO 3 CONOCER Y APLICAR EL TEOREMA DE PITÁGORAS EN EL ESPACIO

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

El teorema de Pitágoras se puede aplicar en todos los contextos en los que se forman triángulos rectángulos. Tiene muchas aplicaciones para calcular longitudes de cuerpos en el espacio.

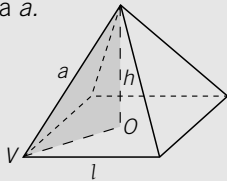
- **Cálculo de la diagonal de un ortoedro**, conocidas las longitudes de sus lados m , n y p .



$$CA = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$CD = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$$

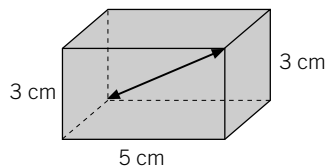
- **Cálculo de la altura de una pirámide cuadrangular regular**, conocidas las longitudes del lado de la base y la arista a .



$$h^2 = a^2 - OV^2 = a^2 - \frac{l^2}{2} \rightarrow h = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{2}}$$

EJEMPLO

Calcula la diagonal del ortoedro de la figura.

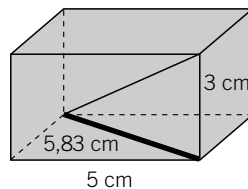


- Consideramos la cara inferior del ortoedro:

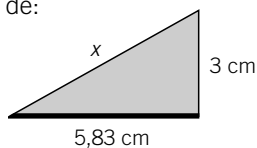


- Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 3^2 + 5^2 \rightarrow h^2 = 9 + 25 \rightarrow h^2 = 34 \rightarrow h = \sqrt{34} \rightarrow h = 5,83 \text{ cm}$$



- Vemos que la diagonal es la hipotenusa de:

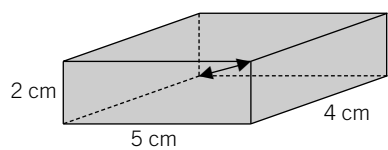


- Aplicamos el teorema de Pitágoras:

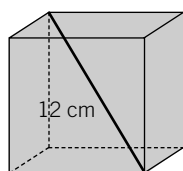
$$x^2 = 3^2 + 5,83^2 \rightarrow x^2 = 9 + 34 \rightarrow x^2 = 43 \rightarrow x = \sqrt{43} \rightarrow x = 6,56 \text{ cm}$$

La diagonal mide $x = \sqrt{3^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{43} = 6,56 \text{ cm}$.

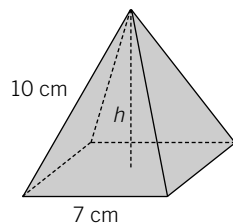
- 1 Calcula la diagonal de este ortoedro.



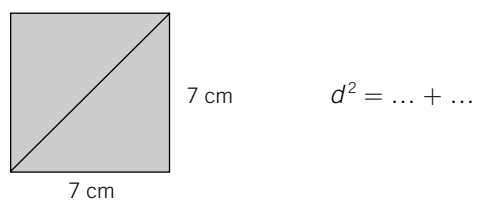
- 2 Halla la arista de un cubo sabiendo que su diagonal mide 12 cm.
(Recuerda que en un cubo todos sus lados miden lo mismo.)



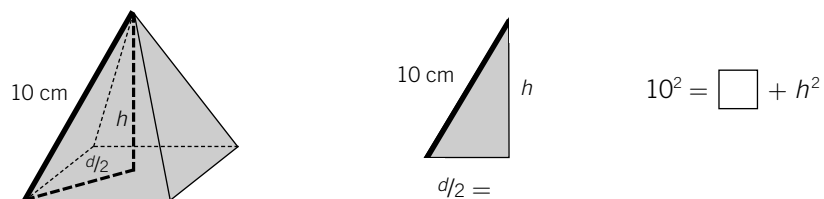
- 3 Dada una pirámide de base cuadrada, de lado 7 cm y arista lateral 10 cm, halla la diagonal.



- Tomamos la base y aplicamos el teorema de Pitágoras:



- Ahora tenemos:



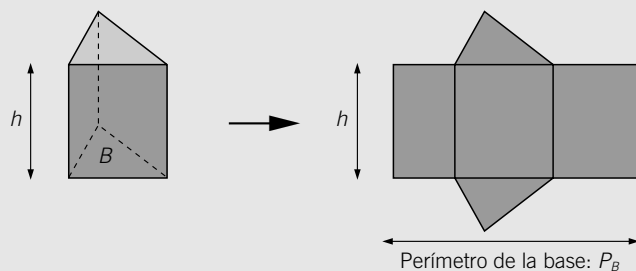
- Aplicamos el teorema de Pitágoras:

9 OBJETIVO 4 CALCULAR EL ÁREA DE PRISMAS Y PIRÁMIDES

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

ÁREA DE PRISMAS RECTOS

Para hallar el área de un prisma recto nos fijamos en su desarrollo: el prisma recto está formado por un rectángulo y dos polígonos que son sus bases.



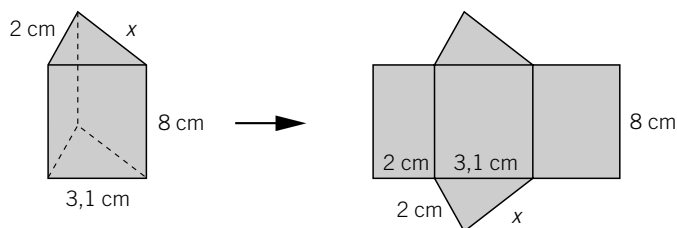
- **Área lateral:** es el área del rectángulo, uno de cuyos lados coincide con el perímetro de la base y el otro con la altura del prisma.

$$A_L = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura} = P_B \cdot h$$

- **Área total:** es la suma del área lateral y el área de las bases.

$$A_T = \text{área lateral} + 2 \cdot \text{área de la base} = P_B \cdot h + 2 \cdot A_B$$

1 Dado este prisma recto con base un triángulo rectángulo, halla el área total.

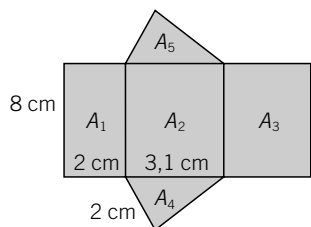


- Para hallar el valor de x , que es uno de los catetos del triángulo rectángulo, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$(3,1)^2 = x^2 + 2^2$$

$x = \dots\dots\dots$

- Para calcular el área total determinamos el área de cada una de las seis caras del prisma, y luego las sumamos para obtener el área total:



A_1, A_2, A_3 son rectángulos. Su área es el producto de base por altura.
 A_4, A_5 son triángulos rectángulos. Su área es la base por la altura dividido entre 2, es decir, el producto de los catetos dividido entre 2.

$A_1 =$

$A_2 =$

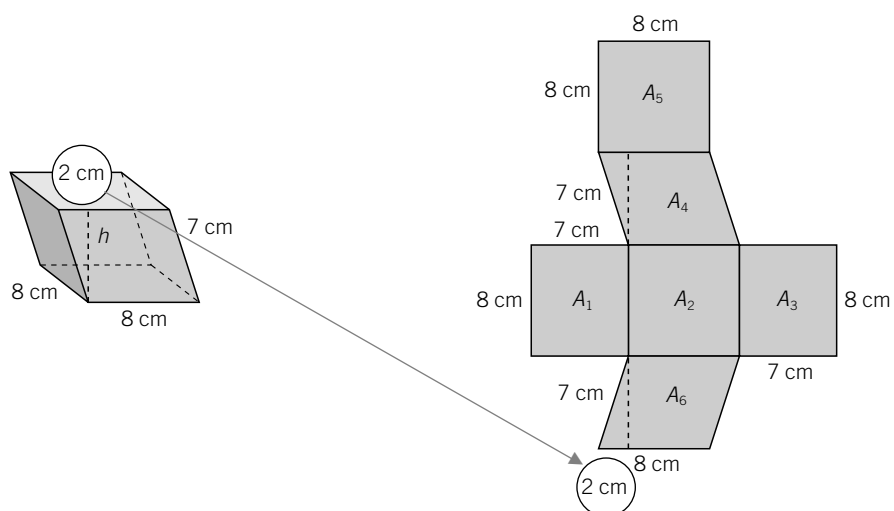
$A_3 =$

$A_4 =$

$A_5 =$

Área total = $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 =$

- 2 Calcula el área del prisma oblicuo de base cuadrangular de la figura.



- Para hallar el valor de h aplicamos el teorema de Pitágoras:

- Para calcular el área total determinamos el área de cada una de las seis caras del prisma, y luego las sumamos:

$$A_1 = \dots \cdot \dots =$$

$$A_4 = \dots \cdot \dots =$$

$$A_2 = \dots \cdot \dots =$$

$$A_5 = \dots \cdot \dots =$$

$$A_3 = \dots \cdot \dots =$$

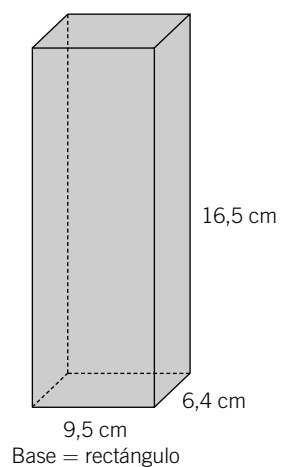
$$A_6 = \dots \cdot \dots =$$

$$\text{Área total} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = \boxed{}$$

- 3 Halla el área lateral y el área total de un ortoedro de $6,4 \times 9,5$ cm de base y 16,5 cm de altura.

$$\text{Área lateral} = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura} =$$

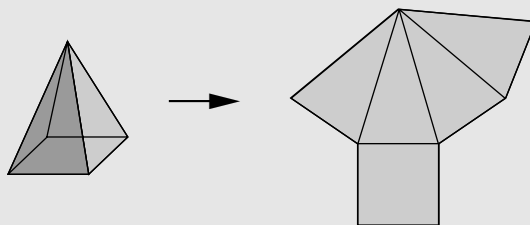
$$\text{Área total} = \text{área lateral} + 2 \cdot \text{área de la base} =$$



9

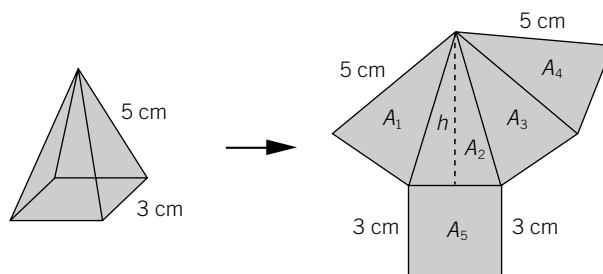
ÁREA DE PIRÁMIDES RECTAS

Para hallar el área de una pirámide recta nos fijamos en su desarrollo: está formada por la base y tantos triángulos como lados tiene la base.

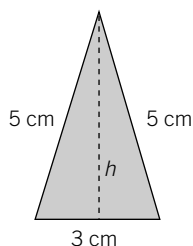


- **Área lateral:** es el área formada por la suma de las áreas de los triángulos.
- **Área total:** es la suma del área lateral y el área de la base: $A_T = A_L + A_B$.
- Si el polígono de la base es regular, el cálculo es más sencillo, ya que todas las caras laterales son iguales y basta con hallar el área de un triángulo y multiplicar por el número de triángulos para obtener el área lateral.

- 4** Calcula el área de la pirámide de base cuadrada de la figura. Ten en cuenta que la base es un polígono regular.



Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de h :



$$5^2 = \square^2 + h^2$$

$$A_1 = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} =$$

$$A_2 =$$

$$A_3 =$$

$$A_4 =$$

$$A_5 =$$

$$\text{Área total} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = \square$$

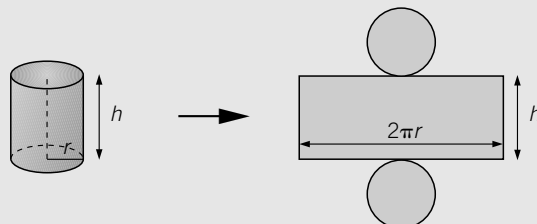
OBJETIVO 5

CALCULAR EL ÁREA DE CUERPOS REDONDOS**9**

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

ÁREA DEL CILINDRO

Para hallar el área del cilindro nos fijamos en su desarrollo: está formado por un rectángulo y dos círculos.

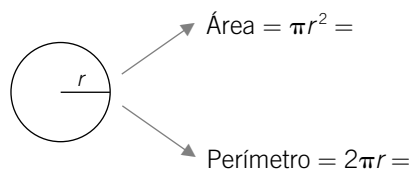
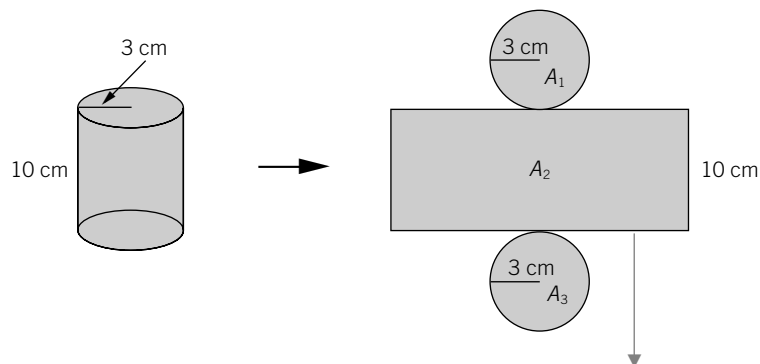


- **Área lateral:** es un rectángulo, en el que uno de sus lados es igual a la longitud de la circunferencia de la base ($2\pi r$), y el otro es la altura (h).

$$A_L = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura} = 2\pi r \cdot h$$

- **Área total:** se obtiene sumando el área lateral y las áreas de las dos bases.

$$A_T = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

1 Completa el ejercicio y halla el área total del cilindro.Es igual que el perímetro de A_1 .

$$2 \cdot \pi \cdot 3 = 2 \cdot 3,14 \cdot 3$$

$$A_1 = \pi r^2 =$$

$$A_2 = 2\pi r \cdot h =$$

$$A_3 = \pi r^2 =$$

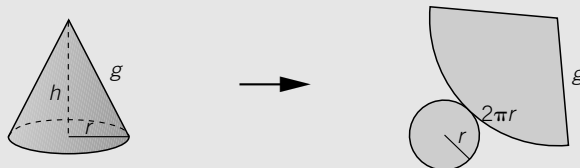
$$\text{Área total} = A_1 + A_2 + A_3 = \boxed{}$$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

9

ÁREA DEL CONO

Para hallar el área de un cono nos fijamos en su desarrollo: está formado por un sector circular y un círculo, que es la base.

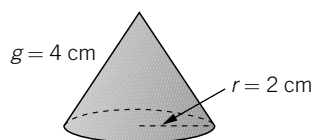


- **Área lateral:** la calculamos como si fuese el área de un triángulo, en el que la longitud de la base es la de la circunferencia ($2\pi r$) y la altura es el radio del sector.

$$A_l = \frac{\text{longitud de la base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{2\pi r \cdot g}{2} = \pi r g$$

- **Área total:** $A_T = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r)$

- 2 El área lateral del cono de la figura es:



- a) 8 cm^2
 b) $25,12 \text{ cm}^2$
 c) $12,56 \text{ cm}^2$
 d) 34 cm^2

- 3 El área total del cono anterior es:

- a) 20 cm^2 b) $50,24 \text{ cm}^2$ c) $36,55 \text{ cm}^2$ d) $37,68 \text{ cm}^2$

- 4 Halla el área total de un cono con $r = 5 \text{ cm}$ y $h = 12 \text{ cm}$.

ÁREA DE LA ESFERA

El área de una esfera de radio r es igual a cuatro veces el área del círculo del mismo radio que la esfera:

$$A = 4\pi r^2$$

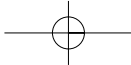
EJEMPLO

Calcula el área de una esfera de radio 10 cm .

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 10^2 = 1.256 \text{ cm}^2$$

- 5 El área de una esfera de radio 15 cm es:

- a) 2.826 cm^3 b) $28,26 \text{ cm}^2$ c) 2.826 cm^2 d) $14,13 \text{ cm}^2$



OBJETIVO 6

CALCULAR EL VOLUMEN DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

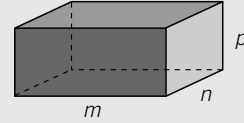
9

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

VOLUMEN DEL ORTOEDRO

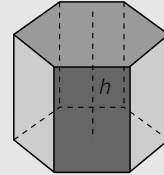
Si un ortoedro tiene de dimensiones m , n y p , su volumen V es igual al área de la base ($m \cdot n$) por la altura p .

$$V = \text{área de la base} \cdot \text{altura} = m \cdot n \cdot p$$



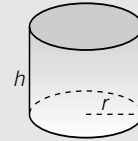
VOLUMEN DEL PRISMA

$$V = \text{área de la base} \cdot \text{altura} = A_{\text{Base}} \cdot h$$



VOLUMEN DEL CILINDRO

$$V = \text{área de la base} \cdot \text{altura} = \pi r^2 \cdot h$$



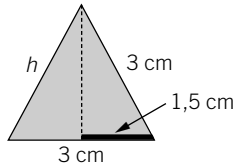
EJEMPLO

Calcula el volumen de un ortoedro de dimensiones 3 cm, 4 cm y 8 cm.

$$V = 3 \cdot 4 \cdot 8 = 96 \text{ cm}^3$$

Halla el volumen de un prisma recto de altura 15 cm y base triangular regular de lado 3 cm.

Para calcular la altura debemos aplicar el teorema de Pitágoras: $3^2 = 1,5^2 + h^2 \rightarrow h = 2,6$ cm



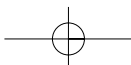
$$V = \text{área de la base} \cdot \text{altura} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} \cdot h = \frac{3 \cdot 2,6}{2} \cdot 15 = 58,5 \text{ cm}^3$$

Determina el área de un cilindro de altura 7 cm y radio de la base 4 cm.

$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 4^2 \cdot 7 = 351,68 \text{ cm}^3$$

- 1 El volumen de un ortoedro de dimensiones 4, 8 y 12 cm, respectivamente, es:
 - a) 384 cm^3
 - b) 24 cm^3
 - c) 192 cm^3
 - d) 768 cm^3
- 2 El volumen de un prisma hexagonal regular de arista básica 10 cm y altura 8 cm es:
 - a) $2.078,4 \text{ cm}^3$
 - b) $4.156,8 \text{ cm}^3$
 - c) 480 cm^3
 - d) $692,8 \text{ cm}^3$
- 3 El volumen de un cilindro de altura 6 cm y radio de la base 3 cm es:
 - a) $56,52 \text{ cm}^3$
 - b) $169,56 \text{ cm}^3$
 - c) $113,04 \text{ cm}^3$
 - d) $339,12 \text{ cm}^3$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

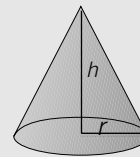


9

VOLUMEN DEL CONO

El volumen de un cono es igual a la tercera parte del área de la base, que es un círculo (πr^2), por la altura (h).

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

**VOLUMEN DE LA PIRÁMIDE**

El volumen de la pirámide se calcula igual que el de un cono, pero teniendo en cuenta que la base puede ser un polígono cualquiera.

$$V = \frac{A_{\text{Base}} \cdot h}{3}$$

**EJEMPLO**

Calcula el volumen de un cono de altura 10 cm y radio de la base 2 cm.

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 10}{3} = 41,87 \text{ cm}^3$$

Halla el volumen de una pirámide de altura 8 cm y base regular triangular de lado 2 cm.

$$A_{\text{Base}} = \frac{2 \cdot 1,73}{2} = 1,73 \text{ cm}^2$$

Para calcular el área del triángulo de la base aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$2^2 = 1^2 + h^2 \rightarrow h = 1,73 \text{ cm} \rightarrow V = \frac{A_{\text{Base}} \cdot h}{3} = \frac{1,73 \cdot 8}{3} = 4,61 \text{ cm}^3$$

4 El volumen de un cono de altura 15 cm y radio de la base 12 cm es:

- a) 4.069,44 cm³ b) 2.260,8 cm³ c) 6.782,4 cm³ d) 1.356,48 cm³

5 El volumen de una pirámide de base cuadrangular de lado 8 cm y altura 8 cm es igual a:

- a) 170,67 cm³ b) 85,33 cm³ c) 341,34 cm³ d) 42,68 cm³

VOLUMEN DE LA ESFERA

El volumen de una esfera es: $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

EJEMPLO

Calcula el volumen de una esfera de radio 3 cm.

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{3} = 113,04 \text{ cm}^3$$

6 El volumen de una esfera de radio 7 cm es:

- a) 718,01 cm³ b) 143,603 cm³ c) 1.436,03 cm³ d) 339,12 cm³

7 El volumen de una esfera de área 2.826 cm² es:

- a) 14.130 cm³ b) 42.390 cm³ c) 28.260 cm³ d) 86.340 cm³