RECORDAR:

- Para que exista límite de una f(x) en un punto han de coincidir los límites laterales en dicho punto.
- A efectos del $\lim_{x\to a} f(x)$ no tenemos en cuenta lo que ocurre exactamente en x=a, sino en las proximidades. De hecho, hay casos en los que no existe f(a) pero sí el lím (de ahí la utilidad de la noción de límite):
- El límite de la suma es la suma de los límites, y algo parecido ocurre con el producto, cociente, potencia, raíz, logaritmo, etc. Esto es muy útil a la hora de calcular límites.
- Límites infinitos e indeterminaciones (**completa, con ayuda del profesor**):

SUMA Y RESTA: $\infty+\infty=$ $\quad\infty+k=$

$\infty-\infty=$ $\quad-\infty-\infty=$

PRODUCTO: $\infty\cdot\infty=$ $\quad\infty\cdot(-\infty)=$ $\quad-\infty\cdot(-\infty)=$ $\quad\infty\cdot k=\begin{cases} & \text{si } k>0 \\ & \text{si } k=0 \\ & \text{si } k<0 \end{cases}$

COCIENTE: $\frac{\infty}{k}=\begin{cases} & \text{si } k>0 \\ & \text{si } k=0 \\ & \text{si } k<0 \end{cases}$ $\quad\frac{k}{\infty}=$ $\quad\frac{\pm\infty}{\pm\infty}=$ $\quad\frac{0}{0}=$ $\quad\frac{k}{0}=$

POTENCIA: $a^{\infty}=\begin{cases} & \text{si } a>1 \\ & \text{si } a=1 \\ & \text{si } a<1 \end{cases}$ $\quad\infty^{n}=\begin{cases} & \text{si } n<0 \\ & \text{si } n=0 \\ & \text{si } n>0 \end{cases}$ $\quad 0^0=$ $\quad (0^+)^{\infty}=$

LOGARITMOS: $\log 0^+=-\infty$ $\quad\log_a 1=0$ $\quad\log_a a=1$ $\quad\log\infty=\infty$

$\ln 0^+=-\infty$ $\quad\ln 1=0$ $\quad\ln e=1$ $\quad\ln\infty=\infty$

con lo cual los 7 tipos de indeterminación son:

$$\boxed{\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\pm\infty},\ \infty^0,\ 0^0}$$

1. a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$ b) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2+x-4}{x-1}=8$ c) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x-1}=4$

d) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^3-x}{x^2-x}=1$ e) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^3-5x^2+8x-4}=4$ f) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3+x^2-x-1}=0$

g) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-6x+9}=\pm\infty$ h) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x^2+3x-1}=\pm\infty$ i) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}=4$

j) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-2x^2-5x+10}=-4$ k) $\lim_{x\to 0}\dfrac{4}{x^5}=\pm\infty$ l) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{3x^4}=\infty$

m) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^3-2x-21}{x\,(x-3)}=\dfrac{25}{3}$ n) $\lim_{x\to 1}\dfrac{2x-1}{x-1}=\pm\infty$ o) $\lim_{x\to 2}\dfrac{4x^2-4x-8}{x^2-3x+2}=12$

p) $\lim_{x\to a}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{a^2}}{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{a^3}}=\dfrac{2}{3}a$ q) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}=-2$ r) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$

☞ *Ejercicios libro recomendados: 4 pág. 235*

2. a) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+1}{4x^2+2}=\dfrac{3}{4}$ b) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x-2}=\infty$ c) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{x^2+x+2}=0$

d) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^4-1}{x^3+2}=\infty$ e) $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2-2x}{x+1}=-\infty$ f) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+3}{x}=\infty$

g) $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{4x^3-x}{2x^3+2x}=2$ h) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x}{5x^2+x}=\dfrac{3}{5}$ i) $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}=1$

j) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^2+x}{3x^4+2}=\dfrac{1}{3}$ k) $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{-x+2}{x^5+7x^2+3}=0$ l) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^7+6x^2-2x}{3x^2+4x^4+1}=\infty$

m) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^6}=0$ n) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{x^2}{x-1}\right)=-2$ o) $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{4}{x^3}=0$

p) $\lim_{x\to\infty}5^{-x}=0$ q) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{5}{3}\right)^x=\infty$ r) $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{5x^3-3x^2+5}{3x^3+2x^2-3x-1}=\dfrac{5}{3}$

3. a) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\dfrac{1}{4}$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0$

c) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+2x}-\sqrt{x}}{2}=\infty$

d) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\dfrac{1}{2}$

e) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+7}+3x^2}{x^2+3x}=3$

f) $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-2x-3}=\dfrac{1}{24}$

g) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^5}{\sqrt{x^4-3}}=\infty$

h) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-2x}}{\sqrt{x^2+x-6}}=\nexists$

(ayuda: reducir a índice común)

i) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}\right)=\dfrac{3}{2}$

j) $\lim_{x\to 2^+}\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-4}}=\infty$

k) $\lim_{x\to\infty}(4x+2)\sqrt{2x^2-3}=\infty$

l) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+3} = 1$

m) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+7}-3} = \infty$

n) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \infty$

o) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right) = \dfrac{a}{2}$

p) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}+x\right) = -1$

q) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x+\sqrt{x^2+x}\right) = -\infty$

r) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}+x\right) = -\infty$

s) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2} = 16$

t) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right) = -\dfrac{1}{2}$

u) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} = 0$

v) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

w) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1+\sqrt{x^2-x}} = \sqrt{2}$

4. a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right) = -1$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{1-x^3}\right) = \pm\infty$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{3x+1}{x^2}-\dfrac{3}{x}\right) = \infty$

d) $\lim\limits_{x \to 3} \left[\dfrac{(x+1)^3}{(x-3)^2}-\dfrac{(x+2)^2}{x-3}\right] = \infty$ e) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1+x^3}{1-x^3}-\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right) = -\infty$ f) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{3x+1}{x-1}-\dfrac{2x-1}{x^2-1}\right) = \pm\infty$

g) $\lim\limits_{x \to \infty} x\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-1\right) = 1$ h) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x+5}{x-3}\right)^{x} = 1$ i) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x+5}{x+3}\right)^{\frac{x-4}{\sqrt{2x}-2}} = \left(\dfrac{7}{5}\right)^{8}$

☞ *Ejercicios libro recomendados: 2 pág. 227;* ***1 y 2 pág. 231****; 5 pág. 235; 6 y 7 pág. 236;*

☞ ***Ejercicios del libro con solución pág. 245 y ss: 8, 10 a,b, d; 11, 16, 25, 27;***

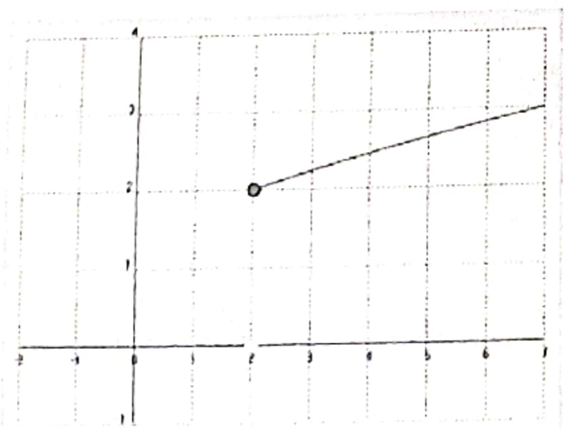
5. Dadas las siguientes funciones, obtener: a) Los límites que se indican. b) La ecuación de las posibles asíntotas. C) Dom(f) e Im(f):

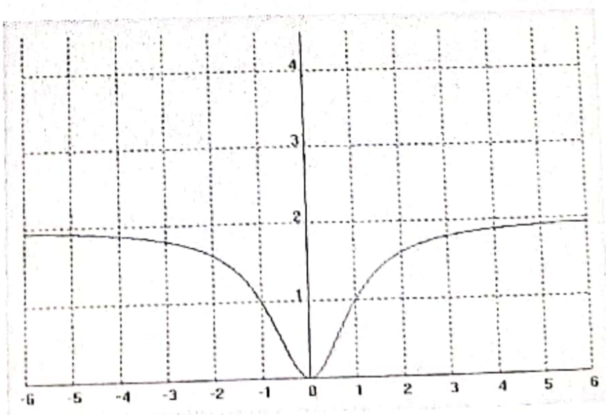
i) $f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x);\ \lim\limits_{x \to \infty} f(x);\ \lim\limits_{x \to 2} f(x)$

ii) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x);\ \lim\limits_{x \to \infty} f(x);\ \lim\limits_{x \to 1} f(x)$



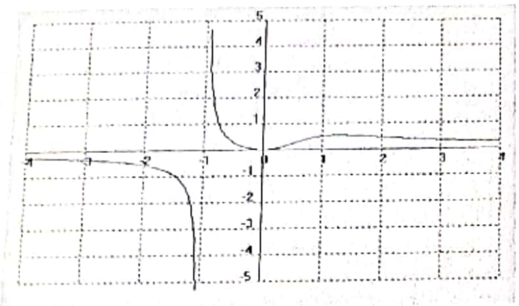


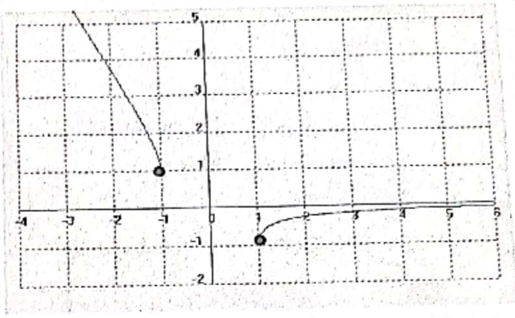
iii) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^3+1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x);\lim\limits_{x\to\infty} f(x);\lim\limits_{x\to-1} f(x);\lim\limits_{x\to1} f(x)$

iv) $f(x)=\sqrt{x^2-1}-x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x);\lim\limits_{x\to\infty} f(x);\lim\limits_{x\to-1^-} f(x);\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$





6. Dada la función
$$f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{x^2+3x}{5-x} & \text{si } x\in(0,3) \\ \dfrac{x-5}{\sqrt{x-1}} & \text{si } x\in(3,5] \\ x & \text{si } x\in(5,7) \\ 3 & \text{si } x\geq 7 \end{cases}$$

se pide (por este orden): a) f(0), f(3), f(5) y f(7)

b) $\lim\limits_{x\to0} f(x);\ \lim\limits_{x\to3} f(x);\ \lim\limits_{x\to5} f(x);\ \lim\limits_{x\to7} f(x);\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

c) Representación gráfica

d) Dom(f) e Im(f)

7. Calcular los límites laterales de las siguientes funciones en los puntos que se indican . Representarlas gráficamente:

a) $f(x)=\begin{cases} 1-x & \text{si } x\leq 0 \\ x & \text{si } x>0 \end{cases}$ en x=0

b) $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x\leq 0 \\ 1-2x & \text{si } 0<x\leq 1 \\ x^2 & \text{si } x>1 \end{cases}$ en x=0 y x=1

c) $f(x)=|x-5|$ en x=5

d) $f(x)=|x|-\dfrac{x}{x+1}$ en x=0

(Soluc: a) ∄ ; b) 1 y ∄ ; c) 0; d) 0)

8. Calcular los valores del parámetro **a** para que se verifiquen las siguientes igualdades:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3ax^3-5x+1}{10x^3+5}=-1$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+ax+1}-x=2$

(Soluc: a=-10/3; a=4)

9. Comprobar los siguientes límites construyendo una tabla apropiada mediante calculadora:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{(x-2)^2} = 0$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{3x+2} = \dfrac{1}{3}$ c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = \infty$

(S) 10. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \leq 1 \\ ax+3 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ bx^3-2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

calcular los valores de los parámetros **a** y **b** para que existan los límites en x=1 y x=2

(Soluc: a=-1, b=3/8)

11. Dar un ejemplo de una función f(x) definida para todo x que no tenga límite cuando x→2

12. Discutir $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\sqrt{3x+4} - \sqrt{ax}\right)$ en función de los valores del parámetro **a**

(Soluc: 0 si a=3; -∞ si a>3; ∞ si a<3)